Metody homologiczne, Wiosna 2019

Kategorie stabline

1. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią addytywną a $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ kategorią kompleksów nad $\mathcal{A}$. Pokaż, że $\mathcal{A}$ a konflacjami $A^\bullet \xrightarrow{\iota^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C$ takimi, że dla każdego n $A^n \xrightarrow{\iota^n} B^n \xrightarrow{p^n} C^n$ jest rozszczepialnym krótkim ciągiem dokładnym, jest kategorią dokładną.

2. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią addytywną, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ kategorią kompleksów nad $\mathcal{A}$, a $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ kategorią stabilną $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dla $A^\bullet \in \mathcal{A}(\mathcal{A})$ opisz kompleks $S(A^\bullet)$.

3. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią addytywną, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ kategorią kompleksów nad $\mathcal{A}$, a $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ kategorią stabilną $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Opisz stożek odwzorowania kompleksów $f^\bullet\colon A^\bullet \to B^\bullet$, to znaczy taki kompleks $C_f^\bullet$, że $A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \to C_f^\bullet \to S(A^\bullet)$ jest trójkątem wyróżnionym.

4. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią addytywną, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ kategorią kompleksów nad $\mathcal{A}$, a $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ kategorią stabilną $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Pokaż, że morfizmy w $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ to klasy homotopii morfizmów w $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

5. Niech $\mathcal{E}$ będzie kategorią dokładną, w której klasa obiektów projektywnych jest klasą obiektów injektywnych. Pokaż, że kategoria stabilna $\underline{\mathcal{E}}$ jest triangulowalna.

6. Niech A będzie k-algebrą a mod-A kategorią skończenie wymiarowych prawych modułów nad A. Niech $\underline{\text{mod-}}A$ będzie kategorią stabilną mod-A, czyli morfizmy w $\underline{\text{mod-}}A$ to morfizmy w mod-A modulo morfizmy, które faktoryzują się przez obiekt projektywny. Pokaż, że dwa moduły $M, N \in$ mod-A są izomorficzne w $\underline{\text{mod-}}A$ wtedy i tylko wtedy gdy są projektywnie równoważne, tzn. gdy istnieją moduły projektywne P i Q takie, że $P \oplus M \simeq Q \oplus N$.

7. Rozpatrzmy algebrę dróg kołczanu

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] & \bullet \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

z relacjami $\beta^2 = 0 = \beta\alpha$. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią modułów nad tym kołczanem. Opisz funktor S zdefiniowany jako kojądro monomorfizmu do obiektu injektywnego oraz funktor Ω zdefiniowany jako jądro epimorfizmu z obiektu projektywnego, na odpowiednich kategoriach stabilnych.

8. Niech A będzie algebrą dróg kołczanu

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Opisz stabilną kategorię kategorii prawych modułów nad A.

9. Niech A będzie algebrą dróg kołczanu

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

z relacją $\beta\alpha = 0$. Opisz stabilną kategorię kategorii prawych modułów nad A.

10. Niech A będzie algebrą dróg kołczanu

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

z relacjami $\alpha\beta = 0$, $\beta\alpha = 0$. Opisz stabilną kategorię kategorii prawych modułów nad A.