Geometria z algebrą liniową, jesień 2019

Układy równań liniowych.

1. Kiedy układ równań liniowych

$$\begin{cases} ax + by = v \\ cx + dy = w \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

2. Kiedy układ równań liniowych

$$\begin{cases} ax + by + cz = u \\ dx + ey + fz = v \\ gx + hy + jz = w \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

3* Kiedy układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

4 Wyznacz zredukowaną postać schodkową macierzy

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & t \\ 2 & 3 & t & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

5 Znajdź rozwiązanie układu równań liniowych

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 3 & 4 & -9 & 9 \\ 5 & 2 & -8 & 8 \\ 8 & 7 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

6 Wyznacz rozwiązania układów równań liniowych

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2b \\ 1 & a & 1 & 2b \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & c & c \end{array}\right)$$

7 Rozwiąż układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -9x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & - & gx_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

8 Wykaż, że następujące układy równań mają jednoznaczne rozwiązanie modulo dowolna liczba pierwsza, z wyjątkiem skończonej ich liczby. Dla tych liczb pierwszych znajdź rozwiązanie

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

9 Znajdź układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego wszystkie rozwiązania są postaci $(-2t+3, -t+2, t+1, 2t)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

10 Niech U będzie układem trzech równań liniowych (nad $\mathbb{R}$) o czterech niewiadomych. Załóżmy, że układ równań V powstaje z U przez zastąpnienie każdego równania w U sumą dwóch pozostałych. Zbadaj, czy układy równań U i V są zawsze równoważne.

11 Niech $n \geq 2$. Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $V \subset \mathbb{R}^n$ są zbiorami rozwiązań układów równań liniowych

$$u_1 + \ldots + u_n = 0 \qquad \text{oraz} \qquad v_1 = v_2 = \ldots = v_n.$$

Pokaż, że dowolny wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $x = u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$, gdzie $u \in U$, $v \in V$.

12 Załóżmy, że układ równań liniowych o współczynnikach całkowitych ma dla każdej pierwszej liczby p dokładnie jedno rozwiązanie nad $\mathbb{Z}_p$. Czy ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?

13 Wykazać, że istnieje piątka punktów $p_1, \ldots, p_5 \in \mathbb{R}^2$, przez które przechodzi dokładnie jedna stożkowa (tzn. krzywa o równaniu $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$). Własność tę oznaczamy przez $(*)$.

14 Dla piątki punktów o powyższej własności $(*)$ wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że jeśli piątka punktów $q_1, \ldots, q_5$ spełnia $|p_i - q_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, \ldots, 5$, to też ma własność $(*)$.

15 Jednorodny układ m równań, n zmiennych jest zadany przez macierz $A = \{a_{ij}\}$. Załóżmy, że nie można żadnego równania pominąć. Niech ${}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})$ dla $i = 1, \ldots, n-m$ będzie zbiorem rozwiązań rozpinającym wszystkie rozwiązania. Rozważmy układ $n - m$ równań, n zmiennych zadany przez macierz $B = \{b_{ji}\}$. Sprawdź, że wiersze macierzy A spełniają równania zadane przez C. Ponadto, każde inne rozwiązanie da się otrzymać przez elementarne operacje na wierszach A.

16 Podaj warunek na to, by cztery płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ zadane równaniami $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ (dla $i = 1, \ldots, 4$) zawierały wspólną prostą.

17 Podaj warunek na to by cztery punkty $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ leżały na jednym okręgu.

18 Wykaż, że jeśli okrąg na płaszczyźnie przechodzi przez 3 punkty o współrzędnych wymiernych, to współrzędne jego środka oraz kwadrat promienia są liczbami wymiernymi.

Ciała.

Niech K będzie ciałem. Najmniejszą liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$, dla której $1 + 1 + \ldots + 1 = 0$ *(n razy) nazywamy charakterystyką ciała. Jeżeli taka liczba nie istnieje, to mówimy, że ciało K jest charakterystyki zero.*

1. Pokazać, że charakterystyka ciała jest zerem lub liczbą pierwszą.

2. Pokazać, że ciało charakterystki p, $p > 0$ zawiera ciało $\mathbb{Z}_p$, a ciało charakterystki 0 ciało liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

3. Określić działanie dodawania i mnożenia w zbiorze czteroelemenetowym tak, by otrzymać ciało.

4. Pokazać, że w ciele $\mathbb{Z}_p$, dla każdego elementu $c \in \mathbb{Z}_p$ istnieją a i b, dla których $a^2 + b^2 = c$.

5. Niech K będzie ciałem charakterystki $p > 0$. Pokazać, że jeżeli dla $a, b \in K$, $a^p = b^p$, to $a = b$.

6. Pokazać, że jeżeli K jest ciałem skończonym charakterystki p, to przekształcenie $a \mapsto a^p$ jest automorfizmem ciała (automorfizm Frobeniusa).

7. Pokazać, że jeżeli $\varphi\colon K \to L$ jest homomorfizmem ciał, to $\{x \in K \mid \varphi(x) = 1\} \cup \{0\}$ jest podciałem.

8. Dla jakich $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ są izomorficzne?

9. Znaleźć wszystkie wielomiany f o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_5$, dla których $f(0) = f(1) = f(4) = 1$, $f(2) = f(3) = 3$.

10. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

    (a) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$

    (b) $z^2 - 4z + 13 = 0$

    (c) $\frac{1}{z} = \frac{1-z}{1}$

    (d) $z^4 = (1-i)^4$

11. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór punktów spełniających warunek

    (a) $\mathrm{Re}(iz + 2) > 0$

    (b) $\mathrm{Im}\frac{1+iz}{1-iz} = 1$

    (c) $|\frac{z-2i}{z+1}| = 1$

    (d) $\mathrm{Im}(iz^4 + 2) \geq 0$

    (e) $\begin{cases} 1 \leq |z+1| \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi. \end{cases}$

    (f) $|z + \frac{1}{z}| = 2.$

12. Obliczyć

(a) $(\frac{1+i}{1-i})^{33} - (1-i)^{1}0 + \frac{1}{i}$

(b) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{30}$.

13. Obliczyć $E_n = 1 + i + i^2 + \ldots + i^n$ dla $n \geq 1$.

14. Przedstawić w formie trygonometrycznej

    (a) $(i+1)(i-2)$

    (b) $\frac{1}{1+i}$

    (c) $2 + i \sin \frac{\pi}{2}$

    (d) $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

    (e) $-2 + 2\sqrt{3}i$

15. Niech $z = \cos\theta + i \sin\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Znaleźć argument liczby

    (a) $z^2 + z$

    (b) $z^2 - z$

    (c) $z + \overline{z}$

16. Obliczyć $z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}$ wiedząc, że $z + \frac{1}{z} = 1$.

17. Obliczyć

    (a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} \ldots$

    (b) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} \ldots$

18. Korzystając ze wzorów de Moivre'a pokazać, że

    (a) $\sin 4\theta = 8\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta$

    (b) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

    (c) $\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

    (d) $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Przestrzenie wektorowe.

1. Niech S będzie zbiorem, a k ciałem. Niech $V = \{f\colon S \to k\}$. Pokaż, że V jest przestrzenią liniową nad k. Które z podzbiorów są podprzestrzeniami V?
   (a) $\{f \mid f(s_0) = 0\}$, gdzie $s_0 \in S$ pewien element.
   (b) $\{f \mid f(s_0) = 1\}$, gdzie $s_1 \in S$ pewien element.
   (c) $\{f \mid \forall s \in S'\, f(s) = 0\}$, gdzie $S' \subset S$ jest podzbiorem.
   (d) $\{f \mid \exists s \in S'\, f(s) = 0\}$, gdzie $S' \subset S$ jest podzbiorem.
   (e) $S = \mathbb{R}$, $k = \mathbb{R}$ lub $k = \mathbb{C}$ i $\{f \mid f(x) \to 0$ przy $|x| \to \infty\}$.
   (f) $S = \mathbb{R}$, $k = \mathbb{R}$ lub $k = \mathbb{C}$ i $\{f \mid f(x) \to 1$ przy $|x| \to \infty\}$.

2. Rozpatrujemy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Czy podzbiór $\mathbb{R}$ złożony z liczb postaci $a + b\pi$, $a, b \in \mathbb{Q}$ jest podprzestrzenią liniową? Czy podzbiór ten jest podciałem?

3. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym charakterystyki p. Pokaż, że istnieje $r \in \mathbb{N}$ takie, że $|\mathbb{F}| = p^r$.

4. W przestrzeni linowej funkcji $\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ wykaż liniową niezależność wektorów:
   (a) 1, $\sin x$, $\cos x$.
   (b) $x, x^2, \ldots, x^k$.
   (c) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin kx$.

5. Dane są wektory $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 3, 5, 0)$ w $\mathbb{R}^4$.
   (a) Sprawdź, czy układ α_1, α_2, α_3 jest liniowo niezależny.
   (b) Uzupełnij go do bazy $\mathbb{R}^4$.

6. Niech $V = \mathbb{C}^4$. Czy wektor $(1, i, 2i, 0) \in \mathrm{lin}\{(1, 1, i, 0), (0, i, 1, 0)\}$?

7. Znaleźć współczynniki wielomianu $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ w bazie przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 5: 1, $t + 1$, $t^2 + 1$, $t^3 + 1$, $t^4 + 1$, $t^5 + 1$.

8. Znaleźć bazy podprzestrzeni liniowych $\mathbb{R}^5$ opisanych przez równania

   (a)
   $$x + y + z + t + s = 0.$$

   (b)
   $$\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0, \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0, \\ x - 8y + 5z - 9s + t = 0. \end{cases}$$

9. Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:

   (a) $f(1) = f(2) = 0$,
   (b) $f^{(3)}(7) = 0$ (trzecia pochodna).

10. Niech K^∞ oznacza przestrzeń liniową ciągów o elementach z ciała K. Które z podanych zbiorów wektorów tworzą podprzestrzeń w K^∞?

   (a) ciagi, które są okresowe od pewnego miejsca (zależnego od ciągu).
   (b) ciągi, które mają skończoną liczbę elementów różnych od zera i suma sześcianów wszystkich elementów jest równa 0.
   (c) ciągi ograniczone dla $K = \mathbb{R}$.
   (d) ciągi, których wszystkie elementy są różne od 1.

Baza przestrzeni liniowej

1. Podać bazę podprzestrzeni k^{2n} opisanej $n + 1$ równaniami:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \\ &x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} = 0, \\ &\vdots \\ &x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n} = 0. \end{aligned}$$

2. Wykazać, że jeśli charakterystyka ciała jest różna od 2, to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ zachodzi $\mathrm{lin}(v + w, v - w) = \mathrm{lin}(v, w)$.

