Funktory Fourier-Mukai, Wiosna 2021

Kategorie triangulowalne

Poniższe zadania zakładają znajomość definicji kategorii triangulowalnej, kategorii pochodnej kategorii abelowej. Jednym z wielu źródeł, gdzie mogą Pańswto znaleźć definicje, są notatki z mojego wykładu o metodach homologicznych `https://www.mimuw.edu.pl/~bodzenta/pdf/metody_homologiczne_not_190612.pdf`.

W notakach kategoria pochodna była definiowana w dwóch krokach.

Początkowo, dla dowolnej kategorii addytywnej $\mathcal{A}$, kategoria $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ homotopii kompleksów obiektów w $\mathcal{A}$ miała strukturę kategorii triangulowalnej jako *kategoria stabilna* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Kategoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ kompleksów obiektów w $\mathcal{A}$ ma naturalną strukturę *kategorii Frobeniusa*, czyli *kategorii dokładnej* z wystarczająco wieloma obiektami projektywnymi, injektywnymi oraz takiej, w której klasy obiektów projektywnych i injektywnych są tożsame.

Następnie, zdefiniowaliśmy $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ jako iloraz $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ przez nasycony system multiplikatywny zgodny ze strukturą triangulowalną.

Lewy system multiplikatywny w kategorii addytywnej $\mathcal{C}$ to zbiór morfizmów S w $\mathcal{C}$ taki, że

(MS 1) Dla każdego obiektu $C \in \mathcal{C}$ morfizm identycznościowy Id_C należy do S. Dla morfizmów $f\colon C_1 \to C_2$, $g\colon C_2 \to C_3$ takich, że $f, g \in S$, ich złożenie $g \circ f\colon C_1 \to C_3$ należy do S.

(MS 2) Dowolne morfizmy $t\colon X \to Z$, $g\colon X \to Y$ z $t \in S$ mogą być uzupełnione do przemiennego diagramu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & Y \arrow[d, "s"] \\ Z \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

z $s \in S$.

(MS 3) Dla każdej pary morfizmów $f, g\colon X \to Y$ takich, że $(f - g) \circ t = 0$, dla pewnego $t \in S$ istnieje $s \in S$ taki, że $s \circ (f - g) = 0$.

Prawy system multiplikatywny w $\mathcal{C}$ to lewy system multiplikatywny w $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. *System multiplikatywny* to prawy i lewy system multiplikatywny.

System multiplikatywny jest *nasycony*, jeżeli dla morfizmów $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ w $\mathcal{C}$ z faktu, że hg i gf należą do S wynika, że g należy do S.

Jeżeli $\mathcal{C}$ jest kategorią triangulowalną z funktorem przesunięcia [1], to system multiplikatywny S jest *zgodny ze strukturą triangulowalną* jeżeli

(MS 4) dla każdego $s \in S$, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, morfizm $s[n]$ należy do S.

(MS 5) dowolny przemienny diagram

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \\ A \arrow[r] \arrow[u, "s_A"] & B \arrow[r] \arrow[u, "s_B"'] & C \arrow[r] & A[1] \arrow[u, "s_A[1]"] \end{tikzcd}$$

z rzędami będącymi trójkątami wyróżnionymi i $s_A, s_B \in S$ można uzupełnić do morfizmu trójkątów, czyli przemiennego diagramu

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \\ A \arrow[r] \arrow[u, "s_A"] & B \arrow[r] \arrow[u, "s_B"'] & C \arrow[r] \arrow[u, "s_C"] & A[1] \arrow[u, "s_A[1]"] \end{tikzcd}$$

morfizmem $s_C \in S$.

Zadania

1. Niech $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ będzie pełną triangulowalną podkategorią kategorii triangulowalnej. Zdefiniujmy

$$S = \{f \in \mathrm{Mor}\mathcal{D} \,|\, \text{stożek } f \in \mathcal{C}\}.$$

Pokaż, że S jest systemem multiplikatywnym w $\mathcal{D}$ zgodym ze strukturą triangulowalną.

