Metody homologiczne, Wiosna 2019

Kategorie triangulowalne

1. Niech $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ będzie funktorem homologicznym z kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$ do kategorii abelowej $\mathcal{A}$. Niech

   $$S = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \mid H^i(f) \textit{ jest izomorfizmem dla każdego } i \in \mathbb{Z}\}.$$

   Pokaż, że S jest nasyconym systemem multiplikatywnym zgodnym ze strukturą triangulowalną.

2. Niech S będzie systemem multiplikatywnym w kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$ zgodnym ze strukturą triangulowalną. Niech $Q\colon \mathcal{D} \to S^{-1}\mathcal{D}$ będzie ilorazem. Na kategorii $S^{-1}\mathcal{D}$ zdefiniujmy funktor przesunięcia jako $Q(D)[1] = Q(D[1])$. Ponadto, niech $Q(A) \to Q(B) \to Q(C) \to Q(A)[1]$ będzie trójkątem wyróżnionym, jeżeli jest izomorficzny z obrazem trójkąta wyróżnionego w $\mathcal{D}$ przy funktorze Q. Sprawdź, że $S^{-1}\mathcal{D}$ z jest triangulowalna.

3. Niech $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ będzie pełną podkategorią triangulowalną kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$. Niech

   $$S = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \mid \text{stożek } f \in \mathcal{D}'\}.$$

   Pokaż, że $\mathcal{D}'$ jest nasyconą podkategorią wtedy i tylko wtedy gdy S jest nasyconym systemem multiplikatywnym.

4. Niech $\mathcal{E}$ będzie kategorią dokładną. Mówimy, że kompleks $\ldots \xrightarrow{d^{i-1}} E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \ldots$ jest *acykliczny*, jeżeli istnieją konflacje $K^i \xrightarrow{a^i} E^i \xrightarrow{p^i} K^{i+1}$ takie, że $d^i = a^{i+1} \circ p^i$. Mówimy, że $\mathcal{E}$ ma rozszczepialne idempotenty (idempotent split), jeżeli dla dowolnego $E \in \mathcal{E}$ i $e\colon E \to E$ takiego, że $e^2 = e$, istnieje inflacja $\ker e \to E$.

   Pokaż, że dla $\mathcal{E}$ następujące warunki są równoważne:

   (a) Każdy kompleks homotopijnie równoważny z zerem jest acykliczny.

   (b) $\mathcal{E}$ ma rozszczepialne idempotenty.

5. Niech $P^\bullet$, $A^\bullet$ będzą ogranicznonym z góry kompleksami obiektów pewnej kategorii dokładnej $\mathcal{E}$. Ponadto załóżmy, że wyrazy $P^\bullet$ są obiektami projektywnymi w $\mathcal{E}$, a $A^\bullet$ jest acykliczny. Pokaż, że $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{E})}(P^\bullet, A^\bullet) = 0$.

6. Niech $\mathcal{B}$ będzie nasyconą pełną podkategorią triangulowalną kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$. Niech $E \in \mathcal{D}$ będzie taki, że $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, B) = 0$, dla wszyskich $B \in \mathcal{B}$. Pokaż, że wtedy $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(E, F)$, dla dowolnego $F \in \mathcal{D}$.

   Wywnioskuj, że jeżeli $\mathcal{A}$ jest kategorią abelową z wystarczająco wieloma obiektami projektywnymi, to $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ jest równoważna z kategorią homotopii ograniczonych z góry kompleksów obiektów projektywnych w $\mathcal{A}$.

   Ogólnie, mówimy, że kompleks $E^\bullet \mathcal{H}(\mathcal{A})$ jest h-projektywny, jeżeli $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(E^\bullet, A^\bullet) = 0$, dla każdego $A^\bullet \in \mathrm{Ac}(\mathcal{A})$. Jeżeli $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ ma wystarczająco wiele obiektów h-projektywnych (tzn. każdy obiekt z $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ jest quasi-izomorficzny z kompleksem h-projektywnym), to $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ jest równoważna z kategorią homotopii kompleksów h-projektywnych.