Stanisław Betley, Józef Chaber, Elżbieta Pol i Roman Pol

TOPOLOGIA I

wykłady i zadania

maj 2023

WSTĘP.

Materiał w skrypcie odpowiada programowi zajęć z Topologii I w trzecim semestrze studiów na Wydziale MIM Uniwersytetu Warszawskiego i jest oparty na naszych doświadczeniach z wykładów i ćwiczeń do tego przedmiotu.

Program dopuszcza dużą różnorodność w rozłożeniu akcentów na poszczególne tematy i przedstawiony materiał jest wynikiem wypośrodkowania naszych poglądów na te kwestie, początkowo dość rozbieżnych. Mamy nadzieję, że to wyważenie różnych punktów widzenia przyniesie pożytek użytkownikom skryptu.

Od momentu powstania pierwszej wersji skryptu sylabus wykładu z topologii na wydziale MIM był wielokrotnie modyfikowany. Te zmiany czasami nie znajdowały natychmiastowego odzwierciedlenia w układzie materiału w skrypcie. Jednak zawsze dokładaliśmy starań aby materiał zawarty w pierwszych sześciu rozdziałach pokrywał program przedmiotu opisany w sylabusach, choć niekoniecznie w dokładnie tej samej kolejności. Ostatnia istotna merytoryczna modyfikacja skryptu polegała między innymi na rozszerzeniu Uzupełnień (część 7) tak, aby obejmowały one także dodatkowy materiał, możliwy do omówienia na potoku „gwiazdkowym".

Istotną częścią skryptu są zadania. Staraliśmy się dobrać je tak, aby (z ewentualną wskazówką) nie były zbyt złożone. Znaczną ich część należy jednak traktować jako materiał uzupełniający. Naszą ocenę tego, co daje się dokładnie omówić na ćwiczeniach, sygnalizujemy opatrując pewne z tych zadań symbolem ♠. Z tych zadań układaliśmy, prowadząc ćwiczenia, zestawy dla studentów i dawaliśmy podobne zadania na kolokwiach i egzaminach.

Istnieje obszerna literatura w języku polskim, dotycząca różnych aspektów problematyki, w którą wprowadza kurs Topologii I (niektóre z tych pozycji wymieniamy poniżej). Nasz skrypt, pisany z myślą o zajęciach kursowych, nie zastąpi oczywiście kontaktu z żadną z tych znakomitych książek.

WYBRANE POZYCJE Z LITERATURY W JĘZYKU POLSKIM.

R.Engelking, K.Sieklucki, *Wstęp do topologii*, Warszawa 1986.

K.Jänich, *Topologia*, Warszawa 1991.

C.Kosniowski, *Wprowadzenie do topologii algebraicznej*, Poznań 1999.

K.Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 2004.

J.Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, Katowice 1994.

Spis treści

1. Przestrzenie metryczne i przestrzenie topologiczne

1.1. **Metryki i topologia przestrzeni metrycznej.** Metryka pozwala mierzyć odległość między punktami przestrzeni. Interesować nas będą jednak nie same metryki, a wyznaczone przez nie rodziny zbiorów otwartych – topologie.

Definicja 1.1.1. *Metryką na zbiorze X nazywa się funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:*
(1) $d(x, y) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$, *dla* $x, y \in X$,
(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, *dla* $x, y, z \in X$.

Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Z własności (3), nazywanej nierównością trójkąta, warunku symetrii (2), oraz (1) wynika, że dla $x, y \in X$, $0 = d(x, x) \leqslant 2d(x, y)$, a więc metryka przyjmuje tylko wartości nieujemne.

Elementy przestrzeni metrycznej (X, d) nazywać będziemy punktami, a liczbę $d(x, y)$ odległością między punktami $x, y \in X$.

Przykład 1.1.2. Wprowadzimy przestrzenie euklidesowe $(\mathbb{R}^n, d_e)$. Punktami $\mathbb{R}^n$ są ciągi n-elementowe liczb rzeczywistych, a odległość miedzy $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ jest określona formułą

(4) $d_e(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.

Sprawdzimy, że d_e jest metryką. Uzasadnienia wymaga jedynie nierówność trójkąta (3). Pokażemy najpierw, że dla $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$,

(5) $d_e(a, b) \leqslant d_e(a, \mathbf{0}) + d_e(\mathbf{0}, b)$.

Po podniesieniu do kwadratu obu stron, (5) przekształca się w nierówność Cauchy'ego

(6) $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

Przypomnijmy uzasadnienie (6): przyjmując $A = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, $B = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$, $s_i = \frac{|a_i|}{A}$, $t_i = \frac{|b_i|}{B}$, mamy $\sum_{i=1}^n s_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^n t_i^2$, a ponieważ $2s_i t_i \leqslant s_i^2 + t_i^2$, po zsumowaniu tych nierówności stronami dostaniemy (6).

Aby przejść od (5) do ogólnej sytuacji, zauważmy, że metryka euklidesowa jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, a więc dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ mamy $d_e(a, b) = d_e(a - c, b - c) \leqslant d_e(a - c, \mathbf{0}) + d_e(\mathbf{0}, b - c) = d_e(a, c) + d_e(c, b)$.

Kulą w przestrzeni metrycznej (X, d) o środku w punkcie $a \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

Definicja 1.1.3. *W przestrzeni metrycznej (X, d), zbiór $U \subset X$ jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subset U$. Rodzinę $\mathcal{T}(d)$ wszystkich zbiorów otwartych w (X, d) nazywamy topologią tej przestrzeni metrycznej albo topologią generowaną przez metrykę d.*

Uwaga 1.1.4. (A) W przestrzeni metrycznej (X, d), jeśli $b \in B(a, r)$, to zgodnie z nierównością trójkąta, dla $s = r - d(a, b)$, mamy $B(b, s) \subset B(a, r)$. W szczególności, kule $B(a, r)$ są otwarte w przestrzeni (X, d).

(B) Dopełnienie $X \setminus F$ zbioru skończonego F w przestrzeni metrycznej (X, d) jest otwarte. Istotnie, jeśli $x \in X \setminus F$ i $r = \min\{d(x, y) : y \in F\}$, to $B(x, r) \subset X \setminus F$.

Własności topologii przestrzeni metrycznej, które wyróżnimy w następującym twierdzeniu, posłużą nam w dalszej części do określenia ogólnych przestrzeni topologicznych.

Twierdzenie 1.1.5. *Topologia $\mathcal{T}(d)$ przestrzeni metrycznej (X, d) ma następujące własności:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}(d)$,

(ii) przecięcie skończenie wielu elementów $\mathcal{T}(d)$ jest elementem $\mathcal{T}(d)$,

(iii) suma dowolnie wielu elementów $\mathcal{T}(d)$ jest elementem $\mathcal{T}(d)$.

Dowód. Ponieważ $x \notin \emptyset$ dla każdego $x \in X$, warunek określający zbiory otwarte w (X, d) jest spełniony dla $\emptyset$. Jest też jasne, że $X \in \mathcal{T}(d)$.

Sprawdzimy (ii). Niech $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(d)$. Dla dowolnego $x \in U_1 \cap U_2$ istnieją $r_i > 0$ takie, że $B(x, r_i) \subset U_i$, a więc $B(x, r) \subset U_1 \cap U_2$, dla $r = \min(r_1, r_2)$. Zatem $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(d)$, a stąd (ii) wynika przez indukcję.

Niech $V = \bigcup \mathcal{U}$ będzie sumą rodziny $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(d)$. Jeśli $x \in V$, to $x \in U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}$, a więc istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subset U \subset V$. Zatem $V \in \mathcal{T}(d)$, co dowodzi (iii).

Przykład 1.1.6. (A) Metryki na tym samym zbiorze, o różnych własnościach geometrycznych, mogą generować tę samą topologię. Dla ilustracji, rozpatrzmy w $\mathbb{R}^n$ metryki

$$d_s(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|, \quad d_m(a, b) = \max_i |a_i - b_i|,$$

gdzie $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Kule w przestrzeniach metrycznych $(\mathbb{R}^n, d_e)$, $(\mathbb{R}^n, d_s)$, oraz $(\mathbb{R}^n, d_m)$ mają różny kształt, ale metryki d_e, d_s i d_m generują tę samą topologię, $\mathcal{T}(d_e) = \mathcal{T}(d_s) = \mathcal{T}(d_m)$.

Wynika to z prostych nierówności $d_e \leqslant \sqrt{n} d_m$, $d_m \leqslant d_s$, oraz nierówności $d_s \leqslant \sqrt{n} d_e$, która jest konsekwencją nierówności Cauchy'ego (6) w 1.1.2.

(B) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $\delta > 0$. Wówczas funkcja $d_\delta(x, y) = \min\{d(x, y), \delta\}$ jest metryką w X, generującą tę samą topologię, co metryka d. Wynika to stąd, że w obu przestrzeniach metrycznych (X, d) i (X, d_δ) kule o promieniach $< \delta$ są identyczne.

Przykład 1.1.7. (A) Funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona formułami $d(x, y) = |x| + |y|$, dla $x \neq y$, oraz $d(x, x) = 0$, jest metryką. Metryka d generuje w $\mathbb{R}$ topologię $\mathcal{T}(d)$ różną od topologii euklidesowej, tzn. generowanej przez metrykę $d_e(x, y) = |x - y|$. W przestrzeni $(\mathbb{R}, d)$ kula o środku w punkcie $x \neq 0$ i promieniu $r = |x|$ składa się jedynie z punktu x, a zatem $\{x\}$ jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni. Ponieważ kula w $(\mathbb{R}, d)$ o środku w zerze i promieniu r jest przedziałem $(-r, r)$, wynika stąd, że $\mathcal{T}(d)$ składa się ze wszystkich podzbiorów $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, oraz wszystkich zbiorów zawierających pewien przedział $(-r, r)$.

(B) Niech $\mathbb{R}^\infty$ będzie zbiorem ciągów liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots)$ o prawie wszystkich (tzn. wszystkich, poza skończenie wieloma) współrzędnych równych zeru. Będziemy identyfikować $\mathbb{R}^n$ ze zbiorem punktów $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ w $\mathbb{R}^\infty$. Metryki d_e i d_s w $\mathbb{R}^\infty$ określamy formułami

$$d_e(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - b_i)^2}, \qquad d_s(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty}|a_i - b_i|,$$

gdzie $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$ (na $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$ metryki d_e i d_s pokrywają się z metrykami wprowadzonymi w 1.1.2 i 1.1.6 (A)). Pokażemy, że d_e i d_s generują różne topologie w $\mathbb{R}^\infty$. Istotnie, niech $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ i niech $B_s(\mathbf{0}, 1)$ będzie kulą w $(\mathbb{R}^\infty, d_s)$ o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu 1. Sprawdzimy, że $B_s(\mathbf{0}, 1) \notin \mathcal{T}(d_e)$. Załóżmy przeciwnie i niech $B_e(\mathbf{0}, r) \subset B_s(\mathbf{0}, 1)$, gdzie $B_e(\mathbf{0}, r)$ jest kulą w $(\mathbb{R}^\infty, d_e)$ o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu $r > 0$. Ustalmy n takie, że $\frac{1}{n} < r^2$ i niech $a = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$ będzie punktem mającym dokładnie n współrzędnych niezerowych. Wówczas $d_e(a, \mathbf{0}) = \sqrt{n \cdot (\frac{1}{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}} < r$, skąd $a \in B_e(\mathbf{0}, r)$, ale $d_s(a, \mathbf{0}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, czyli $a \notin B_s(\mathbf{0}, 1)$, a więc doszliśmy do sprzeczności.

Zakończymy tę część uwagą dotyczącą topologii podprzestrzeni przestrzeni metrycznych.

