1. Niech A będzie skończonym alfabetem. Dla różnych słów $w, v \in A^*$ zdefiniujmy

$$d(w,v) = \frac{1}{\begin{array}{r}\text{minimalna liczba stanów w automacie, który}\\ \text{akceptuje dokładnie jedno ze słów } w, v,\end{array}}$$

a dla równych słów zdefiniujmy $d(w,v) = 0$. (Jako pierwsza część zadania, pokaż, że powyższa funkcja jest odległością na A^*).

Rozważmy dwa ciągi słów skończonych,

$$w_1, w_2, \ldots \qquad v_1, v_2, \ldots\ ,$$

które są ciągami Cauchy'ego według powyższej odległości. Odległość między nimi definiujemy jako

$$\limsup d(w_n, w_n).$$

Utożsamiamy dwa ciągi, które są w odległości 0. Udowodnij, że konkatenacja ciągów Cauchy'ego,

$$w_1, w_2, \ldots\ v_1, v_2, \ldots \qquad \mapsto \qquad w_1v_1, w_2v_2, \ldots$$

jest operacją ciągłą.

2. Wszystko jak w poprzednim zadaniu, tylko że mówimy o niedeterministycznym automacie ze stosem, a liczmy nie tylko stany, ale stany plus rozmiar alfabetu stosowego. Pokazać, że tym razem konkatenacja nie jest ciągła. (Na rozgrzewke można pokazać, że odpowiedź nie zależy od tego, jaki jest wariant automatu ze stosem: akceptujący przez pusty stos, czy przez stan akceptujący, i t.d.)

3. Rozważmy model automatu skończonego, w którym głowica może poruszać się w lewo i prawo (jak maszyna Turinga, tylko bez możliwości pisania po wejściu). Słowo wejściowe jest wyposażone w znaczniki początku $\vdash$ i końca $\dashv$. Dodatkowo, wyposażmy automat w jeden kamyczek, który można kłaść i podnosić, oraz widzieć czy jest czy go nie ma na bieżącej pozycji. Automat jest deterministyczny. Podsumowując, funkcja przejścia jest postaci

$$\delta : Q \times (A \cup \{\vdash, \dashv\}) \times \{\text{jest, nie ma}\} \to Q \times \{-1, 0, 1\} \times \{\text{połóż, ignoruj, podnieś}\}.$$

W trakcie biegu, kamyczek może być na co najwyżej jednej pozycji słowa (próba położenia drugiego kamczyka kończy natychmiast bieg, a słowo wejściowe zostaje odrzucone). Automat akceptuje, gdy wchodzi w stan akceptujący. Udowodnić, że opisany powyżej model nie wykracza poza języki regularne.

4. Rozważmy dwa modele automatu, które nie tyle akceptują słowa, co definiują funkcje częściowe

$$f : A^* \to B^*.$$

Pierwszy model jest jak w poprzednim zadaniu, z tą różnicą, że każda tranzycja jest dodatkowo oznaczona literą z $B \cup \{\epsilon\}$, która jest wypisywana na wyjście. Drugi model jest taki sam, ale bez kamyczka. Funkcje mogą być częściowe, bo automat może nie wejść nigdy w stan akceptujący (na przykład jeśli próbuje wypisać nieskończenie wiele liter na wyjście), albo może próbować położyć drugi raz kamyczek. Pokazać, że oba modele są równoważne, czyli opisują te same funkcje częściowe.

5. Automatem kopiującym nazwiemy automat ze stosem wzbogacony o operację copy_γ dla każdego symbolu stosowego γ. Jej wykonanie powoduje skopiowanie fragmentu stosu od najwyższego wystąpienia γ w górę, tzn. stos $w\gamma v$, gdzie v nie zawiera γ, zamienia się w stos $w\gamma v\gamma v$ (wierzchołek stosu jest z prawej). Wykonanie operacji jest niemożliwe, gdy stos nie zawiera symbolu γ.

   Czy istnieje automat kopiujący, który rozpoznaje język $\{a^n b^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$?