Metody homologiczne, Wiosna 2019

Kategorie pochodne snopów koherentnych, funktor Serre'a

1. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem właściwym rozmaitości. Załóżmy, że dla dowolnego snopa koherentnego F na X, $R^i f_* F = 0$, dla $i > 1$ (założenie to jest spełnione na przykład, gdy włókna f mają wymiar mniejeszy lub równy 1). Pokaż, że kompleks $F^\bullet$ snopów koherentnych na X należy do jądra Rf_*, tzn $Rf_* F^\bullet = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie kohomologie $F^\bullet$ należą do jądra Rf_*.

2. Niech k będzie ciałem, a $\mathcal{A}$ k-liniową kategorią addytywną. Funktor $\mathbb{S}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jest *funktorem Serre'a*, jeżeli dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \mathcal{A}$ istnieje izomorfizm
$$\eta_{A,B}\colon \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(B, \mathbb{S}A)^*,$$
który jest funktorialny w A i B. Pokaż, że jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ mają funktory Serre'a $\mathbb{S}_A$, $\mathbb{S}_B$ i $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jest równoważnością, to $\mathbb{S}_B F \simeq F \mathbb{S}_A$.

3. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią triangulowalną z funktorem Serre'a $\mathbb{S}$. Pokaż, że $\mathbb{S}$ jest dokładny, tzn. przeprowadza trójkąty wyróżnione na trójkąty wyróżnione.

4. Niech E, F będą snopami koherentnymi na gładkiej rzutowej rozmaitości wymiaru n. Pokaż, że $\operatorname{Ext}^i(E, F) = 0$ dla $i > n$.

5. Niech X, Y będą gładkimi rozmaitościami rzutowymi. Pokaż, że z równoważności $\mathcal{D}^b(X) \simeq \mathcal{D}^b(Y)$ wynika, że X i Y mają ten sam wymiar.

6. Niech C będzie gładką krzywą rzutową. Pokaż, że dowolny obiekt $E^\bullet$ kategorii $\mathcal{D}^b(C)$ jest izomorficzny z sumą swoich kohomologii, $E^\bullet \simeq \bigoplus_i \mathcal{H}^i(E^\bullet)[-i]$.

7. Niech $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ będzie funktorem dokładnym. Załóżmy, że oba funktory dołączone istnieją, $G \dashv F \dashv H$. Niech Ω będzie klasą rozpinającą dla $\mathcal{D}$. Załóżmy, że dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \Omega$ i dowolnego $i \in \mathbb{Z}$ homomorfizm
$$F \operatorname{Hom}(A, B[i]) \to \operatorname{Hom}(F(A), F(B)[i])$$
jest izomorfizmem. Pokaż, że F jest wierny i pełny.