Uwaga 1.1.8. Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną i niech $Y \subset X$. Wówczas obcięcie $d_Y = d_X \mid Y \times Y$ metryki d_X do Y jest metryką, generującą w Y topologię $\mathcal{T}(d_Y)$, której elementy są śladami zbiorów otwartych w (X, d_X) na Y, tzn. $\mathcal{T}(d_Y) = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}(d_X)\}$. Aby się o tym upewnić, wystarczy zauważyć, że dla $y \in Y$ kula w przestrzeni (Y, d_Y) o środku w y i promieniu r jest przecięciem z Y kuli w (X, d_X) o środku w y i promieniu r.

Przykład 1.1.9. Niech $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ i niech d_Y będzie obcięciem do Y metryki euklidesowej w $\mathbb{R}$. Topologia $\mathcal{T}(d_Y)$ składa się ze wszystkich podzbiorów Y, które albo nie zawierają zera, albo ich dopełnienie do Y jest skończone.

Zauważmy, że obcięcie do Y metryki z Przykładu 1.1.7 (A) generuje tę samą topologię.

1.2. **Przestrzenie topologiczne.** Własności wyróżnione w Twierdzeniu 1.1.5 przyjmiemy za określenie topologii w przestrzeniach bez metryki.

Definicja 1.2.1. *Rodzina $\mathcal{T}$ podzbiorów zbioru X jest topologią w X, jeśli*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) przecięcie skończenie wielu elementów $\mathcal{T}$ jest elementem $\mathcal{T}$,

(iii) suma dowolnie wielu elementów $\mathcal{T}$ jest elementem $\mathcal{T}$.

Parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią topologiczną, elementy zbioru X punktami tej przestrzeni, a elementy rodziny $\mathcal{T}$ zbiorami otwartymi w $(X, \mathcal{T})$.

Jeśli dla przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ można określić metrykę d na X, dla której $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$, mówimy, że przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna. Istnieje wiele ważnych przestrzeni topologicznych, które nie są metryzowalne. Jedną z nich wskażemy w następującym przykładzie (zob. także Uzupełnienie 7.3.2).

Przykład 1.2.2. Niech $(\mathbb{R}^\infty, d_e)$ będzie przestrzenią opisaną w Przykładzie 1.1.7 (B). Przestrzeń $\mathbb{R}^\infty$ jest sumą podprzestrzeni $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n \subset \ldots$ i niech $\mathcal{T}_n$ będzie topologią w $(\mathbb{R}^n, d_e)$ (tym samym symbolem oznaczamy tu metrykę na $\mathbb{R}^\infty$ i jej obcięcie do $\mathbb{R}^n$). Niech

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \subset \mathbb{R}^\infty : U \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_n, \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\}.$$

Rodzina $\mathcal{T}_\infty$ jest topologią w $\mathbb{R}^\infty$. Pokażemy, że przestrzeń $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{T}_\infty)$ nie jest metryzowalna. Załóżmy przeciwnie, że $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}(d)$ dla pewnej metryki d na $\mathbb{R}^\infty$ i niech $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$ będzie kulą w $(\mathbb{R}^\infty, d)$ o środku w punkcie $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ i promieniu $\frac{1}{n}$. Zgodnie z określeniem $\mathcal{T}_\infty$, $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ zawierającym zero, można więc wybrać $p_n = (0, 0, \ldots, 0, r_n, 0, \ldots) \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$, gdzie $r_n \neq 0$ jest n-tą współrzędną p_n. Zbiór $A = \{p_1, p_2, \ldots\}$ ma skończone przecięcie z każdą przestrzenią $\mathbb{R}^n$, zatem $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{T}_n$, dla $n = 1, 2, \ldots$ (zob. 1.1.4 (B)), a więc $\mathbb{R}^\infty \setminus A \in \mathcal{T}_\infty$. Z drugiej strony, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^\infty \setminus A$, ale każda kula w $(\mathbb{R}^\infty, d)$ o środku w zerze zawiera pewną kulę $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$, a więc przecina A. Mamy zatem $\mathbb{R}^\infty \setminus A \in \mathcal{T}_\infty \setminus \mathcal{T}(d)$, sprzecznie z założeniem.

Przykład 1.2.3. Niech X będzie ustalonym zbiorem. Wśród wszystkich topologii, jakie można określić na zbiorze X, dwie skrajne to antydyskretna $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$, oraz dyskretna $\mathcal{T}_d$, złożona ze wszystkich podzbiorów zbioru X. Jeśli X zawiera co najmniej dwa punkty, to przestrzeń $(X, \mathcal{T}_a)$ nie jest metryzowalna, bo wówczas, dla dowolnego $x \in X$, $X \setminus \{x\} \notin \mathcal{T}_a$, zob. Uwaga 1.1.4 (B). Topologia $\mathcal{T}_d$ jest generowana przez metrykę dyskretną w X, w której odległość między różnymi punktami jest zawsze równa 1.

Zarówno przy wprowadzaniu topologii, jak i badaniu jej własności, użyteczne są pewne podrodziny rodziny wszystkich zbiorów otwartych.

Definicja 1.2.4. *Rodzinę $\mathcal{B}$ podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy bazą topologii $\mathcal{T}$, jeśli dla dowolnego $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ spełniające $x \in B \subset U$.*

Przykład 1.2.5. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subset X$ będzie zbiorem takim, że każda kula w (X, d) zawiera element A. Wówczas rodzina $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) : a \in A, n = 1, 2, \ldots\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(d)$.

Baza topologii jednoznacznie wyznacza tę topologię: zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą pewnej rodziny zbiorów z bazy. Opiszemy teraz metodę generowania topologii przy pomocy rodzin mających dwie własności przysługujące każdej bazie.

Twierdzenie 1.2.6. *Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X spełniającą warunki*

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$,

(ii) dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Wówczas rodzina $\mathcal{T}$ zbiorów $U \subset X$ takich, że jeśli $x \in U$, to $x \in B \subset U$ dla pewnego $B \in \mathcal{B}$, jest topologią w X.

Dowód. Warunki (i) oraz (iii) w Definicji 1.2.1 są spełnione w sposób widoczny, a warunek (ii) wynika z własności (ii) rodziny $\mathcal{B}$.

Uwaga 1.2.7. Rodzina $\mathcal{B}$ podzbiorów zbioru X spełniająca warunki (i) i (ii) Twierdzenia 1.2.6 jest bazą topologii $\mathcal{T}$ opisanej w tym twierdzeniu. Będziemy mówić, że baza $\mathcal{B}$ generuje topologię $\mathcal{T}$.

Przykład 1.2.8. Niech $(X,<)$ będzie zbiorem zawierającym co najmniej dwa elementy, z wyróżnionym porządkiem liniowym. Rodzina przedziałów $\{y : y < x\}$, $\{y : x < y\}$, oraz $\{z : x < z < y\}$ spełnia warunki (i) i (ii) Twierdzenia 1.2.6. Topologię generowaną przez tę bazę będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{T}(<)$.

Jeśli $<$ jest zwykłym porządkiem na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, to $\mathcal{T}(<)$ jest topologią euklidesową.

Niech $<$ będzie porządkiem leksykograficznym w kwadracie $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, tzn. $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ jeśli $x_1 < x_2$, lub też $x_1 = x_2$ i $y_1 < y_2$. Przestrzeń topologiczną $(I^2, \mathcal{T}(<))$ nazywa się kwadratem leksykograficznym. Kwadrat leksykograficzny nie jest przestrzenią metryzowalną (zob. Uzupełnienie 7.2 (A)).

Podzbiór przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ można rozpatrywać w naturalny sposób jako przestrzeń topologiczną, bo dla $Y \subset X$, rodzina $\{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ śladów na Y zbiorów otwartych w X jest topologią w Y, zob. 1.2.1. Przyjęta przez nas poniżej definicja podprzestrzeni jest zgodna z tym, co opisaliśmy w Uwadze 1.1.8 dla przestrzeni metrycznych.

Definicja 1.2.9. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią topologiczną i niech $Y \subset X$. Przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$, gdzie $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$, nazywamy podprzestrzenią przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$, a $\mathcal{T}_Y$ - topologią indukowaną w Y.*

Przykład 1.2.10. Niech $(I^2, \mathcal{T}(<))$ będzie kwadratem leksykograficznym i niech $S = (0,1] \times \{0\}$. Topologia indukowana $\mathcal{T}(<)_S$ na S jest generowana przez bazę złożoną ze zbiorów $(a,b] \times \{0\}$, gdzie $0 < a < b \leqslant 1$.

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z topologią generowaną przez bazę złożoną z odcinków $(a,b]$ nazywa się strzałką. Podprzestrzeń $(0,1]$ strzałki można więc utożsamiać z podprzestrzenią $(0,1] \times \{0\}$ kwadratu leksykograficznego. Strzałka nie jest metryzowalna, zob. Uzupełnienie 7.2 (A).

W przestrzeni metrycznej (X,d), dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieją rozłączne zbiory otwarte U_1, U_2 takie, że $x_i \in U_i$ - wystarczy przyjąć $U_i = B(x_i, r/2)$, gdzie $r = d(x_1, x_2)$.

Definicja 1.2.11. *Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią Hausdorffa, jeśli dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieją $U_i \in \mathcal{T}$ takie, że $x_i \in U_i$, oraz $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Przestrzenie niemetryzowalne opisane w przykładach 1.2.2 i 1.2.10 są przestrzeniami Hausdorffa.

Przykład 1.2.12. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Topologia $\mathcal{T} = \{U \subset X : U = \emptyset,$ lub $X \setminus U$ jest zbiorem skończonym$\}$ nazywa się topologią Zariskiego w X. W przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ każde dwa niepuste zbiory otwarte mają niepuste przecięcie, w szczególności przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nie jest Hausdorffa.

Definicja 1.2.13. *Otoczeniem punktu a w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy zbiór V taki, że dla pewnego $U \in \mathcal{T}$, $a \in U \subset V$.*

W przestrzeni metrycznej (X, d) otoczeniami punktu a są zbiory zawierające pewną kulę o środku w a.

Definicja 1.2.14. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną i $A \subset X$. Domknięcie $\overline{A}$ zbioru A jest zbiorem punktów $x \in X$ takich, że każde otoczenie x przecina A.*

W przestrzeniach metrycznych, często jest wygodnie opisywać domknięcie zbioru przy użyciu ciągów zbieżnych.

Definicja 1.2.15. *W przestrzeni metrycznej (X, d), ciąg punktów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu x_0, $x_n \to x_0$, jeśli $d(x_n, x_0) \to 0$.*

Twierdzenie 1.2.16. *W przestrzeni metrycznej (X, d), warunek $x_0 \in \overline{A}$ jest równoważny temu, że istnieje ciąg punktów $x_n \in A$ taki, że $x_n \to x_0$.*

Dowód. Niech $x_0 \in \overline{A}$. Kula $B(x_0, \frac{1}{n})$ jest otoczeniem x_0, istnieje więc $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$. Ponieważ $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$, $x_n \to x_0$.

Na odwrót, załóżmy, że $x_n \to x_0$ dla pewnego ciągu $x_n \in A$. Niech V będzie otoczeniem x_0 i niech $B(x_0, r) \subset V$. Wówczas, jeśli $d(x_0, x_n) < r$, to $x_n \in V$. Tak więc każde otoczenie punktu x_0 przecina A.

Definicja 1.2.17. *Zbiór A w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest domknięty, jeśli $\overline{A} = A$.*

Twierdzenie 1.2.18. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Wówczas*

(i) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

(ii) zbiór $A \subset X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest otwarte,

(iii) $\overline{A} = \bigcap\{F : F$ jest zbiorem domkniętym w X zawierającym $A\}$.

Dowód. (i) Inkluzja $\supset$ wynika stąd, że zbiór jest zawsze zawarty w swoim domknięciu. Aby uzasadnić przeciwną inkluzję, ustalmy $x_0 \in \overline{(\overline{A})}$. Niech V będzie otoczeniem x_0 i niech dla $U \in \mathcal{T}$, $x_0 \in U \subset V$. Ponieważ U jest otoczeniem x_0, istnieje $y \in U \cap \overline{A}$, a ponieważ U jest otoczeniem y, $U \cap A \neq \emptyset$. Tak więc, dowolne otoczenie x_0 przecina A, czyli $x_0 \in \overline{A}$.