3. Rozważmy wektory $v_1 = (0,1,0,1,0)$, $v_2 = (7,4,1,8,3)$, $v_3 = (0,3,0,4,0)$, $v_4 = (1,9,5,7,1)$, $v_5 = (0,1,0,5,0)$ w przestrzeni $\mathbb{Q}^5$. Czy istnieją liczby wymierne $a_{ij} \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i, j \leq 5$, dla których podzbiór $\{\sum_{j=1}^{5} a_{ij} v_j \mid 1 \leq i \leq 5\}$ jest liniowo niezależny?

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ dane są wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Pokazać, że jeżeli $m \geq n+2$, to istnieją liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ nie wszystkie równe zero, takie że $\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$.

5. Niech $\alpha_1 = (1,3,1)$, $\alpha_2 = (2,2,1)$ i $\beta = (-3,0,1)$.

   (a) Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor β ma w tej bazie współrzędne $2, -3, 1$.

   (b) to samo, gdy $\beta = (3,5,2)$.

6. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K, zaś $W \subset V$ jej podprzestrzenią k-wymiarową. Pokazać, że dla dowolnych $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$, $m > n-k$ istnieje wektor $\beta \in W \setminus \{0\}$, który jest kombinacją liniową $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$.

7. Niech V będzie przestrzenią n wymiarową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ będzie układem liniowo niezależnym. Niech $a_1, \ldots, a_n \in K$ i niech $\beta \in V$. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by istniał wektor α_n taki by $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ było bazą V a $(a_1, \ldots, a_n)$ ciągiem współrzędnych wektora β w tej bazie. Zbadać jednoznaczność rozwiązania.

8. Dane są wektory $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\beta_1 = (1,-1,1)$, $\beta_2 = (4,1,2)$. Opisać równaniami i podać bazę $\mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2) \cap \mathrm{lin}(\beta_1, \beta_2)$.

9. Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$. Znaleźć równanie przestrzeni rozpiętej przez W i wektor $(1,1,1,2)$.

10. Niech K będzie ciałem. Dla dowolnego $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \setminus \{0\}$ definiujemy $p(\alpha) := i$ gdy $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$ i $x_i \neq 0$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni K^n. Udowodnić, że istnieje baza $\beta_1, \ldots, \beta_n$ taka, że dla każdego $1 \leq i \leq n$ $\beta_i \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ oraz liczby $p(\beta_1), \ldots, p(\beta_n)$ są parami różne.

11. Niech V będzie przestrzenią liniową taką, że $\dim V \geq n \geq 1$. Pokazać, że istnieje układ $n+1$ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ liniowo zależnych, takich że każde n wektorów tego układu jest liniowo niezależnych.

12. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jej bazą. Dla każdego n niech $V_n = \mathrm{lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

    (a) Pokazać, że dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje n, takie że $W \subset V_n$.

    (b) Podać przykład takiej podprzestrzeni $W \subset V$, że $W \neq V$ i dla każdego $\alpha \in V \setminus W$ zachodzi $\{a\alpha + \beta \,|\, a \in K, \beta \in W\} = V$.

13. Ile jest baz przestrzeni $V = (\mathbb{Z}_p)^n$?

14. Niech W_1, W_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniamu przestrzeni V. Wykazać, że

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

15. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V.

    (a) Wykazać, że jeżeli $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą V_1 i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest bazą V_2 to $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ jest bazą $V_1 + V_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

    (b) Wykaż, że jeśli $\dim V_1 = \dim V_2$ to istnieje $W \subset V$ taka, że $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$.

Suma prosta podprzestrzeni

1. Niech U i V będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej W nad ciałem K. Udowodnić równoważność następujących warunków:

    (a) $U + V = W$, $U \cap V = \{0\}$.

    (b) Dla każdego $\alpha \in W$ istnieją $\beta \in U$, $\gamma \in V$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$ oraz przedstawienie to jest jednoznaczne.

    (c) Jeżeli $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ jest bazą U, zaś $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ bazą V, to $\{\alpha_k\}_{k \in I \cup J}$ jest bazą W.

2. Uzasadnić, że dla dowolnego ciała K charakterystyki różnej od n, $K^n = U \oplus W$, gdzie $U : x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ i $W : x_1 + \ldots + x_n = 0$.

3. Niech $V_{ab} = \mathrm{lin}((1,2,3,1),(1,3,2,1),(2,3,a,b)) \subset \mathbb{R}^4$.

   (a) Znaleźć wymiar $V_{a,b}$ w zależności od $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) Dla jakich a, b istnieją $W, Z \subset \mathbb{R}^4$ takie, że $\mathbb{R}^4 = V_{a,b} \oplus W = W \oplus Z = Z \oplus V_{a,b}$. Podać przykład takich W i Z.

4. Niech $f \in k[x]$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$. Niech I_f będzie podzbiorem złożonym z wielomianów postaci fg, gdzie $g \in k[x]$ jest wielomianem. Pokazać, że I_f jest podprzestrzenią liniową. Niech A_f będzie taką podprzestrzenią, że $k[x] = I_f \oplus A_f$. Znaleźć (pewną) bazę przestrzeni A_f.

