Metody homologiczne, Wiosna 2019

---

t-struktury

1. Niech $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 1})$ będzie t-strukturą na kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$. Pokaż, że dla każdego $D \in \mathcal{D}$ trójkąt wyróżniony $\tau_{\leq 0}D \to D \to \tau_{\geq 1}D \to \tau_{\leq 0}D[1]$ z $\tau_{\leq 0}D \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\tau_{\geq 1}D \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż, że $\tau_{\leq 0}$ rozrzesza się do funktora $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\leq 0}$ lewo sprzężonego do włożenia $\mathcal{D}^{\leq 0} \to \mathcal{D}$ oraz, że $\tau_{\geq 1}$ rozszerza się do funktora $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\geq 1}$ prawo sprzężonego do włożenia $\mathcal{D}^{\geq 1} \to \mathcal{D}$.

2. Niech $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 1})$ będzie t-strukturą. Pkoaż, że dla $D \in \mathcal{D}$ następujące warunki są równoważne
   (a) $D \in \mathcal{D}^{\leq n}$,
   (b) Kanoniczny morfizm $\tau_{\leq n}D \to D$ jest izomorfizmem,
   (c) $\tau_{\geq n+1}D = 0$.

3. Niech $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 1})$ będzie t-strukturą. Pokaż, że $\mathcal{D}^{\geq 1} = \{D \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^{\leq 0}, D) = 0\}$.

4. Niech $(\mathcal{D}^{\leq_1 0}, \mathcal{D}^{\geq_1 1})$, $(\mathcal{D}^{\leq_2 0}, \mathcal{D}^{\geq_2 1})$ będą t-strukturami na kategorii $\mathcal{D}$ z sercami $\mathcal{A}_1$, odpowiednio $\mathcal{A}_2$. Pokaż, że te t-struktry różnią się o tilt w parze torsyjnej na $\mathcal{A}_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{D}^{\leq_2 0} \subset \mathcal{D}^{\leq_1 0} \subset \mathcal{D}^{\leq_2 1}$.

5. Niech $(\mathcal{D}_1^{\leq 0}, \mathcal{D}_1^{\geq 1})$, $(\mathcal{D}_2^{\leq 0}, \mathcal{D}_2^{\geq 1})$ będą t-strukturami na kategoriach triangulowalnych $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$. Niech $F \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ będzie lewo sprzężony do $G \colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_1$. Pokaż, że jeżeli G jest lewo t-dokładny, to F jest prawo t-dokładny.