(ii) Jeśli $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, $X \setminus A$ jest otoczeniem każdego punktu $x \notin A$, rozłącznym z A, skąd $\overline{A} = A$. Jeśli $\overline{A} = A$ i $x \notin A$, można wybrać otoczenie punktu x rozłączne z A, a więc istnieje $U_x \in \mathcal{T}$ takie, że $x \in U_x \subset X \setminus A$. Zatem $X \setminus A = \bigcup\{U_x : x \in X \setminus A\}$ jest zbiorem otwartym.

(iii) Jeśli F jest zbiorem domkniętym zawierającym A, to $\overline{A} \subset \overline{F} = F$, co dowodzi inkluzji $\subset$. Ponieważ, zgodnie z (i), $\overline{A}$ jest zbiorem domkniętym zawierającym A, mamy też inkluzję przeciwną.

Uwaga 1.2.19. (A) Z definicji topologii, oraz własności (ii) w Twierdzeniu 1.2.18 wynika natychmiast, że skończone sumy i dowolne przecięcia zbiorów domkniętych w przestrzeni topologicznej są zbiorami domkniętymi. Zmieniając punkt widzenia, zauważmy, że jeśli w zbiorze X wyróżniona jest rodzina zbiorów $\mathcal{F}$ zawierająca $\emptyset, X$ i zamknięta ze względu na operacje skończonych sum i dowolnych przecięć, to $\mathcal{T} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ jest topologią w X i $\mathcal{F}$ jest rodziną zbiorów domkniętych w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.

(B) Zauważmy, że jeśli $Y \subset X$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest podprzestrzenią przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$, to zbiór $A \subset Y$ jest domknięty w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = Y \cap B$ dla pewnego zbioru B domkniętego w $(X, \mathcal{T}_X)$.

Wynika to natychmiast z 1.2.18 (ii) i 1.2.9.

W szczególności, jeśli Y jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$, to każdy zbiór domknięty w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest też domknięty w przestrzeni X.

Definicja 1.2.20. *Wnętrzem IntA zbioru A w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy zbiór punktów, których pewne otoczenia są zawarte w A.*

Uwaga 1.2.21. Z definicji otoczeń 1.2.13 wynika, że wnętrze $\mathrm{Int}A$ jest sumą zbiorów otwartych zawartych w A, jest więc największym, w sensie inkluzji, otwartym podzbiorem zbioru A. Łatwo też sprawdzić, że $\mathrm{Int}A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

1.3. **Ciągłość przekształceń.** Klasyczna $(\varepsilon - \delta)$-definicja ciągłości funkcji rzeczywistej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przenosi się na przypadek przekształceń $f : X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi (X, d_X) i (Y, d_Y) w następujący sposób:

(1) $\forall_{a \in X}\ \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall_{x \in X}\ \ d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon.$

Część formuły (1) otrzymaną przez pominięcie pierwszych trzech kwantyfikatorów można zapisać w postaci $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$ lub też $B_X(a, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$, gdzie $B_X(a, \delta)$, $B_Y(f(a), \varepsilon)$ są kulami w (X, d_X) i (Y, d_Y), odpowiednio. Zastępując kule otoczeniami, można rozszerzyć pojęcie ciągłości na przekształcenia między dowolnymi przestrzeniami topologicznymi.

Przyjmiemy jednak jako definicję ciągłości przekształceń inny równoważny warunek (zob. Twierdzenie 1.3.2), mający prostsze sformułowanie.

Definicja 1.3.1. *Przekształcenie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe, jeśli dla każdego $U \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.*

Twierdzenie 1.3.2. *Dla przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) f jest przekształceniem ciągłym,

(ii) jeśli zbiór F jest domknięty w $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to $f^{-1}(F)$ jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$,

(iii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, dla każdego $A \subset X$,

(iv) dla każdego $a \in X$ i otoczenia U punktu $f(a)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ istnieje otoczenie V punktu a w $(X, \mathcal{T}_X)$ takie, że $f(V) \subset U$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (iv) Niech $a \in X$ i niech U będzie otoczeniem $f(a)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wybierzmy $W \in \mathcal{T}_Y$ takie, że $f(a) \in W \subset U$. Wówczas $V = f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$ jest otoczeniem punktu a i $f(V) \subset U$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Niech $a \in \overline{A}$. Mamy sprawdzić, że $f(a) \in \overline{f(A)}$. Wybierzmy dowolne otoczenie U punktu $f(a)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Na mocy (iv) istnieje otoczenie V punktu a w $(X, \mathcal{T}_X)$ takie, że $f(V) \subset U$. Ponieważ $a \in \overline{A}$, $V \cap A \neq \emptyset$, skąd $U \cap f(A) \supset f(V \cap A) \neq \emptyset$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Niech F będzie zbiorem domkniętym w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i $A = f^{-1}(F)$. Z (iii), $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$, skąd $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Tak więc $\overline{A} = A$, czyli zbiór A jest domknięty.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Wynika to natychmiast z faktu, że zbiory domknięte są dopełnieniami zbiorów otwartych, zob. 1.2.18, (ii).

Uwaga 1.3.3. Jeśli w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest wyróżniona baza $\mathcal{B}$ generująca topologię $\mathcal{T}_Y$, to dla dowodu ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$, gdzie $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią topologiczną, wystarczy sprawdzić, że $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ dla każdego $U \in \mathcal{B}$. Wynika to natychmiast z Definicji 1.3.1 i faktu, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$.

Uwaga 1.3.4. Ciągłość przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y) jest równoważna warunkowi, że jeśli $x_n \to x_0$, to $f(x_n) \to f(x_0)$, zob.1.2.15.

Istotnie, zgodnie z Twierdzeniem 1.2.16, ten warunek zapewnia własność (iii) w Twierdzeniu 1.3.2. Na odwrót, jeśli f jest przekształceniem ciągłym, $x_n \to x_0$ i $\varepsilon > 0$, to zgodnie z 1.3.2 (iv), dla pewnego otoczenia V punktu x_0, obraz $f(V)$ jest zawarty w kuli o środku w $f(x_0)$ i promieniu ε, a ponieważ prawie wszystkie wyrazy x_n leżą w V, $d_Y(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$, dla prawie wszystkich n. Zatem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Uwaga 1.3.5. (A) Dla ustalonego $a \in X$, własność (iv) w 1.3.2 definiuje ciągłość przekształcenia f w punkcie a. Dla przekształcenia między przestrzeniami metrycznymi, ciągłość w punkcie a jest więc opisana formułą (1), z pominięciem kwantyfikatora $\forall_{a \in X}$.

(B) Niech $f_n, f : X \to Y$ będą przekształceniami przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w przestrzeń metryczną (Y, d) takimi, że $\gamma_n = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \to 0$. Wówczas, jeśli wszystkie przekształcenia f_n są ciągłe w punkcie $a \in X$ (ze względu na topologię $\mathcal{T}(d)$ w Y), to także f jest ciągłe w tym punkcie.

Istotnie, niech U będzie otoczeniem punktu $f(a)$ w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}(d))$ i niech $B(f(a), r) \subset U$. Ustalmy n takie, że $\gamma_n < r/3$ i korzystając z ciągłości f_n w a wybierzmy otoczenie V punktu a w $(X, \mathcal{T})$ takie, że $f_n(V) \subset B(f_n(a), r/3)$. Wówczas, dla $x \in V$, $d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < 3 \cdot \frac{r}{3} = r$, a zatem $f(V) \subset U$.

Wprowadzimy teraz przekształcenia pozwalające na utożsamianie przestrzeni ze względu na własności, które można opisać w terminach topologii tych przestrzeni.

Definicja 1.3.6. *Przekształcenie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, jeśli f jest różnowartościowe, $f(X) = Y$ oraz oba przekształcenia f i $f^{-1} : Y \to X$ są ciągłe. Jeśli f jest homeomorfizmem przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ na podprzestrzeń $(f(X), (\mathcal{T}_Y)_{f(X)})$ przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$, mówimy, że f jest zanurzeniem homeomorficznym.*

Uwaga 1.3.7. Z Definicji 1.3.1 wynika natychmiast, że złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe. W szczególności, złożenie homeomorfizmów jest homeomorfizmem.

Przykład 1.3.8. (A) Każde dwa otwarte zbiory wypukłe w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ (rozpatrywane jako podprzestrzenie) są homeomorficzne, zob. Uzupełnienie 7.1.

Jednakże, każde ciągłe przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ płaszczyzny w prostą ma nieprzeliczalną warstwę. Aby to sprawdzić, rozpatrzmy funkcje $f_x(y) = f(x, y)$, dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc $f_x(\mathbb{R})$ jest przedziałem. Jeśli jeden z tych przedziałów redukuje się do punktu, $f_x(\mathbb{R}) = \{r\}$, mamy $f^{-1}(r) = \{x\} \times \mathbb{R}$. W przeciwnym razie, zawsze istnieje liczba wymierna $q_x \in f_x(\mathbb{R})$. Dla pewnej liczby wymiernej q zbiór $\{x : q_x = q\}$ jest nieprzeliczalny, a więc warstwa $f^{-1}(q)$ jest nieprzeliczalna.

(B) Przekształcenie $f(t) = (\cos t, \sin t)$ odcinka $[0, 2\pi)$ na prostej euklidesowej na okrąg $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (z topologią podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej) jest ciągłą bijekcją, ale nie jest homeomorfizmem. Istotnie, dla $a_n = (\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n}))$, $a_n \to f(0)$, ale $f^{-1}(a_n) \not\to 0$. Zauważmy też, że nie istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie $g : S^1 \to \mathbb{R}$. Załóżmy przeciwnie i rozpatrzmy złożenie $g \circ f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$. Przekształcenie $g \circ f$ jest ciągłe i różnowartościowe, a więc jest albo rosnące, albo malejące. W pierwszym przypadku $g \circ f(0) < g(a_1) < g(a_2) < \ldots$, bo $g(a_n) = g \circ f(2\pi - \frac{1}{n})$, oraz $g(a_n) \to g \circ f(0)$, co jest niemożliwe. Podobnie do sprzeczności dochodzi się, jeśli $g \circ f$ maleje.

Zakończymy tę część obserwacją dotyczącą dwóch typowych operacji: obcięcia i kombinacji przekształceń.

Uwaga 1.3.9. (A) Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i niech $Z \subset X$. Wówczas obcięcie $f \mid Z : Z \to Y$ jest przekształceniem ciągłym, gdzie w Z rozpatruje się topologię podprzestrzeni przestrzeni X. Ponadto $f \mid Z$ jest ciągłe jako przekształcenie z Z na podprzestrzeń $f(Z)$ przestrzeni Y.

Istotnie, zbiory otwarte w $f(Z)$ są postaci $W = U \cap f(Z)$, gdzie $U \in \mathcal{T}_Y$, a $(f \mid Z)^{-1}(W) = f^{-1}(U) \cap Z$ jest zbiorem otwartym w Z, bo $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

(B) Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli $X = F_1 \cup \ldots \cup F_m$, gdzie każdy ze zbiorów F_i jest domknięty i każde obcięcie $f \mid F_i : F_i \to Y$ jest ciągłe, to przekształcenie f jest ciągłe.

Istotnie, dla dowolnego zbioru domkniętego F w Y, zbiór $A_i = f^{-1}(F) \cap F_i$ jest domknięty w przestrzeni $(F_i, \mathcal{T}_{F_i})$, a ponieważ F_i jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$, zbiór A_i jest też domknięty w X, zob. 1.2.19 (B). Zatem $f^{-1}(F) = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ jest zbiorem domkniętym w X.

Podobnie sprawdza się, że jeśli $X = \bigcup_{s \in S} U_s$, $U_s \in \mathcal{T}_X$ i obcięcia $f \mid U_s : U_s \to Y$ są ciągłe, to f jest przekształceniem ciągłym.