5. Udowodnić, że jeżeli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \simeq W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \simeq W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

6. Niech $B \subsetneq A$ będzie niepustym właściwym podzbiorem. Niech k będzie ciałem i $V = k^A$. Rozważmy podprzestrzeń

$$W = \{f \in V \mid \forall b \in B f(b) = 0\}.$$

   Znaleźć dopełnienie w V przestrzeni W.

Przekształcenia liniowe

1. Które z następujących przekształceń $f\colon V \to W$ przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W nad ciałem k są liniowe?

   (a) $k = \mathbb{R}$, $V = \{g\colon X \to \mathbb{R}\}$, gdzie X to pewien zbiór, $W = \mathbb{R}$, $f(g) = g(x_0)$, gdzie $x_0 \in X$ ustalony element.

   (b) $k = \mathbb{R}$, $V = \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \text{ różniczkowalna}\}$, $W = \mathbb{R}$, $f(g) = g'(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ustalony punkt.

   (c) $k = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = (\mathrm{re}\, z_1, i\, \mathrm{re}\, z_2)$.

   (d) $k = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f(a + ib) = (a + b) + (a + b)i$,

   (e) $V = k[X]$, $W = \{g\colon k \to k\}$, $f(\sum_{i=0}^n a_i x^i)(a) = \sum_{i=0}^n a_i a^i$. Podać przykład ciała, dla którego przekształcenie to nie jest monomorfizmem.

2. Czy istnieje przekształcenie $\mathbb{C}$-liniowe $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ takie, że $f(i,1) = (1+2i, i)$, $f(1,i) = (1+i, 1-i)$, $f(4i-1, 1+i) = (2+3i, 2i)$?

3. Podać przykład, o ile istnieje, przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ spełniającego poniższe warunki. Czy podany przykład jest jedyny?

   (a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$, $f(V) = \operatorname{lin}((1,2,0),(-1,0,1))$, $f(1,1,0,0) = (0,0,0)$.

   (b) $V = W = \mathbb{R}^3$, $(1,0,2) \notin f(V)$, $f(1,1,2) = (0,0,0)$.

   (c) $V = \mathbb{C}^4$, $W = \mathbb{C}^5$, f jest $\mathbb{C}$-liniowe, $\dim f(V) = 2$, $\ker f = \operatorname{lin}((1,i,i,1),(i,1,1,i))$.

4. Dla przestrzeni liniowych V, W nad ciałem k niech $L(V,W)$ oznacza przestrzeń liniową przekształceń liniowych $V \to W$. Pokazać, że jeśli $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ jest bazą V i $\{\beta_j\}_{j\in J}$ jest bazą W, to przekształcenia $f_{i,j}$ takie, że $f_{i,j}(\alpha_k) = \delta_{i,k}\beta_j$ stanowią bazę $L(V,W)$.

5. Ile jest przekształceń liniowych z $(\mathbb{Z}_3)^3$ do $(\mathbb{Z}_3)^3$? Ile wśród nich jest izomorfizmów?

6. Niech $\alpha_0 \in V$. Sprawdzić, że przekształcenie $f\colon L(V,W) \to W$, $f(\phi) = \phi(\alpha_0)$ jest liniowe. Znaleźć jego jądro i obraz.

7. Pokazać, że przekształcenie liniowe $f\colon V \to W$ przestrzeni liniowych nad ciałem k

   (a) jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $g\colon W \to V$ takie, że $g \circ f = \mathrm{Id}_V$.

   (b) jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $g\colon W \to V$ takie, że $f \circ g = \mathrm{Id}_W$.

8. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

   (a) Sprawdzić, że dla dowolnej przestrzeni U, f indukuje przekształcenia liniowe $f_*\colon L(U,V) \to L(U,W)$ i $f^*\colon L(W,U) \to L(V,U)$ zadane wzorami

$$f_*(\psi) = f \circ \psi, \qquad f^*(\phi) = \psi \circ f.$$

(b) Udowodnić, że jeżeli f jest monomorfizmem (epimorfizmem), to f_* jest monomorfizmem (epimorfizmem), a f^* jest epimorfzimem (monomorfizmem).

(c) Policzyć wymiary jądra i obrazu przekształceń f_* i f^*.

9. Niech $f_i \colon V_i \to V_{i+1}$ będzie ciągiem przekształceń liniowych, takim, że $\mathrm{im} f_i = \ker f_{i+1}$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0$.

10. Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzeń liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Niech

$$T \colon M(n \times n) \to M(n \times n) \quad T((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) = (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$$

będzie transpozycją. Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + T)$, $A = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - T)$.

11. Rozważmy podprzestrzenie $W_k \subset K^n$, dla $k = 1, 2, \ldots, n$

$$W_k = \{x_1 = \ldots = x_k = 0\}.$$

Opisać wszystkie izomorfizmy f przestrzeni K^n takie, że $f(W_k) = W_k$, dla każdego k.

12. Niech V, W, Z będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem k, zaś $f \in L(V, W)$, $g \in (W, Z)$ przekształceniami liniowymi takimi, że $\mathrm{im} f$ ma skończenie generowane dopełnienie w W, a $\mathrm{im} g$ skończenie generowane dopełnienie w Z. Czy wynika z tego, że $\mathrm{im}(g \circ f)$ ma skończenie generowane dopełnienie w Z?

13. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Załóżmy, że endomorfzimy $f, g \in \mathrm{End}(V)$ są takie, że $\mathrm{im} f + \mathrm{im} g = V = \ker f + \ker g$. Pokazać, że $\mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g = \{0\} = \ker f \cap \ker g$.

14. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, a $f \colon V \to V$ przekształceniem liniowym spełniającym $f \circ f = af + b\mathrm{Id}_V$, dla pewnych $a, b \in K \setminus \{0\}$. Pokazać, że f jest izomorfzimem.

15. Niech V będzie przestrzenią liniową parzystowymiarową. Pokazać, że istnieje przekształcenie liniowe $J \colon V \to V$ takie, że $J \circ J = -\mathrm{Id}_V$.

16. Niech J będzie rzeczywsitą przestrzenią liniową, a $J\colon V \to V$ przekształceniem liniowym takim, że $J \circ J = -\mathrm{Id}_V$. Wprowadzić na V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$ tak, że mnożenie przez $i \in \mathbb{C}$ jest zadane przez J. Wywnioskować, że jeżeli wymiar V jest skończony, to jest parzysty.

17. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad k i niech $V = V_1 \oplus V_2$. Dla $i = 1, 2$ niech $U_i = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid V_i \subset \ker f\}$. Pokazać, że $U_1 \cap U_j = \{0\}$. Czy $\mathrm{Hom}(V, W) = U_1 \oplus U_2$?

18. Podać przykład endomorfizmu $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ spełniającego:

$$(1,1,2) \in \mathrm{im}(f), \quad \ker f = \mathrm{lin}((-1,2,1)), \quad f^3 = f \circ f \circ f = 0.$$

19. Niech $f\colon W \to V$ będzie reprezentowane przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ względem pewnych baz (e_1, e_2, e_3)w przestrzeni V i (f_1, f_2) w W. Wyznaczyć macierz odwzorowania f względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

20. Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,0,0)$ i niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$. Znaleźć jądro i obraz przekształcenia f takiego, że $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

21. Niech $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ będzie macierzą ednomorfizmu $\mathbb{R}[x]_2$ w bazie $(1, x, x^2)$. Wyznaczyć macierz tego endomorfizmu w bazie $(3t^2 + 2t + 1, t^2 + 3t + 2, 2t^2 + t + 3)$.

22. Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne f w bazie

    (a) sprzężonej do standardowej.

    (b) sprzężonej do $(3,0,0), (0,5,0), (0,0,7)$.

    (c) sprzężonej do $(2,0,0), (1,2,0), (0,1,2)$.

23. Dla dowolnych macierzy A, B, C takich, że ABC jest dobrze określona udowodnić nierówność Frobeniusa:
$$\mathrm{rk}(AB) + \mathrm{rk}(BC) \leq \mathrm{rk}(ABC) + \mathrm{rk}(B).$$

Rzuty i symetrie

1. W przestrzenil iniowej $\mathbb{R}^4$ niech $U = \mathrm{lin}\{(1,0,1,1),(1,3,2,0)\}$ zaś $V = \mathrm{lin}\{(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$. Sprawdzić, że $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Znaleźć macierz rzutu na V wzdłuż U oraz symetrii względem V wzdłuż U w kanonicznej bazie $e_1, \ldots, e_4$.

2. W przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$ wielomianów stopnia $\leq n$ rozpatrzmy podprzestrzenie $V_1 = \{f \in \mathbb{R}_n[x] \,|\, \forall a \in \mathbb{R}, f(a) = f(-a)\}$ i $V_2 = \{f \in \mathbb{R}_n[x] \,|\, \forall a \in \mathbb{R}, f(a) = -f(-a)\}$. Znaleźć bazy V_1 i V_2. Znaleźć macierz rzutu na V_1 wzdłuż V_2 w bazie $1, x, \ldots, x^n$.

3. Pokazać, że jeśli $f \colon V \to V$ jest rzutem, to $\ker f \oplus \mathrm{im} f = V$. Czy jeżeli $\ker f \oplus \mathrm{im} f = V$, to f jest rzutem na pewną podprzestrzeń V wzdłuż pewnej podprzestrzeni V?

4. Pokazać, że jeżeli $f \colon V \to V$ jest rzutem, to $f^2 = f$. Pokazać, że jeżeli $f^2 = f$, to f jest rzutem.

5. Pokazać, że jeżeli $f \colon V \to V$ jest symetrią, to $f^2 = \mathrm{Id}$. Pokazać, że jeżeli $f^2 = \mathrm{Id}$ i charakterystyka ciała jest różna od 2, to f jest symetrią. Podać przykład, że założenie o charakterystyce jest istotne.

6. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałęm K zaś W i Z jej podprzestrzeniami takimi, że $\dim W \geq \dim Z$. Pokazać, że istnieje rzut $p \colon V \to V$, dla którego $p(W) = Z$.

7. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Pokazać, że istnieje automorfizm h przestrzeni V oraz rzut g, takie że $f = hg$.

