Metody homologiczne, Wiosna 2019

Kategorie i funktory. Kategorie abelowe

1. Pokaż, że funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy gdy jest właściwie surjektywny, wierny i pełny.

2. Podaj własność uniwersalną produktu włóknistego.

3. Zdefiniuj koprodukt włóknisty jako koprodukt w pewnej kategorii.

4. Pokaż, że $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ zadają $F \dashv G$ wtedy i tylko wtedy gdy złożenia $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$, $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ są identycznościowe.

5. Niech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ będą kategoriami abelowymi. Pokaż, że funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy gdy przekształca krótke ciągi dokładne na krótkie ciągi dokładne.

6. Niech S będzie lewym systemem muliplikatywnym w kategorii $\mathcal{C}$ a (g_i) skończoną rodziną morfizmów $X_i \to Y$ w $S^{-1}\mathcal{C}$. Pokaż, że istnieją $s\colon Y \to Y'$ w S oraz $f_i\colon X_i \to Y'$ w $\mathcal{C}$ takie, że $g_i \sim (f_i, s)$ dla wszystkich i.

7. Niech $0 \to A_1 \xrightarrow{i} A_2 \to A_3 \to 0$ będzie krótkim ciągiem dokładnym w kategorii abelowej $\mathcal{A}$ i niech $\varphi\colon B_3 \to A_3$ będzie dowolnym morfizmem. Połóżmy $Q = A_2 \times_{A_3} B_3$ i niech $\alpha\colon A_1 \to Q$ będzie zadana przez $i\colon A_1 \to A_2$ i $0\colon A_1 \to B_3$. Pokaż, że $0 \to A_1 \xrightarrow{\alpha} Q \to B_3 \to 0$ jest krótkim ciągiem dokładanym.

8. Niech $0 \to A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{d} A_3 \to 0$ będzie krótkim ciągiem dokładnym w kategorii abelowej $\mathcal{A}$ i niech $\psi\colon A_1 \to B_1$ będzie dowolnym morfizmem. Połóżmy $B_2 = B_1 \cup_{A_1} A_2$ i niech $\theta\colon B_2 \to A_3$ będzie zadana przez $d\colon A_2 \to A_3$, $0\colon B_1 \to A_3$. Pokaż, że $0 \to B_1 \to B_2 \xrightarrow{\theta} A_3 \to 0$ jest krótkim ciągiem dokładanym.

9. Krótki ciąg dokładny $0 \to A_1 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{d} A_2 \to 0$ zadaje trywialny element w $\mathrm{Ext}^1(A_2, A_1)$ jeżeli istnieje $\tau\colon A \to A_1$ takie, że $\tau \circ i = \mathrm{Id}$.

10. Krótki ciąg dokładny $0 \to A_1 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{d} A_2 \to 0$ zadaje trywialny element w $\mathrm{Ext}^1(A_2, A_1)$ jeżeli istnieje $\sigma\colon A_2 \to A$ taka, że $d \circ \sigma = \mathrm{Id}$.

11. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią abelową i $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ pełną podkategorią zamkniętą na rozszerzenia, tzn taką, że jeżeli w krótkim ciągu dokładnym $0 \to E_1 \to A \to E_2 \to 0$ obiekty E_1 i E_2 leżą w $\mathcal{E}$ to $A \in \mathcal{E}$. Pokaż, że kategoria $\mathcal{E}$ z klasą krótkich ciągów dokładanych w $\mathcal{A}$, których wszystkie elementy leżą w $\mathcal{E}$ jest dokładana.

12. Niech $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ będą kategoriami abelowymi. Pokaż, że funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ który posiada prawy dołączony jest prawo-dokładny.

13. Niech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ będą morfizmami w kategorii abelowej. Pokaż, że ciągi

$$0 \to \ker(f) \to \ker(gf) \to \ker(g),$$
$$\operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(gf) \to \operatorname{coker}(g) \to 0$$

są dokładne.

14. Niech A będzie skończenie wymiarową k-algebrą. Dowolny nierozkładalny projektywny A moduł jest składnikiem prostym A rozważanym jako moduł nad samym sobą. Załóżmy, że A jest algebrą dróg kołczanu z relacjami. Opisać projektywne lewe i prawe A-moduły.