1.4. **Iloczyny skończone przestrzeni topologicznych.**

Definicja 1.4.1. *Niech* $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *będą przestrzeniami topologicznymi. Rodzina* $\mathcal{B}$ *iloczynów kartezjańskich* $V_1 \times \ldots \times V_n$ *zbiorów otwartych* $V_i \in \mathcal{T}_i$ *spełnia warunki (i), (ii) w 1.2.6, a więc jest bazą pewnej topologii w iloczynie kartezjańskim* $X_1 \times \ldots \times X_n$. *Przestrzeń* $(X_1 \times \ldots \times X_n, \mathcal{T})$ *z topologią* $\mathcal{T}$ *generowaną przez bazę* $\mathcal{B}$ *nazywamy iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych* $(X_i, \mathcal{T}_i)$.

Twierdzenie 1.4.2. *Niech* $\mathcal{T}_i$, *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$, *będzie topologią w* X_i *generowaną przez metrykę* d_i. *Wówczas topologia w iloczynie kartezjańskim* $(X_1 \times \ldots \times X_n, \mathcal{T})$ *przestrzeni* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *jest generowana przez metrykę* $d(a, b) = \max_i d_i(a_i, b_i)$, *gdzie* $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$.

Dowód. Kule w przestrzeni metrycznej $(X_1 \times \ldots X_n, d)$ mają postać

(1) $B(a, r) = B_1(a_1, r) \times \ldots \times B_n(a_n, r)$,

gdzie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $B_i(a_i, r)$ jest kulą w przestrzeni (X_i, d_i) o środku w a_i i promieniu r. Wynika stąd, że $\mathcal{T}(d) \subset \mathcal{T}$. Niech teraz $U \in \mathcal{T}$ i $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Istnieją $V_i \in \mathcal{T}_i$ takie, że $a \in V_1 \times \ldots \times V_n \subset U$ i niech $B_i(a_i, r_i) \subset V_i$. Przyjmując $r = \min\{r_i : i = 1, \ldots, n\}$ mamy wówczas, zgodnie z (1), $B(a, r) \subset U$. To dowodzi, że $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(d)$.

Uwaga 1.4.3. Z 1.1.6 (A) i 1.4.2 wynika w szczególności, że topologia euklidesowa w $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest identyczna z topologią iloczynu kartezjańskiego prostych euklidesowych.

Uwaga 1.4.4. Metryka $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na kwadracie kartezjańskim przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(d))$. Z nierówności trójkąta można bowiem wyprowadzić, że $|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leqslant d(x, x_0) + d(y, y_0)$.

Uwaga 1.4.5. Niech $(X_1 \times \ldots \times X_n, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, i niech $p_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ będą rzutowaniami, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

(A) Rzutowania p_i są ciągłe. Istotnie, jeśli $U \in \mathcal{T}_i$, to $p_i^{-1}(U) = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n \in \mathcal{T}$.

(B) Niech $f : Z \to X_1 \times \ldots \times X_n$ będzie przekształceniem określonym na przestrzeni topologicznej $(Z, \mathcal{T}_Z)$. Przekształcenie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie złożenia $p_i \circ f : Z \to X_i$ są ciągłe.

Z (A) dostajemy natychmiast, że z ciągłości f wynika ciągłość każdego złożenia $p_i \circ f$. Dla wykazania przeciwnej implikacji, zgodnie z 1.3.3 i 1.4.1 wystarczy sprawdzić, że ciągłość złożeń $p_i \circ f$ zapewnia otwartość przeciwobrazów $f^{-1}(V_1 \times \ldots \times V_n)$, dla dowolnych $V_i \in \mathcal{T}_i$, co wynika z formuły $f^{-1}(V_1 \times \ldots \times V_n) = (p_1 \circ f)^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap (p_n \circ f)^{-1}(V_n)$.

1.5. **Iloczyny przeliczalne przestrzeni topologicznych.**

Definicja 1.5.1. *Niech $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, będzie ciągiem przestrzeni topologicznych. Rodzina $\mathcal{B}$ iloczynów kartezjańskich $V_1 \times \ldots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots$, gdzie $V_i \in \mathcal{T}_i$, jest bazą pewnej topologii w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times X_2 \times \ldots$ Przestrzeń $(X_1 \times X_2 \times \ldots, \mathcal{T})$ z topologią $\mathcal{T}$ generowaną przez bazę $\mathcal{B}$ nazywamy iloczynem kartezjańskim ciągu przestrzeni $(X_i, \mathcal{T}_i)$.*

Przypomnijmy, zob. Przykład 1.1.6 (B), że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to metryka $\min(d, 1)$ generuje w X tę samą topologię, co metryka d.

Twierdzenie 1.5.2. *Jeśli topologia $\mathcal{T}_i$ w przestrzeni X_i jest generowana przez metrykę d_i, $i = 1, 2, \ldots$, to topologia w iloczynie kartezjańskim $(X_1 \times X_2 \times \ldots, \mathcal{T})$ tego ciągu przestrzeni jest generowana przez metrykę $d = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min(d_i, 1)$.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\mathcal{T}(d) \subset \mathcal{T}$. Wystarczy sprawdzić, że dla dowolnej kuli $B(a, r)$, $a = (a_1, a_2, \ldots)$, istnieje element B bazy $\mathcal{B}$ opisanej w 1.5.1, taki, że $a \in B \subset B(a, r)$. Niech $B_i(a_i, s)$ oznacza kulę w (X_i, d_i) o środku w a_i i promieniu s. Wybierzmy n takie, że $2^{-n} < \frac{r}{2}$. Wówczas, dla $B = B_1(a_1, \frac{r}{2}) \times \ldots \times B_n(a_n, \frac{r}{2}) \times X_{n+1} \times \ldots$, $B \subset B(a, r)$.

Ustalmy teraz $U \in \mathcal{T}$ i $a = (a_1, a_2, \ldots) \in U$. Istnieją $V_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, \ldots, n$, takie, że $a \in V_1 \times \ldots \times V_n \times X_{n+1} \times \ldots \subset U$ i niech $B_i(a_i, r_i) \subset V_i$, $r_i < 1$. Wówczas, dla $r = \min\{2^{-i} r_i : i = 1, \ldots, n\}$, $B(a, r) \subset B_1(a_1, r_1) \times \ldots \times B_n(a_n, r_n) \times X_{n+1} \times \ldots \subset U$. To pokazuje, że $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(d)$.

Uwaga 1.5.3. Topologia w iloczynie kartezjańskim rozpatrywanym w 1.5.2 jest też generowana przez metrykę $\max\{\min(d_i, 2^{-i}) : i = 1, 2, \ldots\}$, zob. 1.1.6 (B), nieco bliższą metryce określonej w 1.4.2.

1.6. **Twierdzenie Tietzego o przedłużaniu przekształceń.**

Mówiąc o ciągłości przekształcenia $f : X \to \mathbb{R}$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w prostą rzeczywistą bez dodatkowych wyjaśnień, będziemy mieli na myśli ciągłość ze względu na topologię euklidesową w $\mathbb{R}$.

W przestrzeni metrycznej (X, d), z każdym niepustym zbiorem $A \subset X$ można związać funkcję

(1) $\quad d_A(x) = \inf\{d(x, z) : z \in A\}$,

mierzącą odległość punktów od tego zbioru. Sprawdzimy, że

(2) $\quad |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant d(x, y)$.

Dla dowolnego $z \in A$, $d_A(y) \leqslant d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z)$. Stąd, z (1), $d_A(y) \leqslant d(y, x) + d_A(x)$, czyli $d_A(y) - d_A(x) \leqslant d(y, x)$. Wobec symetrii założeń, także $d_A(x) - d_A(y) \leqslant d(x, y)$, otrzymujemy więc (2).

Własność (2) zapewnia ciągłość funkcji d_A, zob. warunek (1) w 1.3.

Uwaga 1.6.1. Niech W będzie zbiorem otwartym w przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$. Istnieje wówczas funkcja ciągła $\varphi : X \to [0, +\infty)$ taka, że $W = \{x \in X : \varphi(x) > 0\}$. Istotnie, dla $W \neq X$ przyjmijmy $\varphi = d_{X \setminus W}$, gdzie metryka d generuje topologię $\mathcal{T}$.

Twierdzenie 1.6.2 (o rozkładach jedynki). *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią metryzowalną i niech $X = W_1 \cup \ldots \cup W_m$, gdzie W_i są zbiorami otwartymi. Istnieją wówczas funkcje ciągłe $\lambda_i : X \to [0,1]$ takie, że $\{x : \lambda_i(x) > 0\} \subset W_i$, $i = 1, \ldots, m$, oraz $\sum_{i=1}^m \lambda_i(x) = 1$, dla $x \in X$.*

Dowód. Niech φ_i będzie funkcją opisaną w Uwadze 1.6.1 dla $W = W_i$, $\sigma = \sum_{i=1}^m \varphi_i$. Zauważmy, że jeśli $x \in W_i$, to $\varphi_i(x) > 0$, a więc $\sigma > 0$. Przyjmując $\lambda_i = \frac{\varphi_i}{\sigma}$ otrzymujemy funkcje z żądanymi własnościami.

Twierdzenie Tietzego o przedłużaniu (Wniosek 1.6.5) wyprowadzimy z twierdzenia Hahna o wpisywaniu funkcji ciągłej między parę funkcji półciągłych.

Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest półciągła z góry (z dołu), jeśli zbiory $\{x : f(x) < r\}$ ($\{x : f(x) > r\}$) są otwarte.

Przykład 1.6.3. Niech $f : A \to [a,b]$ będzie funkcją ciągłą na podprzestrzeni $(A, \mathcal{T}_A)$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, $\overline{A} = A$ i niech

$$u(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \in A, \\ a, & \text{jeśli } x \notin A, \end{cases} \qquad w(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \in A, \\ b, & \text{jeśli } x \notin A. \end{cases}$$

Wówczas funkcja u jest półciągła z góry, a funkcja w jest półciągła z dołu.

Twierdzenie 1.6.4 (Hahn). *Niech $u, w : X \to [a,b]$ będą funkcjami na przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$ takimi, że*

(i) $u \leqslant w$,

(ii) u jest półciągła z góry, w jest półciągła z dołu.

Istnieje wówczas funkcja ciągła $f : X \to [a,b]$ taka, że $u \leqslant f \leqslant w$.

Dowód. (A) Wykażemy najpierw słabszą tezę, że jeśli u, w spełniają warunki (i) i (ii), to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $g : X \to [a,b]$ taka, że $u - \varepsilon \leqslant g \leqslant w + \varepsilon$.

W tym celu, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, pokryjmy $[a,b]$ przedziałami (a_i, b_i) o długościach $< \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$. Z (ii), zbiory

(3) $\quad W_i = \{x : u(x) < b_i\} \cap \{x : w(x) > a_i\}$

są otwarte. Jeśli $[u(x), w(x)] \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$, to $x \in W_i$, a więc $X = W_1 \cup \ldots \cup W_m$. Niech $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ będzie rozkładem jedynki opisanym w 1.6.2. Funkcję ciągłą g określamy formułą

(4) $\quad g(x) = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i(x)$, gdzie $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$.

Jeśli $x \in W_i$, to z (3), $u(x) - \varepsilon \leqslant c_i \leqslant w(x) + \varepsilon$, a ponieważ z (4), $g(x)$ jest kombinacją wypukłą punktów c_i, którym odpowiadają zbiory W_i zawierające x, także $u(x) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant w(x) + \varepsilon$.

