Metody homologiczne, Wiosna 2019

Rozkłady półortogonalne, klejenie t-struktur

1. Niech $\mathcal{D} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle$ będą rozkładami półortogonalnymi na kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$. Niech i_A^* będzie lewo-sprzężony do funktora włożenia $i_{A*} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, a $i_C^!$ prawo-sprzężony to funktora włożenia $i_{C*} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Pokaż, że $i_A^* i_{C*} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ jest równoważnością. Jak wygląda jej odwrotność?

2. Przy oznaczeniach jak w poprzednim zadaniu pokaż, że przy równoważnośći $\mathcal{C} \simeq \mathcal{A}$ funktor $i_C^!$ jest lewo-sprzężony do $\mathcal{A} \to \mathcal{D}$.

3. Pokaż, że dla dowolnego recollement

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_1 \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{D}_2 \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex] \end{tikzcd}$$

kategoria $i_*\mathcal{D}_1$ jest podkategorią dopuszczalną. Znajdź jej dopełnienia półortogonalne. Pokaż, że dowolna podkategoria dopuszczalna zadaje recollement.

4. Pokaż, że dla dowolnego recollement, $\mathcal{D}_2 \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}_1$.

5. Rozpatrzmy recollement jak w zadaniu trzecim. Pokaż, że funktory $i^! j_!$ i $i^* j_*$ są izomorficzne z dokładnością do przesunięcia.

6. Rozpatrzmy recollement jak w zadaniu trzecim i t-struktury $(\mathcal{D}_1^{\leq 0}, \mathcal{D}_1^{\geq 1})$ na $\mathcal{D}_1$ oraz $(\mathcal{D}_2^{\leq 0}, \mathcal{D}_2^{\geq 0})$ na $\mathcal{D}_2$. Niech $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ będą sercami tych t-struktur, a $\mathcal{A}$ sercem sklejonej t-struktury na $\mathcal{D}$. Pokaż, że $\mathcal{A}$ ma pary torsyjne $\mathcal{A} = (i_*\mathcal{A}_1, \mathcal{F})$ oraz $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, i_*\mathcal{A}_1)$.

7. Przy oznaczeniach jak w poprzednim zadaniu opisz t-struktury na $\mathcal{D}$ otrzymane przez tilt klejonej t-struktury w parach torsyjnych $\mathcal{A} = (i_*\mathcal{A}_1, \mathcal{F})$ oraz $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, i_*\mathcal{A}_1)$.