Egzamin: Algorytmy Satatystyki Praktycznej

Test

W części testowej, za każde zadanie można otrzymać dwa punkty. W każdym podpunkcie trzeba odpowiedzieć czy zdanie jest (P) prawdziwe czy (F) fałszywe.

1. Niech $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

   (a) $(1, 1) \in \partial f(x, x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ (F)

   (b) $(-1, 1) \in \partial f(x, x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ (P)

   (c) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ jeśli $v \in \partial f(x, x)$ to $-v \in \partial f(x, x)$.(P)

   Z definicji subgradeintu mamy

   $$|y_1 - y_2| \geq \langle \partial f(x, x), (y_1, y_2) \rangle$$

   Czyli

   $$|y_1 - y_2| \ngeq y_1 + y_2$$
   $$|y_1 - y_2| \geq y_1 - y_2$$

   Skoro nierównośc jest prawdziwa dla y jak i $-y$ to można wziąć v i $-v$.

2. Rozważmy problem optymalizacji

   $$\min_{x \in K} f(x) \ ,$$

   gdzie f wypukła na $\mathbb{R}^n$ oraz $K \subset \mathbb{R}^n$ zbiór wypukły.

   (a) x^* jest rozwiązaniem problemu wtedy i tylko wtedy gdy $0 \in \partial f(x^*)$ oraz $x^* \in int(K)$. (F)

   (b) Jeśli $0 \in \partial f(x^*)$ oraz $x^* \in int(K)$ to x^* jest rozwiązaniem problemu. (P)

   (c) x^* jest rozwiązaniem problemu wtedy i tylko wtedy gdy $0 \in \partial f(x^*) - N_K(x^*)$, gdzie $N_K(x^*)$ jest stożkiem normalnym do K w punkcie x^*.(P)

   Punkt pierwszy jest nieprawdziwy jeżeli funkcja nie osiąga minimum globalnego we wnętrzu K wtedy punkt optymalny jest na brzegu i spełnia punkt c). Stożek normalny we wnętrzu zbiotu K składa się tylko z zera.

3. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu o gęstości

   $$f_{\theta,p}(x) = \sum_{i=1}^{k} p_k f_{\theta_k}(x) \ .$$

   Rozważmy algorytm EM do szukania estymatora największej wiarygodności parametrów $\eta = (p, \theta)$.

   (a) Krok algorytmu EM jest zdefiniowany przez

   $$\eta_{k+1} = \arg\max_{\eta} Q(\eta, \eta_k)$$

   gdzie $Q(a, b) = \mathbb{E}_b(\sum_{i=1}^{k} \log(f_a(X_i))$. (F)

(b) Jeśli η_k, η_{k+1} kolejne wartości w algorytmie EM to dla każdego $i = 1, \ldots, k$ mamy

$$f_{\eta_{k+1}}(x_i) \geq f_{\eta_k}(x_i)$$

. (F)

(c) Jeśli $\eta_{k+1} = \eta_k$ to η_{k+1} jest lokalnym minimum wiarygodności.(F)

Q jest zdefiniowane jako warunkowa wartość oczekiwana pełnej wiarygodności. Algorytm EM jest monotoniczny ze względu na całą log wiarygodność, a nie na składowe sumy. EM może utknąć w lokalnym maksimum lub punkcie siodłowym.

4. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie łańcuchem Markowa z jądrem przejścia $P(x, dy)$.

   (a) (F) Jeśli π jest rozkładem stacjonarnym to dla dowolnego f takiego, że $\pi|f| < \infty$ mamy

   $$Ef(X_n) = \pi(f).$$

   (b) (F) Jeśli π jest rozkładem stacjonarnym to P jest odwracalny względem π.

   (c) (P) Jeśli P jest odwracalny względem π to π jest rozkładem stacjonarnym.

   Rozkład stacjonarny jest osiągany asymptotycznie czyli da dowolnego skończonego n nie ma równości. Odwracalność jest silniejszym pojęciem niż rozkład stacjonarny.

5. Rozważmy ukryty model Markowa gdzie $X_1, \ldots, X_n$ są zmienne ukryte a $Y_1, \ldots, Y_n$ obserwacje.

   (a) $X_1, \ldots, X_n$ jest łańcuchem Markowa. (P)

   (b) $Y_1, \ldots, Y_n$ są niezależne pod warunkiem $X_1, \ldots, X_n$.(P)

   (c) Istnieją $Y_1, \ldots, Y_n$ takie, że dla $k < n$ (P)

   $$P(X_1, \ldots, X_k | Y_1, \ldots Y_k) \neq P(X_1, \ldots, X_k | Y_1, \ldots Y_n)$$

Zadania

Oba zadania są za 5 punktów.

1. Rozważmy ukryty model Markowa, gdzie ukrty łańcuch $X_1, \ldots, X_n$ ma rozkład początkowy μ i macierz przejścia P oraz

   $$P(Y_i = l | X_i = k) = Q_{kl},$$

   przy czym

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \; \mu = [1, 0, 0]^T$$

   Znajdź najbardziej prawdopodobną trajektorię ukrytego łańcucha dla obserwacji $2, 2, 1$.

   Jedyne możliwe trajektorie to $1, 3, 2$ i $1, 3, 1$ obie są równie prawdopodbne.

2. Niech (V, E) będzie grafem o wierzchołkach V i krawędziach $v_1 \to v_2 \in E$. Rozważmy algorytm Metropolisa-Hastingsa zdefiniowany przez:

   - Bedąc w wierzołku $v \in V$ losujemy v' jednostajnie z pośród sąsiadów ($v \to v' \in E$).
   - akceptujemy v' z prawdopodobieństwem

     $$\min(1, r(v)/r(v')) \; ,$$

     gdzie $r(v)$ rząd wierzchołkach (liczba krawędzi wychodząca z v).

(a) Jaki jest rozkład stacjonarny podanego łańcucha.

(b) Jakie powinno być prawdopodobieństwo akceptacji, żeby rozkład stacjonarny $\pi(v) \propto r(v)$.

Tak opisany algorytm ma propozycje

$$Q(v, v') = \frac{1}{r(v)}$$

Iloraz w akceptacji MH jest

$$\frac{\pi(v')Q(v', v)}{\pi(v)Q(v, v')} = \frac{\pi(v')/r(v')}{\pi(v)/r(v)}$$

Stąd $pi(v) \propto 1$ czyli rozkład jednostajny na wierzchołkach. Korzystając z tego samego wzoru w punkcie b) dostajemy ze prawdopodobieństwo akceptacji powinno być stałe równe 1.