(B) Niech u, w spełniają założenia twierdzenia. Korzystając z (A) określimy indukcyjnie funkcje półciągłe z góry $u_i : X \to [a,b]$, funkcje półciągłe z dołu $w_i : X \to [a,b]$, oraz funkcje ciągłe $g_i : X \to [a,b]$ takie, że

(5) $\quad u = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_i \leqslant \ldots \leqslant w_i \leqslant w_1 \leqslant w_0 = w$,

(6) $\quad g_i - 1/i \leqslant u_i \leqslant w_i \leqslant g_i + 1/i, \quad i = 1, 2, \ldots$

Jeśli u_{i-1}, w_{i-1} są już określone, (A) zapewnia istnienie funkcji ciągłej $g_i : X \to [a,b]$ takiej, że $u_{i-1} - 1/i \leqslant g_i \leqslant w_{i-1} + 1/i$. Przyjmijmy $u_i = \max\{g_i - 1/i, u_{i-1}\}$, $w_i = \min\{g_i + 1/i, w_{i-1}\}$ i zauważmy, że $u_i \leqslant w_i$, bo $g_i - 1/i \leqslant w_{i-1}$ oraz $g_i + 1/i \geqslant u_{i-1}$.

Z (5) i (6) wynika, że ciągi funkcji u_i, w_i zbiegają punktowo do wspólnej granicy $f : X \to [a, b]$, przy czym, z (6), $|f(x) - g_i(x)| \leqslant 1/i$, dla $x \in X$, $i = 1, 2, \ldots$. Z (5), $u \leqslant f \leqslant w$, a ciągłość funkcji f wynika z Uwagi 1.3.5.

Wniosek 1.6.5 (Twierdzenie Tietzego)**.** *Niech $f : A \to [a, b]$ będzie funkcją ciągłą określoną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$. Istnieje wówczas funkcja ciągła $\overline{f} : X \to [a, b]$ taka, że $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$.*

Dowód. Przedłużenie f do funkcji ciągłej na X otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 1.6.4, wpisując funkcję ciągła między funkcje półciągłe opisane w Przykładzie 1.6.3.

Uwaga 1.6.6. Każdą funkcję ciągłą $f : A \to \mathbb{R}^n$ określoną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$ można przedłużyć do funkcji ciągłej $\overline{f} : X \to \mathbb{R}^n$.

Istotnie, z Uwagi 1.4.5 (B) wynika, że wystarczy sprawdzić, że każdą funkcję ciągłą $f : A \to \mathbb{R}$ można przedłużyć do funkcji ciągłej $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$. Składając f z homeomorfizmem $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, możemy rozpatrywać funkcję przyjmującą wartości w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$. Wniosek 1.6.5 zapewnia istnienie funkcji ciągłych $g : X \to [-\pi/2, \pi/2]$, oraz $h : X \to [0, 1]$ takich, że $g(x) = f(x)$, dla $x \in A$, oraz h przyjmuje wartość 1 na A i 0 na $g^{-1}(\{-\pi/2, \pi/2\})$. Wówczas iloczyn $\overline{f} = g{\cdot}h$ jest ciągłym przedłużeniem f przyjmującym wartości w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

W Zadaniu 1.44 podajemy formułę opisującą operację przedłużania funkcji pochodzącą z książki J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Twierdzenie 4.5.1. Formuła odwołuje się do metryki w przestrzeni X, podczas gdy podany przez nas dowód przenosi się na ogólniejsze klasy przestrzeni, w których spełniona jest teza Twierdzenia 1.6.2.

1.7. **Ośrodkowość.** Przestrzenie metryzowalne, których topologia ma przeliczalną bazę, stanowią niezwykle ważną klasę przestrzeni. Dla przestrzeni metryzowalnych, istnienie bazy przeliczalnej jest równoważne własności, którą opiszemy poniżej.

Definicja 1.7.1. *(A) Zbiór A w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest gęsty, jeśli $\overline{A} = X$.*

(B) Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, jeśli zawiera przeliczalny podzbiór gęsty.

Przestrzenie euklidesowe są ośrodkowe, bo zbiór punktów w $\mathbb{R}^n$ o wszystkich współrzędnych wymiernych jest przeliczalny i gęsty w $(\mathbb{R}^n, d_e)$. Podobnie uzasadnia się ośrodkowość przestrzeni opisanych w 1.1.7 (B). Przestrzeń określona w 1.1.7 (A) nie jest ośrodkowa: dla każdego $A \subset \mathbb{R}$ w tej przestrzeni metrycznej, $\overline{A} \subset A \cup \{0\}$.

Jeśli topologia $\mathcal{T}$ w X ma przeliczalną bazę $\mathcal{B}$, to wybierając z każdego niepustego zbioru $B \in \mathcal{B}$ punkt a_B, otrzymamy przeliczalny gęsty podzbiór X. Istnienie przeliczalnej bazy implikuje więc ośrodkowość. Dla przestrzeni metryzowalnych prawdziwa jest implikacja odwrotna.

Twierdzenie 1.7.2. *Topologia metryzowalnej przestrzeni ośrodkowej ma przeliczalną bazę.*

Dowód. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i niech A będzie przeliczalnym zbiorem gęstym w $(X,\mathcal{T}(d))$. Wówczas baza topologii $\mathcal{T}(d)$ opisana w Przykładzie 1.2.5 jest przeliczalna.

Wniosek 1.7.3. *Wszystkie podprzestrzenie przestrzeni euklidesowych są ośrodkowe.*

Dowód. Jeśli $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_X$ jest topologią X generowaną przez metrykę euklidesową d_e na X, a $\mathcal{B}$ jest przeliczalną bazą topologii euklidesowej $\mathbb{R}^n$, to $\{B \cap X : B \in \mathcal{B}\}$ jest przeliczalną bazą $\mathcal{T}_X$, zob. 1.1.8.

Przestrzeń opisana w Przykładzie 1.2.2 jest ośrodkowa, ale, jak wynika z rozumowania podanego w 1.2.2, topologia tej przestrzeni nie ma bazy przeliczalnej.

Przykład 1.7.4. Niech $(C_b(X), d_{\sup})$ będzie przestrzenią ograniczonych funkcji ciągłych $f : X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{T})$ z metryką
$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$.

(A) Przestrzeń $(C_b([0,1]), d_{\sup})$ jest ośrodkowa, bo zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa o aproksymacji, zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych (rozpatrywanych jako funkcje na $[0,1]$) jest gęsty w tej przestrzeni.

(B) Przestrzeń $(C_b(\mathbb{R}), d_{\sup})$ nie jest ośrodkowa. Dla uzasadnienia, rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{S}$ wszystkich niepustych podzbiorów liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i z każdym $S \in \mathcal{S}$ zwiążmy funkcję $f_S \in C_b(\mathbb{R})$ określoną formułą $f_S(x) = \min\{d_S(x), 1\}$, gdzie $d_S(x) = \inf\{|x - z| : z \in S\}$, zob. (1) w 1.6. Jeśli $n \in S \setminus T$, $S, T \in \mathcal{S}$, to $f_S(n) = 0$, $f_T(n) = 1$, a więc $d_{\sup}(f_S, f_T) = 1$.

Niech $A \subset C_b(\mathbb{R})$ będzie zbiorem gęstym. Dla każdego $S \in \mathcal{S}$ istnieje $g_S \in A$ takie, że $d_{\sup}(f_S, g_S) < 1/2$. Wówczas, dla $S \neq T$, $S, T \in \mathcal{S}$, $g_S \neq g_T$, a więc zbiór A jest nieprzeliczalny, bo $\mathcal{S}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

2. Zwartość

2.1. **Przestrzenie zwarte.** Wprowadzając pojęcie zwartości, wskażemy najpierw w Twierdzeniu 2.1.4 trzy własności, które są równoważne w klasie przestrzeni metryzowalnych, a następnie pierwszą z nich przyjmiemy jako definicję zwartości w klasie przestrzeni Hausdorffa, zob. 1.2.11. Dwie pozostałe własności opisane w tym twierdzeniu są bardzo użyteczne dla przestrzeni metryzowalnych, ale poza tą klasą przestrzeni okazują się istotnie różne (zob. Zadanie 7.26 (A), (C)) i są mniej przydatne niż wyróżniona przez nas własność pokryciowa.

Definicja 2.1.1. *Niech $(X,\mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną.*

(A) Rodzina zbiorów $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem zbioru $A \subset X$, jeśli $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ i $A \subset \bigcup \mathcal{U}$.

(B) Punkt $a \in X$ jest punktem skupienia ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ w X, jeśli każde otoczenie a zawiera wyrazy a_n dla nieskończenie wielu indeksów n.

Uwaga 2.1.2. W przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$, punkt a jest punktem skupienia ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wtedy i tylko wtedy, gdy pewien podciąg tego ciągu jest zbieżny do a, tzn. istnieje ściśle rosnąca funkcja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $a_{\varphi(n)} \to a$.

Istotnie, jeśli a jest punktem skupienia ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i metryka d generuje topologię $\mathcal{T}$, możemy wybrać indeksy $\varphi(1) < \varphi(2) < \ldots$ takie, że $d(a, a_{\varphi(n)}) < \frac{1}{n}$. Wówczas $a_{\varphi(n)} \to a$.

Lemat 2.1.3. *Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d), $\mathcal{U}$ otwartym (w topologii $\mathcal{T}(d)$) pokryciem A i załóżmy, że z każdego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów w A można wybrać podciąg zbieżny do pewnego $a \in A$. Wówczas istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego $a \in A$, kula $B(a, \delta)$ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że taka liczba $\delta > 0$ nie istnieje. Wówczas dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje $a_n \in A$ takie, że $B(a_n, 1/n)$ nie leży w żadnym elemencie $\mathcal{U}$. Pokażemy, że żaden punkt $a \in A$ nie jest granicą podciągu ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ustalmy $a \in A$, $U \in \mathcal{U}$ zawierające a i $r > 0$ takie, że $B(a, r) \subset U$. Jeśli $a_n \in B(a, r/2)$, to $B(a_n, r/2) \subset U$ i z definicji a_n mamy $1/n > r/2$. Zatem $a_n \notin B(a, r/2)$ dla $n \geqslant 2/r$, więc żaden podciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do a.

Liczbę $\delta > 0$ opisaną w lemacie nazywa się *liczbą Lebesgue'a* pokrycia $\mathcal{U}$ zbioru $A \subset X$. W dowodzie Twierdzenia 2.1.4 będziemy korzystali z istnienia liczby Lebesgue'a dla pokrycia całej przestrzeni X.

Twierdzenie 2.1.4. *Dla przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$ następujące warunki są równoważne:*

(i) z każdego otwartego pokrycia przestrzeni X można wybrać pokrycie skończone,

(ii) z każdego ciągu punktów w X można wybrać podciąg zbieżny w tej przestrzeni,

(iii) każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych w X ma niepuste przecięcie.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni X. Ustalmy w X metrykę d generującą topologię w X i niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia $\mathcal{U}$, zob. 2.1.3. Dążąc do sprzeczności, załóżmy, że przestrzeni X nie można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$.

Każda kula $B(x, \delta)$ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$, więc zgodnie z założeniem o $\mathcal{U}$, przestrzeń X nie jest sumą skończenie wielu takich kul. Możemy zatem wybrać w X ciąg punktów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że dla $n = 2, 3, \ldots$, $a_n \notin \bigcup_{m<n} B(a_m, \delta)$. Niech $a \in X$ będzie dowolnym punktem. Ponieważ dla $m < n$ mamy $d(a_m, a_n) \geqslant \delta$, kula $B(a, \delta/2)$ zawiera co najwyżej jeden wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Punkt a nie może więc być granicą żadnego podciągu tego ciągu.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Niech $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ będą domkniętymi, niepustymi zbiorami w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$. Załóżmy przeciwnie, że $\bigcap_i F_i = \emptyset$. Wówczas rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U} = \{X \setminus F_i : i = 1, 2, \ldots\}$ pokrywa X, bo $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus \bigcap_i F_i$. Z (i), dla pewnego n mamy $X = (X \setminus F_1) \cup \ldots \cup (X \setminus F_n) = X \setminus F_n$, a więc otrzymujemy sprzeczność.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem punktów w przestrzeni X i niech $F_i = \overline{\{a_n : n \geqslant i\}}$. Ponieważ $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, warunek (iii) zapewnia istnienie $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Każde otoczenie punktu a przecina każdy zbiór $\{a_n : n \geqslant i\}$, co oznacza, że a jest punktem skupienia ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a więc, zgodnie z 2.1.2, pewien podciąg tego ciągu zbiega do a.