2. Niech $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ będzie pełną podkategorią triangulowalną kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$. Niech

$$S = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \,|\, \text{stożek } f \in \mathcal{C}\}.$$

Pokaż, że $\mathcal{C}$ jest nasyconą podkategorią (to znaczy z faktu, że $D_1 \oplus D_2$ jest izomorficzne z obiektem $\mathcal{C}$ wynika, że D_1 i D_2 są) wtedy i tylko wtedy gdy S jest nasyconym systemem multiplikatywnym.

3. Niech $\mathcal{A}$ będzie dziedziczną (hereditary) kategorią abelową, to znaczy $\operatorname{Ext}^i(A_1, A_2) = 0$ dla $i \geq 2$ i dowolnych obiektów $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Pokaż, że dowolny obiekt $A^\bullet$ w ograniczonej kategorii pochodnej $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ jest izomorficzny z sumą prostą swoich kohomologii, $A^\bullet \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(A)[-i]$.

4. Niech $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ będzie funktorem kohomologicznym z kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$ do kategorii abelowej $\mathcal{A}$, czyli załóżmy, że H przeprowadza trójkąty wyróżnione w $\mathcal{D}$ na długie ciągi dokładne w $\mathcal{A}$. Niech

   $$S = \{f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{D}) \,|\, H^i(f) \textit{ jest izomorfizmem dla każdego } i \in \mathbb{Z}\}.$$

   Pokaż, że S jest nasyconym systemem multiplikatywnym zgodnym ze strukturą triangulowalną.

5. Niech $\mathcal{C}$ będzie nasyconą pełną podkategorią triangulowalną kategorii triangulowalnej $\mathcal{D}$. Kategoria ilorazowa $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ to z definicji kategoria $S^{-1}\mathcal{D}$, dla nasyconego systemu multiplikatywnego jak w zadaniu 1.

   Niech $E \in \mathcal{D}$ będzie taki, że $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(E, C) = 0$, dla wszyskich $C \in \mathcal{C}$. Pokaż, że wtedy $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(E, F)$, dla dowolnego $F \in \mathcal{D}$.

6. Niech grupa $G = \mathbb{Z}_n$ działa na pierścieniu wielomianów $R = k[x, y]$ z wagami $(1, -1)$, to znaczy, dla generatora $\sigma \in G$ i pierwotnego pierwiastka z jedynki ε stopnia n, $\sigma \cdot x = \varepsilon x$, $\sigma \cdot y = \varepsilon^{-1} y$. Działanie G jest multiplikatywne, to znaczy $\sigma \cdot (f(x, y)g(x, y)) = (\sigma \cdot f(x, y))(\sigma \cdot g(x, y))$.

   Zdefiniujmy
   $$R^i = \{f \in R \,|\, \sigma \cdot f = \varepsilon^i f\}.$$

   (a) Pokaż, że R^0 jest pierścieniem, a $R^1, \ldots, R^{n-1}$ mają naturalną strukturę modułów nad R^0.

   (b) dla wybranego $n \geq 3$ pokaż, że pełna podkateria $CM(R^0)$ kategori mod–R^0 której obiektami są sumy proste $R^0, \ldots, R^i$, jest zamknięta na rozszerzenia, ma więc struktrę kategorii dokładnej indukowaną z mod–R^0.

   (c) Pokaż, że kategoria $CM(R^0)$ jest kategorią Frobeniusa. Opisz strukturę triangulowalną kategorii stabilnej, poprzez wypisanie trójkątów wyróżnionych $M' \to M \to M'' \to M'[1]$, dla których M' i M'' są nierozkładalne.

(d) Co z powyższych punktów pozostanie prawdą, jeżeli G będzie działać na R z wagami $(1, a)$, dla pewnego $a < n$, $(a, n) = 1$?