Metody homologiczne, Wiosna 2019

Funktory Fourier-Mukai

Niech X, Y będą schematami nad ciałem k. Obiekt

$$F^\bullet \in \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X \times Y))$$

definiuje *funktor (transformację) Fourier-Mukai*

$$\Phi_{F^\bullet}\colon \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(Y)), \quad \Phi_{F^\bullet}(-) = Rp_*(F^\bullet \otimes^L Lq^*(-)),$$

gdzie $p\colon X \times Y \to Y$, $q\colon X \times Y \to X$ są rzutowaniami (przyjmijmy, że wiemy, że funktory Rp_*, Lq^* i $\otimes^L$ są zdefiniowane na nieograniczonych kategoriach pochodnych; wynika to z twierdzenia Spaltensteina o istnieniu h-injektywnych i h-płaskich rezolwent).

Mówimy, że $F^\bullet$ jest *jądrem* funktora $\Phi_{F^\bullet}$.

1. Niech $f\colon X \to Y$ będzie morfizmem schematów. Pokaż, że funktor $Rf_*\colon \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(Y))$ jest funktorem Fourier-Mukai, tzn. istnieje $F^\bullet$ taki, że $Rf_* \simeq \Phi_{F^\bullet}$.

2. Niech $f\colon X \to Y$ będzie morfizmem schematów. Pokaż, że funktor $Lf^*\colon \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(Y)) \to \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X))$ jest funktorem Fourier-Mukai.

3. Niech $F^\bullet \in \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X \times Y))$, $G^\bullet \in \mathcal{D}(Y \times Z)$. Opisz obiekt $E^\bullet \in \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X \times Z))$ taki, że $\Phi_{G^\bullet} \circ \Phi_{F^\bullet} \simeq \Phi_{E^\bullet}$.

4. Załóżmy, że X i Y są gładkimi rozmaitościami rzutowymi. Pokaż, że dla dowolnego $F^\bullet \in \mathcal{D}^b(X \times Y)$ funktor $\Phi_{F^\bullet}|_{\mathcal{D}^b(X)}\colon \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(Y)$ ma prawy i lewy sprzężony. Pokaż, że są to obcięcia funktorów Fourier-Mukai zadanych przez $F^{\bullet\vee} \otimes p^*\omega_Y[\dim Y]$ oraz $F^{\bullet\vee} \otimes q^*\omega_X[\dim X]$.

5. Niech $\Phi_{F^\bullet}\colon \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(Y))$ będzie funktorem Fourier-Mukai. Pokaż, że dla $f\colon Y \to Z$ złożenie $Rf_* \circ \Phi_{F^\bullet}$ jest funktorem Fourier-Mukai z jądrem $R(\mathrm{Id}_X \times f)_*F^\bullet$.

6. Niech $\Phi_{F^\bullet}\colon \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}(Y))$ będzie funktorem Fourier-Mukai. Pokaż, że dla $g\colon W \to X$ złożenie $\Phi_{F^\bullet} \circ Rg_*$ jest funktorem Fourier-Mukai z jądrem $L(g \times \mathrm{Id}_Y)^*F^\bullet$.