Definicja 2.1.5. *Przestrzeń metryzowalna jest zwarta, jeśli spełnia którykolwiek z równoważnych warunków w Twierdzeniu 2.1.4.*

Uwaga 2.1.6. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $A \subset X$ i A jest zwarty w topologii generowanej przez metrykę d na A, to zgodnie z Lematem 2.1.3, dla dowolnego pokrycia otwartego zbioru A w X istnieje liczba Lebesgue'a.

Przykład 2.1.7. Domknięty odcinek $[a, b]$ na prostej euklidesowej jest zwarty.

Istotnie, jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem punktów z $[a, b]$, to $c = \sup\{r \in [a, b] : [r, b]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów $a_n\}$ jest punktem skupienia tego ciągu, a więc jest granicą pewnego podciągu tego ciągu, zob. 2.1.2.

Uwaga 2.1.8. Iloczyn kartezjański skończenie wielu zwartych przestrzeni metryzowalnych $(X_i, \mathcal{T}(d_i))$, $i = 1, \ldots, m$, jest przestrzenią zwartą.

Jest to szczególny przypadek twierdzenia, które udowodnimy w 2.4, warto jednak podać także jego bezpośrednie uzasadnienie. Odwołując się do indukcji, można ograniczyć się do iloczynu kartezjańskiego dwóch przestrzeni $X_1 \times X_2$. Niech $a_n = (x_n, y_n) \in X_1 \times X_2$, $n = 1, 2, \ldots$. Korzystając z własności (ii) w Twierdzeniu 2.1.4, można określić funkcję rosnącą $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że $x_{\varphi(n)} \to x_0$, a następnie, dla podciągu $(y_{\varphi(n)})_{n=1}^{\infty}$, funkcję rosnącą $\psi : \mathbb{N} \to \varphi(\mathbb{N})$ taką, że $y_{\psi(n)} \to y_0$. Wówczas $a_{\psi(n)} \to (x_0, y_0)$.

Definicja 2.1.9. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta, jeśli jest przestrzenią Hausdorffa i z każdego otwartego pokrycia tej przestrzeni można wybrać pokrycie skończone.*

Przykład 2.1.10. Kwadrat leksykograficzny określony w 1.2.8 jest przestrzenią zwartą, która nie jest metryzowalna, zob. Uzupełnienie 7.2

Przestrzeń z Przykładu 1.2.12 ma wprawdzie własność pokryciową wymaganą w 2.1.9, nie jest jednak Hausdorffa, a więc nie jest zwarta.

Na zakończenie tej części, rozpatrzymy zwartość podprzestrzeni przestrzeni Hausdorffa. Zauważmy, że każda podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa – wynika to natychmiast z określenia topologii podprzestrzeni 1.2.9.

Definicja 2.1.11. *Zbiór K w przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ jest zwarty, jeśli podprzestrzeń $(K, \mathcal{T}_K)$ jest zwarta.*

Z definicji topologii indukowanej na podzbiorze wynika, że zwartość podprzestrzeni $(K, \mathcal{T}_K)$ przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ oznacza, że jeśli $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem zbioru K, to dla pewnej rodziny skończonej $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $K \subset \bigcup \mathcal{W}$.

Uwaga 2.1.12. Zauważmy też, że jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą i K jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni, to K jest zbiorem zwartym.

Istotnie, jeśli $K \subset \bigcup \mathcal{U}$ i $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, to $\mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni X, istnieje więc rodzina skończona $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$ pokrywająca X i $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ jest skończonym pokryciem zbioru K.

Twierdzenie 2.1.13. *Zbiór zwarty w przestrzeni Hausdorffa jest domknięty.*

Dowód. Niech K będzie zbiorem zwartym w przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ i niech $a \notin K$. Dla każdego $x \in K$ wybierzmy parę rozłącznych zbiorów otwartych $V(x), W(x) \in \mathcal{T}$ takich, że $a \in V(x)$ i $x \in W(x)$. Ze zwartości K, można wybrać $x_1, \ldots, x_n \in K$ tak, aby $K \subset W(x_1) \cup \ldots \cup W(x_n) = W$. Wówczas $V = V(x_1) \cap \ldots \cap V(x_n)$ jest otoczeniem a rozłącznym z W, a więc i z K. Zatem $a \notin \overline{K}$, co pokazuje, że $\overline{K} = K$.

Dla przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T}(d))$, można to twierdzenie uzasadnić nieco prościej, odwołując się do warunku (iii) w 2.1.4: jeśli K jest zwarty i $a \in \overline{K}$, to dla ciągu $F_n = \overline{B(a, 1/n)} \cap K$ niepustych zbiorów domkniętych w przestrzeni $(K, \mathcal{T}(d)_K)$ mamy $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset \{a\}$, zatem $a \in K$.

Będziemy mówić, że zbiór w przestrzeni metrycznej jest ograniczony, jeśli leży w pewnej kuli w tej przestrzeni.

Wniosek 2.1.14. *Podzbiór przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem zwartym w $(\mathbb{R}^n, d_e)$. Domkniętość A wynika z 2.1.13. Dla dowodu ograniczoności zauważmy, że rodzina kul $B(\mathbf{0}, 1), B(\mathbf{0}, 2), \ldots$ pokrywa A i wybierając z tego pokrycia pokrycie skończone, mamy $A \subset B(\mathbf{0}, n)$ dla pewnego n.

Na odwrót, każdy zbiór ograniczony A w $(\mathbb{R}^n, d_e)$ leży w pewnej kostce $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, która jest zwarta, na mocy Uwagi 2.1.8. Jeśli $\overline{A} = A$, wynika stąd zwartość A, zob. Uwaga 2.1.12.

2.2. **Przekształcenia ciągłe przestrzeni zwartych.**

Twierdzenie 2.2.1. *Przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przeprowadza zbiory zwarte w X na zbiory zwarte w Y.*

Dowód. Niech K będzie zbiorem zwartym w przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i niech $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_Y$ będzie otwartym pokryciem jego obrazu $f(K)$. Rodzina $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{T}_X$ pokrywa K, a więc ze zwartości, $K \subset f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_m)$, dla pewnych $U_i \in \mathcal{U}$. Wówczas $f(K) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$.

Wniosek 2.2.2 (Twierdzenie Weierstrassa)**.** *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$. Dla każdego zbioru zwartego $K \subset X$ istnieją punkty $a, b \in K$ takie, że $f(a) = \sup f(K)$, $f(b) = \inf f(K)$.*

Dowód. Zgodnie z 2.2.1, zbiór $f(K)$ jest zwarty, a więc jest domknięty i ograniczony na prostej euklidesowej, zob. 2.1.14. Zatem $\sup f(K)$ i $\inf f(K)$ są elementami $f(K)$, co oznacza istnienie punktów a i b opisanych we Wniosku.

Jak zauważyliśmy w 1.3.8 (B), ciągła bijekcja nie musi być homeomorfizmem. Dodatkowe założenie zwartości zmienia jednak sytuację.

Wniosek 2.2.3. *Ciągłe i różnowartościowe przekształcenie przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa jest homeomorfizmem.*

Dowód. Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłą bijekcją, gdzie $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią zwartą, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa. Mamy wykazać, że przekształcenie odwrotne $f^{-1} : Y \to X$ jest ciągłe, to znaczy, jeśli $F \subset X$ jest zbiorem domkniętym, to $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ jest zbiorem domkniętym w Y. Z domkniętości F w przestrzeni zwartej X wynika zwartość F, zatem $f(F)$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni Hausdorffa Y, a więc domkniętym w Y, zob. 2.1.13.

Zakończymy tę część twierdzeniem dotyczącym przestrzeni metrycznych. Do tego kręgu zagadnień wrócimy jeszcze w części 3.4.

Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, mówiąc o zwartości w tej przestrzeni będziemy mieli na myśli topologię $\mathcal{T}(d)$ generowaną przez metrykę d.

Twierdzenie 2.2.4. *Każde przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ zwartej przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y) jest jednostajnie ciągłe, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{a,b\in X}\ \ d_X(a,b) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

Dowód. Kule w przestrzeniach (X, d_X) i (Y, d_Y) oznaczać będziemy odpowiednio symbolami $B_X(x, r)$ i $B_Y(y, r)$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a dla pokrycia

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(B_Y(y, \varepsilon/2)) : y \in Y\} \subset \mathcal{T}(d_X)$$

przestrzeni zwartej X, zob. 2.1.6. Każda kula $B_X(a, \delta)$ jest zawarta w pewnym elemencie $\mathcal{U}$, a więc jej obraz leży w pewnej kuli $B_Y(y, \varepsilon/2)$. Wynika stąd, że jeśli $d_X(a, b) < \delta$, to $d_Y(f(a), f(b)) < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$.

2.3. **Zbiór Cantora.** Rodzina $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ przedziałów domkniętych na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ jest systemem diadycznym, jeśli:

(1) $\mathcal{D}_n$ składa się z 2^n parami rozłącznych przedziałów domkniętych,

(2) każdy przedział z $\mathcal{D}_n$ zawiera dokładnie dwa przedziały z $\mathcal{D}_{n+1}$,

(3) maksimum długości przedziałów z $\mathcal{D}_n$ dąży do zera.

Zbiorem Cantora wyznaczonym przez system diadyczny $\mathcal{D}$ nazywamy zbiór

(4) $C = \bigcap_n C_n$, gdzie $C_n = \bigcup \mathcal{D}_n$.

Ponieważ C_n jest sumą skończenie wielu przedziałów domkniętych, C jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, a więc zbiór Cantora jest zwarty. Zauważmy, że

(5) $\mathrm{Int} C = \emptyset$,

bo dla dowolnego nietrywialnego przedziału otwartego (a, b), na mocy (3) można wskazać n takie, że przedziały z $\mathcal{D}_n$ mają długość $< b - a$ i wówczas $(a, b) \setminus C \supset (a, b) \setminus C_n \neq \emptyset$.

Pokażemy, że

(6) zbiór Cantora jest homeomorficzny z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,

gdzie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jest przestrzenią ciągów zero - jedynkowych z metryką określoną formułą

(7) $d(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |t_i - s_i|, \quad t = (t_1, t_2, \ldots),\ s = (s_1, s_2, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

W tym celu ustalmy, indukcyjnie ze względu na długość ciągów, wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość $(t_1,\ldots,t_n) \to C(t_1,\ldots,t_n)$ między skończonymi ciągami zero - jedynkowymi i przedziałami z systemu diadycznego $\mathcal{D}$ tak, że $C(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{D}_n$ i $C(t_1,\ldots,t_n,0)$, $C(t_1,\ldots,t_n,1)$ są rozłącznymi przedziałami z $\mathcal{D}_{n+1}$ zawartymi w $C(t_1,\ldots,t_n)$, zob. (2).

Z (1), (2) i (4) wynika, że z każdym punktem $x \in C$ można związać jednoznacznie ciąg $(t_1,t_2,\ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że

(8) $\quad x \in C(t_1) \cap C(t_1,t_2) \cap C(t_1,t_2,t_3) \cap \ldots$

i niech

(9) $\quad f(x) = t$, gdzie $t = (t_1,t_2,\ldots)$ spełnia (8).

Funkcja $f : C \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest różnowartościowa, bo jeśli $x,y \in C$ są różne, to zgodnie z (3), dla dostatecznie dużego n, należą do różnych przedziałów z $\mathcal{D}_n$, a więc ciągi $f(x)$ i $f(y)$ różnią się na pierwszych n miejscach.