8. Które z poniższych macierzy traktowanych jako macierze przekształceń $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ są macierzami tego samego przekształcenia liniowego zapisanego w różnych bazach (to znaczy macierzami podobnymi)? Które

z nich są macierzami symetrii?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -1 & - & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & - \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Niech $f\colon V \to V$ będzie rzutem na W wzdłuż U.
   (a) Pokazać, że dla dowolnej przestrzeni Z, homomorfizmy indukowane $f_*\colon L(Z,V) \to L(Z,V)$ i $f^*\colon L(V,Z) \to L(V,Z)$ są także rzutami.
   (b) W obu przypadkach opisać podprzestrzenie na które i wzdłuż których się rzutuje.
   (c) Niech $\dim W = k$, $\dim U = l$, $k+l = n = \dim V$ i $m = \dim Z$. Dla f_* i f^* znaleźć wymiary podrzestrzeni na które i wzdłuż których się rzutuje.

Przestrzenie sprzężone

1. Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset K^3$ by standardowy wektor sprzężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

2. Niech V będzie przestrzenią wielomianów zespolonych stopnia nie większego od 3. Definiujemy funckjonały $\Phi_i \in V^*$, dla $i = 0,1,2,3$
$$\Phi_i(f) = f^{(i)}(1)$$
   (i-ta pochodna). Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=0,\ldots,4} \subset V$, że $\Phi_i = \alpha_i^*$ jest bazą sprzężoną.

3. Niech $\phi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ będzie dane wzorem
$$\phi(x,y,z) = (x+2y, x+3y_2z, y+2z, x+y-2z).$$
   Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprzężonego $\phi^*\colon (\mathbb{C}^4)^* \to (\mathbb{C}^3)^*$.

4. Dla podprzestrzeni $W \subset V$ niech

$$W^{\perp} = \{\phi \in V^* \mid \phi|_W = 0\}.$$

Opisać $W^{\perp}$ równaniami i podać jego bazę dla $W = \mathrm{lin}\{(1,2,0,-3),(-2,3,2,-3),(-3,1,2,0)\} \subset \mathbb{R}^4$.

5. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową. Udowodnić, że istnieje izomorfizm $V^*/W^{\perp} \simeq W^*$.

6. Niech $L \subset V$, $\phi\colon V \to W$. Wykazać, że

$$L \subset \ker\phi \Leftrightarrow \mathrm{im}\ \phi^* \subset L^{\perp}.$$

7. Pokazać na przykładzie, że dla przestrzeni skończenie wymiarowej izomorfizm $\phi_{\{\alpha_i\}}\colon V \to V^*$ zdefiniowany przez $\phi_{\{\alpha_i\}}(\alpha_i) = \alpha_i^*$ zależy od wyboru bazy.

8. Pokazać, że dla przestrzeni skończenie wyiarowej izomorfizm $\phi_{\{\alpha_i\}}\colon V \to V^{**}$ zdefiniowany przez $\phi_{\{\alpha_i\}}(\alpha_i) = \alpha_i^{**}$ nie zależy od wyboru bazy i jest równy przekształceniu $\psi\colon V \to V^{**}$, $\psi(v)(f) = f(v)$. Udowodnić, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_V"] & W \arrow[d, "\psi_W"] \\
V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

9. Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\Phi_V\colon V \to V^{**}$ będzie kanonicznym izomorfzimem.

   (a) Niech $\Psi\colon L(V,W)^* \to L(W,V^{**})$ będzie dane w następujący sposób: dla $f \in L(V,W)^*$ $\Psi(f)(w) \in V^{**}$ jest dane wzorem $\Psi(f)(w)(\phi) = f(g_{w,\phi})$, gdzie $g_{w,\phi} \in L(V,W)$ jest dane wzorem $g_{w,\phi}(v) = \phi(v)w$. Udowodnić, że Ψ jest liniowe i jest izomorfzimem.

   (b) Dla $V = W$ mamy izomorfizm $\Psi\colon L(V,V)^* \to L(V,V^{**})$. Udowodnić, że $\Psi^{-1}(\Phi_V) = \mathrm{tr}$.

Ciągi dokładne

1. Załóżmy, że
$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$
jest *krótkim ciągiem dokładnym* nad ciałem K; co oznacza, że f jest monomorfizmem, gm $f = \ker g$ oraz g jest epimorfizmem.

   (a) Udowodnij, że $\dim V = \dim U + \dim W$.

   (b) Udowodnij, że gdy X jest przestrzenią liniową, to ciąg
$$0 \to \mathrm{Hom}(X, U) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, V) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X, W) \to 0$$
jest dokładny.

   (c) Udowodnij, że gdy X jest przestrzenią liniową, to ciąg
$$0 \to \mathrm{Hom}(W, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(V, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(U, X) \to 0$$
jest dokładny.

   Uwaga. Dokładność ciągów indukowanych z punktów (b) i (c) wiąże się z pojęciami, odpowiednio, *injektywności* oraz *projektywności*. Zadanie to pokazuje, że każda przestrzeń wektorowa jest jednocześnie projektywnym i injektywnym K-modułem. Nie jest tak w innych kategoriach modułów, np. w kategorii grup abelowych.

2. Załóżmy, że
$$0 \to U_1 \xrightarrow{f_1} V \xrightarrow{g_1} W_1 \to 0$$
$$0 \to U_2 \xrightarrow{f_2} V \xrightarrow{g_2} W_2 \to 0$$
są krótkimi ciągami dokładnymi. Uzasadnij, że

   (a) $\ker(g_2 \circ f_1) = \ker(g_1 \circ f_2)$,

   (b) $\mathrm{coker}\,(g_2 \circ f_1) = \mathrm{coker}\,(g_1 \circ f_2)$.

