Metody homologiczne, Wiosna 2019

Obiekty proste i projektywne w sklejonym sercu

Rozpatrujemy recollement

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_1 \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "i^!"'] \arrow[l, bend left, "i^*"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{D}_2 \arrow[l, bend right, "j_*"'] \arrow[l, bend left, "j_!"]
\end{tikzcd}$$

Oraz serca t-struktur $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{D}_1$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{D}_2$. Przez $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ oznaczamy serce sklejonej t-struktury:

$$\mathcal{D}^{\leq 0} = \{D \in \mathcal{D} \,|\, j^*(D) \in \mathcal{D}_2^{\leq 0}, i^*(D) \in \mathcal{D}_1^{\leq 0}\}$$
$$\mathcal{D}^{\geq 0} = \{D \in \mathcal{D} \,|\, j^*(D) \in \mathcal{D}_2^{\geq 0}, i^!(D) \in \mathcal{D}_1^{\geq 0}\}.$$

1. Pokaż, że $i_*\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ jest podkategorią Serre'a i że $i_*\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} \,|\, j^*(A) = 0\}$.

2. Pokaż, że dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ mamy następujące ciągi dokładne:

$$0 \to i_* {}^p i^! A \to A \to {}^p j_* j^* A \to i_* \mathcal{H}^1(i^! A) \to 0,$$
$$0 \to i_* \mathcal{H}^{-1}(i^* A) \to {}^p j_! j^* A \to A \to i_* {}^p i^* A \to 0.$$

3. Pokaż, że dla dowolnego $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ciągi

$$0 \to i_* {}^p i^! {}^p j_! A_2 \to {}^p j_! A_2 \to j_{!*} A_2 \to 0,$$
$$0 \to j_{!*} A_2 \to {}^p j_* A_2 \to i_* {}^p i^* {}^p j_* A_2 \to 0$$

   są dokładne.

4. Pokaż, że dla dowolnego $A_2 \in \mathcal{A}_2$ obiekt $j_{!*}A_2$ nie ma nietrywialnego podobiektu lub ilorazu w $i_*\mathcal{A}_1$.

5. Obiekt $S \in \mathcal{A}$ jest prosty, jeżeli nie ma nietrywialnych podobiektów. Pokaż, że obiekty proste $\mathcal{A}$ są postaci i_*S_1, $j_{!*}S_2$ dla $S_1 \in \mathcal{A}_1$, $S_2 \in \mathcal{A}_2$ prostych.

6. Załóżmy, że $\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, $\mathcal{D}_2 \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ i $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Niech $P \in \mathcal{A}$ będzie projektywny. Pokaż, że

   (i) Obiekt i^*P jest projektywny w $\mathcal{A}_1$,

(ii) Obiekt $j_! j^* P$ należy do $\mathcal{A}$ i P leży w kanonicznym krótkim ciągu dokładnym

$$0 \to j_! j^* P \to P \to i_* i^* P \to 0.$$

7. Przy założeniach jak w poprzednim zadaniu załóżmy, że j_* jest t-dokładny. Pokaż, że jeżeli $P \in \mathcal{A}$ jest projektywny, to $j^* P \in \mathcal{A}_2$ jest projektywny.

8. Rozpatrzmy recollement z $\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, $\mathcal{D}_2 \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ oraz t-dokładnym j_*. Opisz obiekty projektywne w $\mathcal{A}$.