Ponieważ dla dowolnego ciągu $(t_1,t_2,\ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $C(t_1) \supset C(t_1,t_2) \supset \ldots$, istnieje punkt $x \in C$ spełniający (8), a więc $f(C) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Zgodnie z 2.2.3, dla uzasadnienia (6) wystarczy sprawdzić ciągłość f.

Ustalmy dowolne $a \in C$, $\varepsilon > 0$, niech $2^{-n} < \varepsilon$ i niech V będzie dopełnieniem sumy przedziałów z $\mathcal{D}_n$, nie zawierających a. Wówczas, dla odcinka $C(t_1,\ldots,t_n)$ z $\mathcal{D}_n$ zawierającego a, mamy $V \cap C = C(t_1,\ldots,t_n) \cap C$, zob. (4). Jeśli więc $x \in V \cap C$, to z (8) i (9) wynika, że ciągi $f(a)$ i $f(x)$ mają na pierwszych n miejscach współrzędne $t_1,\ldots,t_n$, a zatem z (7), $d(f(a),f(x)) \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \leqslant 2^{-n} < \varepsilon$. To pokazuje ciągłość przekształcenia f i kończy uzasadnienie (6).

Z (6) wynika, że każde dwa zbiory Cantora wyznaczone przez systemy diadyczne są homeomorficzne. Zauważmy także, że jeśli zbiór Cantora jest wyznaczony przez system diadyczny $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$, oraz $J \in \mathcal{D}_n$, to $J \cap C$ jest zbiorem Cantora wyznaczonym przez system diadyczny $\mathcal{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m$, gdzie $\mathcal{E}_m = \{J \cap K : K \in \mathcal{D}_{n+m}\}$, a więc zbiór $J \cap C$ jest homeomorficzny z C.

Klasycznym przykładem zbioru Cantora jest zbiór liczb z odcinka $[0,1]$, które w rozwinięciu trójkowym nie mają współczynnika 1,

(10) $\quad C = \{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i} \, : \, t_i \in \{0,2\}$ dla $i = 1,2,\ldots\}$.

Zbiór C jest wyznaczony przez system diadyczny $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$, gdzie $\mathcal{D}_0 = \{[0,1]\}$, a przedziały z $\mathcal{D}_{n+1}$ otrzymuje się dzieląc każdy przedział z $\mathcal{D}_n$ na trzy równe części i pomijając środkowy przedział z tego podziału.

2.4. **Iloczyn skończony przestrzeni zwartych.** Ważną rolę w matematyce odgrywa twierdzenie, że iloczyn przestrzeni zwartych jest zwarty. W tej części podamy dowód tego faktu dla iloczynów skończonych. Nieco bardziej złożone rozumowanie dotyczące iloczynów przeliczalnych zamieszczamy w części 2.5, a w pełnej ogólności, twierdzenie o iloczynach przestrzeni zwartych omówione jest w Uzupełnieniach 7.3.4.

Uwaga 2.4.1. Iloczyn kartezjański $(X \times Y, \mathcal{T})$ przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa. Istotnie, niech $a = (a_1,a_2)$, $b = (b_1,b_2) \in X \times Y$ będą różnymi punktami. Jeśli $a_1 \neq b_1$, wybierzmy zbiory rozłączne $U, W \in \mathcal{T}_X$ takie, że $a_1 \in U$, $b_1 \in W$. Wówczas $U \times Y$, $W \times Y$ są rozłącznymi zbiorami otwartymi w iloczynie kartezjańskim, $a \in U \times Y$, $b \in W \times Y$. Podobnie wybieramy rozłączne zbiory otwarte zawierające a i b, jeśli $b_1 \neq b_2$.

Twierdzenie 2.4.2. *Iloczyn kartezjański skończenie wielu przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Powołując się na indukcję, wystarczy wykazać to twierdzenie dla iloczynu dwóch przestrzeni. Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni zwartych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zgodnie z 2.4.1, iloczyn $(X \times Y, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa.

Niech $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ będzie otwartym pokryciem iloczynu $X \times Y$ i niech

(13) $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{T}_X : V \times Y$ można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}\}$.

Pokażemy, że

(14) $X = \bigcup \mathcal{V}$.

Ustalmy $x \in X$. Dla każdego $y \in Y$ wybierzmy $U(y) \in \mathcal{U}$ takie, że $(x, y) \in U(y)$, a następnie $V(y) \in \mathcal{T}_X$ i $W(y) \in \mathcal{T}_Y$, dla których $(x, y) \in V(y) \times W(y) \subset U(y)$. Ze zwartości Y, $Y \subset W(y_1) \cup \ldots \cup W(y_m)$, dla pewnych $y_i \in Y$. Dla $V = V(y_1) \cap \ldots \cap V(y_m)$ mamy $V \times Y \subset U(y_1) \cup \ldots \cup U(y_m)$, a zatem $V \in \mathcal{V}$, zob. (13). Tak więc $x \in V \subset \bigcup \mathcal{V}$, skąd wobec dowolności x wynika (14).

Ponieważ $\mathcal{V}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni zwartej X, przestrzeń X można pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{V}$, a zatem zgodnie z (13), $X \times Y$ można pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$.

2.5. **Iloczyn przeliczalny przestrzeni zwartych.**

Twierdzenie 2.5.1. *Iloczyn kartezjański* $(X_1 \times X_2 \times \ldots, \mathcal{T})$ *przestrzeni zwartych* $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Podobnie, jak w Uwadze 2.4.1, łatwo sprawdza się, że iloczyn przeliczalnie wielu przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Zbiory postaci $W = V_1 \times \ldots \times V_n$, gdzie $V_i \in \mathcal{T}_i$, nazywać będziemy otwartymi n-kostkami.

Dążąc do sprzeczności załóżmy, że istnieje otwarte pokrycie $\mathcal{U}$ iloczynu $X_1 \times X_2 \times \ldots$, z którego nie można wybrać pokrycia skończonego i wybierzmy indukcyjnie punkty $a_n \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ takie, że

$(\star)_n$ dla każdej otwartej n-kostki W zawierającej $(a_1, \ldots, a_n)$, zbiór $W \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots$ nie jest pokryty skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$.

Gdyby dla pewnego $n \geqslant 0$ nie można było wybrać kolejnego punktu a_{n+1}, oznaczałoby to, że dla każdego $x \in X_{n+1}$ istnieje otwarta n-kostka W_x zawierająca $(a_1, \ldots, a_n)$, oraz zbiór $V_x \in \mathcal{T}_{n+1}$ zawierający x takie, że iloczyn $W_x \times V_x \times X_{n+2} \times \ldots$ można pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$. Ponieważ przestrzeń X_{n+1} jest zwarta, $X_{n+1} = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}$, dla pewnych $x_i \in X_{n+1}$, otrzymalibyśmy więc otwartą n-kostkę $W = W_{x_1} \cap \ldots \cap W_{x_m}$ zawierającą $(a_1, \ldots, a_n)$, dla której warunek $(\star)_n$ jest naruszony.

Rozpatrzmy teraz punkt $a = (a_1, a_2, \ldots)$ i niech $U \in \mathcal{U}$ zawiera a. Istnieje wówczas otwarta n-kostka W taka, że $a \in W \times X_{n+1} \times \ldots \subset U$. W szczególności $(a_1, \ldots, a_n) \in W$, co przeczy warunkowi $(\star)_n$.

3. Zupełność

Pojęcie zupełności odgrywa podstawową rolę w analizie matematycznej. Jest to, w odróżnieniu od większości omawianych przez nas pojęć, własność metryki, a nie topologii przez nią generowanej.

Dwie bardzo ważne dla zastosowań konsekwencje zupełności to twierdzenie Banacha o punkcie stałym, wyrażone w terminach metryki, oraz twierdzenie Baire'a, dotyczące topologii generowanych przez metryki zupełne.

Każda metryka generująca topologię przestrzeni zwartej jest zupełna. Z kolei zupełna i całkowicie ograniczona przestrzeń jest zwarta. Ważnym wnioskiem z tego ostatniego faktu jest twierdzenie Ascoliego - Arzeli, opisujące zbiory zwarte w przestrzeniach funkcji ciągłych.

3.1. **Przestrzenie metryczne zupełne.**

Definicja 3.1.1. *Ciąg punktów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeśli*

(1) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n,m\geqslant n_0} d(x_n,x_m)<\varepsilon.$

Uwaga 3.1.2. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną.

(A) Każdy ciąg zbieżny w (X,d) jest ciągiem Cauchy'ego.

(B) Jeśli ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma punkt skupienia x_0, to $x_n \to x_0$.

Istotnie, rozpatrzmy dowolną kulę $B(x_0,r)$. Z warunku (1), istnieje n_0 takie, że $d(x_n,x_m)<\frac{r}{2}$, dla $n,m\geqslant n_0$, a ponieważ x_0 jest punktem skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, można wybrać indeks $m\geqslant n_0$, dla którego $d(x_0,x_m)<\frac{r}{2}$. Zatem, dla $n\geqslant n_0$, $x_n\in B(x_0,r)$.

Definicja 3.1.3. *Przestrzeń metryczna (X,d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.*

Twierdzenie 3.1.4. *Przestrzenie euklidesowe $(\mathbb{R}^n,d_e)$ są zupełne.*

Dowód. Ciąg Cauchy'ego w $(\mathbb{R}^n,d_e)$ jest ograniczony, a ponieważ w przestrzeniach euklidesowych domknięcia zbiorów ograniczonych są zwarte, zob. Wniosek 2.1.14, ciąg ten ma punkt skupienia, a więc jest zbieżny na mocy 3.1.2 (B).

Następująca obserwacja dotyczy podprzestrzeni przestrzeni zupełnych.

Twierdzenie 3.1.5. *Niech (X,d_X) będzie przestrzenią metryczną, $Y\subset X$ i niech d_Y będzie obcięciem metryki d_X do Y. Wówczas:*

(i) jeśli przestrzeń (Y,d_Y) jest zupełna, to zbiór Y jest domknięty w (X,d_X),

(ii) jeśli przestrzeń (X,d_X) jest zupełna i zbiór Y jest domknięty w (X,d_X), to przestrzeń (Y,d_Y) jest zupełna.

Dowód. (i) Niech $y_0\in\overline{Y}$ i niech $y_n\to y_0$ dla pewnego ciągu punktów $y_n\in Y$, zob. 1.2.16. Ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w (X,d_X), a więc i w (Y,d_Y), zatem z zupełności (Y,d_Y) istnieje punkt $y\in Y$ taki, że $d_Y(y_n,y)\to 0$. Wówczas $y=y_0$, a więc $y_0\in Y$.

(ii) Niech $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w (Y,d_Y). Metryka d_X pokrywa się z d_Y na Y, więc jest to też ciąg Cauchy'ego w (X,d_X) i z zupełności, $y_n\to y$ dla pewnego $y\in X$. Ponieważ $y\in\overline{Y}=Y$, ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w przestrzeni (Y,d_Y).

Przykład 3.1.6. Wprowadźmy przestrzeń Hilberta (l_2, d_h), odgrywającą ważną rolę w matematyce. Punktami l_2 są ciągi $a = (a_1, a_2, \ldots)$ sumowalne z kwadratem, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$. Odległość między punktami $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_2$ określa się formułą

(2) $d_h(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - b_i)^2}$,

przy czym własność $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots) \in l_2$, zapewniająca określoność formuły (2), wynika z nierówności trójkąta dla metryk euklidesowych: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$, dla $n = 1, 2, \ldots$, zob. 1.1.2 (5).

Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, d_e)$ będziemy utożsamiać z domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta (l_2, d_h), złożoną z ciągów $(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. Niech

(3) $P_n : l_2 \to \mathbb{R}^n, \quad P_n(a_1, a_2, \ldots) = (a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$

będzie rzutem. Zauważmy, że dla $a, b \in l_2$,

(4) $d_h(a, P_n(a)) \to 0$,

(5) $d_h(P_n(a), P_n(b)) \leqslant d_h(a, b)$.