3. Zalóżmy, że
$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$
jest krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni liniowych. Dowiedź, że następujące warunki są równoważne:

(a) istnieje $r \in \mathrm{Hom}(V, U)$ takie, że $r \circ f = \mathrm{Id}_U$.

(b) istnieje $s \in \mathrm{Hom}(W, V)$ takie, że $g \circ s = \mathrm{Id}_W$.

(c) istnieją $r \in \mathrm{Hom}(V, U)$, $s \in \mathrm{Hom}(W, V)$ takie, że $r \circ f = \mathrm{Id}_U$, $g \circ s = \mathrm{Id}_W$ oraz $f \circ r + s \circ g = \mathrm{Id}_V$.

(d) Istnieje taki izomorfizm $h \in \mathrm{Hom}(V, U \oplus W)$, że diagram o dokładych wierszach

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"] & U \oplus W \arrow[r, "\pi"] & W \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\mathrm{Id}"] & V \arrow[r, "g"] \arrow[u, "h"] & W \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Id}"] & 0 \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Uwaga. Gdy ciąg dokładny spełnia powyższe warunki, to mówimy, że *się rozszczepia*. Zatem w kategorii przestrzeni wektorowych każdy ciąg dokładny się rozszczepia.

4. Niech $n \geq 2$. Mówimy, że ciąg odwzorowań liniowych postaci

$$0 \xrightarrow{f_0} V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} V_n \xrightarrow{f_{n+1}} 0$$

jest *dokładny*, gdy $\ker f_i = \mathrm{im}\, f_{i-1}$ dla $i = 1, \dots, n+1$. Pokaż, że gdy powyższy ciąg jest dokładny, zaś przestrzenie $V_0, \dots, V_n$ są skończonego wymiaru, to $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.

5. *Lemat o wężu.* Przypuśmy, że w diagramie przemiennych odwzorowań liniowych

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "v_1"] & V_2 \arrow[r, "v_2"] & V_3 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[u, "f_1"] & U_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[u, "f_2"] & U_3 \arrow[r] \arrow[u, "f_3"] & 0 \end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi. Wykaż, że istnieje ciąg dokładny

$$0 \to \ker f_1 \xrightarrow{\overline{u_1}} \ker f_2 \xrightarrow{\overline{u_2}} \ker f_3 \xrightarrow{\phi} \mathrm{coker} f_1 \xrightarrow{\overline{v_1}} \mathrm{coker} f_2 \xrightarrow{\overline{v_2}} \mathrm{coker} f_3 \to 0,$$

w którym homomorfizmy $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{v_1}, \overline{v_2}$ są indukowane, odpowiednio, przez u_1, u_2, v_1 i v_2 (wyjaśnij, co to znaczy). Jak jest zdefiniowane ϕ?

6. *Lemat o pięciu* Załóżmy, że w diagrami przemiennym odwzorowań liniowych

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & V_3 \arrow[r] & V_4 \arrow[r] & V_5 \\ U_1 \arrow[r] \arrow[u, "f_1"] & U_2 \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & U_3 \arrow[r] \arrow[u, "f_3"] & U_4 \arrow[r] \arrow[u, "f_4"] & U_5 \arrow[u, "f_5"] \end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi. Wykaż, że

   (a) Gdy f_2 i f_4 są monomorfizmami, natomiast f_1 jest epimorfizmem, to f_3 jest monomorfizmem,

   (b) gdy f_2 i f_4 są epimorfizmami, natomiast f_5 jest monomorfizmem, to f_3 jest epimorfizmem,

   (c) gdy f_2 oraz f_4 są izomorfizmami, f_1 jest epimorfizmem zaś f_5 jest monomorfizmem, to f_3 jest izomorfizmem.

Iloczyny tensorowe

1. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Mówimy, że odwzorowanie $\phi\colon U \times V \to W$ jest *dwuliniowe*, gdy odwzorowania $\phi(u,-)\colon V \to W$ oraz $\phi(-,v)\colon U \to W$ są liniowe dla dowolnych $u \in U$ oraz $v \in V$. Powiemy, że para (T,τ) jest *iloczynem tensorowym* przestrzeni U, V, gdy T jest przestrzenią liniową nad K, odwzorowanie $\tau\colon U \times V \to T$ jest dwuliniowe i dla dowolnej przestrzeni W i dowolnego odwzorowania dwuliniowego $\phi\colon U \times V \to W$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f\colon T \to W$ takie, że $\phi = f \circ \tau$:

$$\begin{tikzcd} & U \times V \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\forall\phi"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "\exists! f"] & & W \end{tikzcd}$$

   (a) Niech F będzie przestrzenią liniową nad K o bazie $U \times V$ (elementami przestrzeni F są formalne kombinacje liniowe postaci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u_i, v_i)$, gdzie $\lambda_i \in K$, $u_1, \ldots, u_n \in U$, $v_1 \ldots v_n \in V$ oraz $n \geq 1$.) Rozważmy podprzestrzeń N w F rozpiętą przez wszystkie wektory postaci

$$\begin{aligned}&(u+u',v)-(u,v)-(u',v)\\&(u,v+v')-(u,v)-(u,v')\\&(\lambda u,v)-\lambda(u,v)\\&(u,\lambda v)-\lambda(u,v),\end{aligned}$$

gdzie $u,u'\in U$, $v,v'\in V$, $\lambda\in K$. Niech $T=F/N$ będzie przestrzenią ilorazową, zaś $\tau\colon U\times V\to T$ złożeniem:

$$U\times V\xrightarrow{\alpha}F\xrightarrow{\beta}F/N=T.$$

gdzie α jest zanurzeniem bazy $U\times V$ przestrzeni F w tę przestrzeń, natomiast β jest odwzorowaniem ilorazowym. Wykaż, że para (T,τ) jest iloczynem tensorowym przestrzeni U i V.