15. Rozpatrzmy kołczan

$$1 \underset{z}{\overset{x}{\rightleftarrows}} 2 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} 3$$

z relacjami

$$ab = 0, \qquad xz = 0, \qquad bax = 0.$$

Znaleźć rezolwenty projektywne modułów lewych modułów prostych S_1, S_2, S_3 nad algebrą dróg tego kołczanu. Policzyć $\operatorname{Ext}^1(S_i, S_j)$ i $\operatorname{Ext}^2(S_i, S_j)$.

16. Znaleźć rezolwentę projektywną $k[x_1, \ldots, x_n]/(x_1, \ldots, x_n)$ jako modułu nad $k[x_1, \ldots, x_]$.

17. Mówimy, że algbra A jest samo-injektywna (self-injective), jeżeli A rozważana jako lewy moduł na A jest injektywna. Pokazać, że $k[x]/x^2$ jest samo-injektywna. Pokazć, że jeżeli A jest samo-injektywna, to dowolny A-moduł, który nie jest projektywy, ma nieskończoną rezolwentę projektywną.

18. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią addytywną. Pokazać, że kategoria presnopów $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$ na $\mathcal{A}$, to znaczy funktorów $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$, gdzie $\mathcal{A}b$ oznacza kategorię grup abelowych, jest abelowa.

19. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią addytywną. Mówimy, że funktor $\varphi\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ ma skończoną prezentację, jeżeli istnieją obiekty $A, B \in \mathcal{A}$ oraz ciąg dokładny $\mathrm{Hom}(-, A) \to \mathrm{Hom}(-, B) \to \varphi \to 0$ w $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$. Pełną podkategorię $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$, której obiektami są funktory o skończonej prezentacji oznaczamy $\mathrm{fp}(\mathcal{A})$. Mówimy, że $\mathcal{A}$ ma słabe jądra, jeżeli dla dowolnego morfizmu $f\colon C \to D$ w $\mathcal{A}$ istnieje $g\colon E \to C$ taki, że $f \circ g = 0$ oraz dla dowolnego $h\colon F \to C$ takiego, że $f \circ h = 0$ istnieje $h'\colon F \to E$ takie, że $g \circ h' = h$. Pokazać, że kategoria $\mathcal{A}$ ma słabe jądra wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{fp}(\mathcal{A}b)$ jest abelowa.

20. Niech $\mathcal{X}$ będzie podkategorią Serre'a kategorii $\mathcal{A}$. Pokaż, że obiekt $A \in \mathcal{A}$ jest $\mathcal{X}$-domknięty jeżeli dla dowolnego $f\colon B \to C$, którego jądro i kojądro leżą w $\mathcal{X}$, złożenie z f zadaje izomorfizm $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(B, A)$.

21. Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią abelową, a $F\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ funcktorem kontrawariantnym. Zdefiniujmy funktor R^0F jako granicę

$$R^0F(A) = \varinjlim_{\mathbb{S}_A} F(S)$$

gdzie $\mathbb{S}_A$ jest zbiorem krótkich ciągów dokładnych $0 \to M \xrightarrow{\nu} N \to A \to 0$ z częściowym porządkiem $S \preceq S'$ jeśli istnieje diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ M \arrow[r] & N \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

Definiujemy $F(S) := \ker F(\nu)$. Pokaż, że funktor R^0F jest lewo-dokładny i $F \mapsto R^0F$ jest lewo dołączony do włożenia funktorów lewo-dokładnych $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ w kategorię $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$.

22. Korzystając z poprzedniego zadania pokaż, że kategoria $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$ funktorów lewo-dokładnych $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ jest abelowa.

22* Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią abelową (dokładną). Funktor $F\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ jest wymazywalny (effaceable) jeżeli dla dowolnej pary $(A \in \mathcal{A}, f \in F(A))$ istnieje epimorfizm $d\colon A' \to A$ taki, że $F(d)(f) = 0$.

- Pokaż, że podkategoria Eff funktorów wymazywalnych jest podkategorią Serre'a w $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$.
- Pokaż, że funktory lewo-dokładne stanowią podkategorię objektów Eff-domkniętych
- Pokaż, że Eff jest kategorią lokalizującą (wykaż, że dla dowolnego F morfizm $F \to R^0F$ ma jądro i kojądro w Eff).
- Wywnioskuj, że $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)/\mathrm{Eff} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$.