1. Rozważmy formuły logiczne, gdzie zmienne $x, y, \ldots$ opisują punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. (Czyli jedna zmienna x opisuje dwie liczby.) Możemy korzystać z równości punktów $x = y$ oraz z trzyargumentowej relacji $m(x, y, z)$, która zachodzi jeśli punkt y jest na odcinku łączącym x oraz y. (Na przykład zachodzi $m(x, x, x)$.) Na przykład formuła

$$\forall x \forall z\ (x \neq z) \Rightarrow \exists y\ (x \neq y \wedge z \neq y \wedge m(x, y, z))$$

mówi, że między każdymi dwoma punktami jest jakiś punkt. Tarski dowiódł, że istnieje algorytm, który sprawdza czy dana formuła jest prawdziwa. W tym zadaniu interesuje nas trochę ogólniejszy problem, gdzie w formule mogą występować też parametry, które są zbiorami punktów, oznaczanymi przez wielkie litery $X, Y, Z, \ldots$. Zbiory te są parametrami, formuła nie może po nich kwantyfikować. Na przykład formuła

$$\forall x \forall y \forall z \qquad (x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X) \Rightarrow (m(x, y, z) \vee m(x, z, y) \vee m(y, x, z))$$

mówi, że X jest podzbiorem prostej. Powiemy, że formuła mówiąca o zbiorach $X_1, \ldots, X_n$ jest spełnialna, jeśli istnieją zbiory $X_1, \ldots, X_n$, które powodują, że formuła jest prawdziwa. Na przykład formuła mówiąca o podzbiorze prostej jest spełnialna. Przykładem formuły niespełnialnej jest formuła, która mówi, że X jest podzbiorem prostej, Y jest podzbiorem prostej, $X \cap Y$ zawiera przynajmniej dwa różne punkty, ale $X \cup Y$ nie jest podzbiorem prostej (nietrudno napisać te warunki za pomocą formuły).

Pokazać nierozstrzygalność następującego problemu decyzyjnego:

- Dane: formuła φ, która korzysta z relacji $m(x, y, z)$, równości, oraz zbiorów $X_1, \ldots, X_n$.
- Pytanie: czy formuła jest spełnialna?

2. Załóżmy, że język $L \subseteq \{a, b\}^*$ jest NP-zupełny. Czy NP-zupełny musi być któryś z języków $L \cap A^*a$ lub $L \cap A^*b$?

Można powołać się na następujące założenie (które nie jest udowodnione, bo implikuje P≠NP):

- Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ dowolny nieskończony zbiór liczb naturalnych. Nie istnieje algorytm wielomianowy dla problemu SAT, który działa dla formuł, których ilość zmiennych jest w X.