(b) Udowodnij, że jeżeli (S,σ) również jest iloczynem tensorowym U i V, to istnieje jedyny taki izomorfizm $f\in\mathrm{Hom}(T,S)$ taki, że $\sigma=f\circ\tau$.

Uwaga Skonstruowaną przestrzeń T oznaczamy przez $U\otimes V$. Jej elementy nazywamy tensorami. natomiast elementy zbioru $\tau(U\times V)$ nazywamy *tensorami prostymi* i oznaczamy $u\times v$.

2. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykaż, że

   (a) $K\otimes V\simeq V$,

   (b) $U\otimes V\simeq V\otimes U$,

   (c) $U\otimes(V\otimes W)\simeq(U\otimes V)\otimes W$,

   (d) $\mathrm{Hom}(U,V;W)\simeq\mathrm{Hom}(U\otimes V,W)\simeq\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$, gdzie $\mathrm{Hom}(U,V;W)$ oznacza przestrzeń odwzorowań dwuliniowych z $U\times V$ w W.

3. Niech U i V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Udowodnij, że gdy $\{u_i, i\in I\}$ jest bazą przestrzeni U, zaś $\{v_j, j\in J\}$ bazą przestrzeni V, to
$$\{u_i\otimes v_j,(i,j)\in I\times J\}$$
jest bazą przestrzeni $U\otimes V$.

4. Załóżmy, że
$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$
jest krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Udowodnij, że gdy X jest przestrzenią tensorową nad K, to ciąg indukowany
$$0 \to X \otimes U \xrightarrow{1 \otimes f} X \otimes V \xrightarrow{1 \otimes g} X \otimes W \to 0$$
jest dokładny.

Uwaga. Dokładność powyższego ciągu wiąże się z pojęciem *płaskości.* Zadanie to pokazuje, że każda przestrzeń wekotowa X jest płaskim K modułem.

5. Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geq 1$. Sprawdź, że
   (a) $K^n \otimes K^m \simeq M_{n,m}(K)$.
   (b) $K[x_1] \otimes K[x_2] \simeq K[x_1, x_2]$.

Wyznaczniki

1. Oblicz wyznaczniki
$$\begin{pmatrix} 36 & 60 & 72 & 37 \\ 43 & 71 & 78 & 34 \\ 44 & 69 & 73 & 32 \\ 30 & 50 & 65 & 38 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 14 \\ 10 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 8 \\ 12 & 12 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 60 \end{pmatrix}.$$

2. Oblicz wyznaczniki
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix}.$$

3. Rozwiąż równanie
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & x & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & x & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Niech
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_{17}).$$
Czy istnieje taka macierz $B \in M_4(\mathbb{Z}_{17})$, że $\det(AB) = 8$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy.

5. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geq 2$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in K$. Niech
$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
Oblicz $\det V(x_1, \ldots, x_n)$.

6. Obliczyć wyznaczniki
$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \ldots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & x \end{pmatrix}.$$

Podprzestrzenie niezmiennicze. Wektory własne i wartości własne

1. Pokazać, że $\ker f^k$ i $\operatorname{im} f^k$ są niezmienniczymi podprzestrzeniami dowolnego endomorfizmu $f \colon V \to V$.

2. Niech $f \colon V \to V$ będzie endomorfzimem, a $g \colon V \to V$ automorfizmem. Pokazać, że jeżeli $W \subset V$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu f, to $g(W)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu gfg^{-1}.

3. Niech $f \colon V \to V$ będzie endomorfzimem. Niech $\alpha \in V$ i rozpatrzmy ciąg wektorów $\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \ldots$.

(a) Pokazać, że $\mathrm{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \ldots\}$ jest najmniejszą podprzestrzenią f niezmienniczą zawierającą wektor α.

(b) Pokazać, że jeżeli V jest przestrzenią skończenie wymiarową, to istnieje takie k, że dla $m > k$, $f^m(\alpha) \in \mathrm{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \ldots, f^k(\alpha)\}$.

(c) Niech k będzie najmniejszą liczbą, o jakiej mowa w poprzednim punkcie. Pokazać, że $\alpha, f(\alpha), \ldots, f^k(\alpha)$ jest bazą podprzestrzeni $\mathrm{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \ldots, f^k(\alpha)\}$. Znaleźć macierz f w tej bazie.

(d) Czy przy założeniach poprzedniego podpunkty przestrzeń $\mathrm{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \ldots, f^k(\alpha)\}$ może zawierać właściwe podprzestrzenie f niezmiennicze?

4. Niech f będzie endomorfizmem $\mathbb{R}^4$ zadanym wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0)$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Czy istnieją f niezmiennicze podprzestrzenie dwuwymiarowe W, U takie, że $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$?

5. Niech f będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Pokazać, że jeżeli $\dim(\mathrm{im}\ f) = k$, to f ma co najwyżej $k + 1$ wartości własnych.