Z (4) wynika, że zbiór $\mathbb{R}^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ jest gęsty w przestrzeni Hilberta. Przeliczalny zbiór $\mathbb{Q}^{\infty}$ złożony z punktów w $\mathbb{R}^{\infty}$ o wszystkich współrzędnych wymiernych też jest gęsty w l_2, bo $\mathbb{R}^{\infty} \subset \overline{\mathbb{Q}^{\infty}}$. W szczególności, przestrzeń (l_2, d_h) jest ośrodkowa.

Twierdzenie 3.1.7. *Przestrzeń Hilberta (l_2, d_h) jest zupełna.*

Dowód. Niech $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w (l_2, d_h). Ponieważ ciąg Cauchy'ego jest ograniczony, istnieje $r > 0$ takie, że

(6) $d_h(x_i, \mathbf{0}) \leqslant r, \quad i = 1, 2, \ldots,$

gdzie $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$. Dla ustalonego n, z (5) wynika, że ciąg rzutów $(P_n(x_i))_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, a zatem z 3.1.4,

(7) $P_n(x_i) \to y_n$ dla pewnego $y_n \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2, \ldots$

Ponieważ $d_h(y_n, \mathbf{0}) \leqslant d_h(y_n, P_n(x_i)) + d_h(P_n(x_i), \mathbf{0})$, z (5) i (6), oraz (7) wynika, że

(8) $d_h(y_n, \mathbf{0}) \leqslant r, \quad n = 1, 2, \ldots$

Dla $n > m$, pierwsze m współrzędnych punktów y_n i y_m pokrywa się, bo zgodnie z (7), $P_m(P_n(x_i)) \to P_m(y_n)$, oraz $P_m(P_n(x_i)) = P_m(x_i) \to y_m$, a więc $y_m = P_m(y_n)$. Ponieważ, z (8), suma kwadratów współrzędnych y_n jest ograniczona przez r^2, wynika stąd, że ciąg $y_1, y_2, \ldots$ wyznacza punkt $y \in l_2$ taki, że

(9) $P_n(y) = y_n, \quad n = 1, 2, \ldots$

Pokażemy, że

(10) $x_i \to y$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy n_0 takie, że

(11) $d_h(x_i, x_j) < \varepsilon, \quad$ dla $i, j \geqslant n_0$.

Ustalmy $i \geqslant n_0$. Dla dowolnego n, oraz $j \geqslant n_0$, mamy wówczas z (5), (9) i (11), $d_h(P_n(x_i), P_n(y)) \leqslant d_h(P_n(x_i), P_n(x_j)) + d_h(P_n(x_j), P_n(y)) \leqslant \varepsilon + d_h(P_n(x_j), y_n)$. Ustalając n i przechodząc z j do nieskończoności, dostajemy z warunku (7), $d_h(P_n(x_i), P_n(y)) \leqslant \varepsilon$, a następnie przechodząc do nieskończoności z n, wnosimy z (4), że $d_h(x_i, y) \leqslant \varepsilon$, dla $i \geqslant n_0$, zob. 1.4.4. To dowodzi (10) i kończy uzasadnienie twierdzenia.

Przykład 3.1.8. Dla przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ i przestrzeni metrycznej (Y, d), symbolem $C_b(X, Y)$ oznaczać będziemy zbiór funkcji ciągłych $f : X \to Y$ ograniczonych, tzn. takich, że $f(X)$ leży w pewnej kuli w (Y, d). Metrykę supremum w $C_b(X, Y)$ określa się formułą, zob. 1.7.4,

(12) $d_{sup}(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$.

Twierdzenie 3.1.9. *Jeśli przestrzeń metryczna (Y, d) jest zupełna, to dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, przestrzeń funkcyjna $(C_b(X, Y), d_{sup})$ jest zupełna.*

Dowód. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $(C_b(X, Y), d_{sup})$. Zgodnie z (12), dla ustalonego $x \in X$, ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w przestrzeni zupełnej (Y, d) do pewnego punktu $f(x)$,

(13) $f_n(x) \to f(x), \quad x \in X$.

Pokażemy, że

(14) $f \in C_b(X, Y)$, oraz $d_{sup}(f_n, f) \to 0$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, z (12) wynika istnienie n_0 takiego, że

(15) $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, \quad$ dla $n, m \geqslant n_0$, $x \in X$.

Przy ustalonym n, przechodząc z m do nieskończoności, dostajemy z (15) i (13) (zob. także 1.4.4)

(16) $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon, \quad$ dla $n \geqslant n_0$, $x \in X$.

Funkcja f_{n_0} jest ograniczona, z (16) wynika więc ograniczoność f, a ponadto (16), wobec dowolności ε, zapewnia, że $\gamma_n = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \to 0$. Zgodnie z Uwagą 1.3.5, f jest przekształceniem ciągłym, a ponieważ $\gamma_n = d_{sup}(f_n, f)$, uzasadniliśmy (14), kończąc dowód twierdzenia.

Uwaga 3.1.10. Jeśli przestrzenie metryczne (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, są zupełne, to ich iloczyn kartezjański $(X_1 \times \ldots \times X_n, d)$ z metryką określoną w 1.4.2 też jest przestrzenią zupełną. Dla $X_i = Y$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jest to szczególny przypadek twierdzenia 3.1.9, gdzie $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ jest przestrzenią dyskretną.

3.2. **Twierdzenie Banacha o punkcie stałym.**

Przekształcenie $T : X \to X$ przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie jest zwężające, jeśli dla pewnej stałej $c \in [0, 1)$,

(1) $d(T(x), T(y)) \leqslant c d(x, y)$, $x, y \in X$.

Mówimy, że x jest punktem stałym przekształcenia T, jeśli $T(x) = x$.

Twierdzenie 3.2.1. *Jeśli $T : X \to X$ jest przekształceniem zwężającym zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie, to T ma dokładnie jeden punkt stały. Ponadto, dla dowolnego $a \in X$ ciąg iteracji $T(a), T(T(a)), \ldots$ zbiega do punktu stałego przekształcenia T.*

Dowód. Niech T spełnia warunek (1) ze stałą $c \in [0,1)$ i wybierzmy $a \in X$. Niech

(2) $a_0 = a$, $a_n = T(a_{n-1})$, dla $n \geqslant 1$.

Sprawdzimy, że dla $n < m$,

(3) $d(a_n, a_m) \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \frac{1}{1-c} d(a_n, a_{n+1})$.

Pierwsza nierówność w (3) jest konsekwencją nierówności trójkąta. Aby uzasadnić drugą, zauważmy, że z (1) i (2), $d(a_{i+1}, a_{i+2}) = d(T(a_i), T(a_{i+1})) \leqslant cd(a_i, a_{i+1})$, skąd

(4) $d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \frac{1}{1-c}(d(a_i, a_{i+1}) - d(a_{i+1}, a_{i+2}))$.

Po zsumowaniu stronami nierówności (4) dla $i = n, \ldots, m-1$, dostajemy (3).

Druga nierówność w (3) pokazuje, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} d(a_i, a_{i+1})$ jest zbieżny. Dla zadanego $\varepsilon > 0$, istnieje więc n_0 takie, że $\sum_{i=n_0}^{\infty} d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$, a zatem z pierwszej nierówności w (3), $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ dla $n, m \geqslant n_0$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest więc ciągiem Cauchy'ego i z zupełności (X, d), $a_n \to p$, dla pewnego $p \in X$. Ponieważ warunek (1) zapewnia ciągłość przekształcenia, $T(a_n) \to T(p)$. Zgodnie z (2), mamy też $a_n = T(a_{n-1}) \to T(p)$, skąd $p = T(p)$ jest punktem stałym.

Jest to jedyny punkt stały, bo jeśli $T(q) = q$, to z (1), $d(p,q) = d(T(p), T(q)) \leqslant cd(p,q)$, a więc $d(p,q) = 0$, bo $c < 1$.

3.3. **Twierdzenie Baire'a.**

Definicja 3.3.1. *Zbiór A w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest brzegowy, jeśli ma puste wnętrze.*

Brzegowość zbioru A w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest równoważna warunkowi, że jego dopełnienie $X \setminus A$ jest gęste w X, zob. Definicja 1.7.1. Zauważmy też, że gęstość zbioru B w $(X, \mathcal{T})$ jest równoważna warunkowi, że B przecina każdy niepusty zbiór otwarty w X.

Twierdzenie 3.3.2. *W przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d), przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym.*

Dowód. Niech $F_1, F_2, \ldots$ będą domkniętymi zbiorami brzegowymi i niech U będzie niepustym zbiorem otwartym w przestrzeni (X, d). Mamy pokazać, że

(1) $U \setminus \bigcup_i F_i \neq \emptyset$.

Wybierzmy dowolny punkt $a_0 \in U$ i $r_0 > 0$ takie, że

(2) $\overline{B(a_0, r_0)} \subset U$.

Indukcyjnie określimy kule $B(a_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ tak, że dla $i = 1, 2, \ldots$,

(3) $B(a_i, r_i) \subset B(a_{i-1}, r_{i-1})$, $\quad \overline{B(a_i, r_i)} \cap F_i = \emptyset$, $\quad r_i \leqslant \frac{1}{i}$.

Załóżmy, że kula $B(a_{i-1}, r_{i-1})$ jest określona. Ponieważ F_i ma puste wnętrze, istnieje $a_i \in B(a_{i-1}, r_{i-1}) \setminus F_i$, a ponieważ F_i jest zbiorem domkniętym, dla pewnego $s > 0$, $B(a_i, s) \subset B(a_{i-1}, r_{i-1}) \setminus F_i$. Domknięcie kuli $B(a_i, \frac{s}{2})$ leży w $B(a_i, s)$, a więc przyjmując za r_i mniejszą z liczb $\frac{s}{2}$, $\frac{1}{i}$, zapewniamy (3). Z (3) wynika, że dla $i < j$, $d(a_i, a_j) < r_i < \frac{1}{i}$, a zatem $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zupełność (X, d) zapewnia, że $a_i \to a$, dla pewnego $a \in X$. Dla każdego i, prawie wszystkie wyrazy tego ciągu leżą w $B(a_i, r_i)$, zatem $a \in \overline{B(a_i, r_i)}$. Z (2) i (3) otrzymujemy $a \in U \setminus \bigcup_i F_i$, co dowodzi (1).

Uwaga 3.3.3. (A) Samo założenie, że zbiory w Twierdzeniu 3.3.2 są brzegowe nie wystarczy: prosta euklidesowa jest sumą dwóch zbiorów brzegowych – zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych.

(B) Nie można też pominąć założenia zupełności w Twierdzeniu 3.3.2. Rozpatrzmy przestrzeń liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, d_e)$ z metryką euklidesową $d_e(x, y) = |x-y|$ i ustawmy liczby wymierne w ciąg $q_1, q_2, \ldots$ Zbiory $A_i = \{q_i\}$ są domknięte i brzegowe w $(\mathbb{Q}, d_e)$, ale ich suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{Q}$ nie jest brzegowa w przestrzeni $\mathbb{Q}$.

3.4. **Zupełność + całkowita ograniczoność = zwartość.** W tej części wyjaśnimy związki między metrycznym pojęciem zupełności i topologicznym pojęciem zwartości. Użyteczne będzie przy tym określenie średnicy zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d),

(1) $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Ciągłość metryki, zob. 1.4.4, zapewnia, że domykając zbiór nie powiększamy jego średnicy.

Twierdzenie 3.4.1 (Warunek Cantora)**.** *Przestrzeń (X, d) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cantora: każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie.*

Dowód. Jeśli $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ są zbiorami domkniętymi w (X, d), $\operatorname{diam} F_n \to 0$, oraz $a_n \in F_n$, to $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zupełność (X, d) zapewnia, że $a_n \to a$, dla pewnego $a \in X$. Ponieważ $a \in \overline{F_n} = F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, mamy $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Na odwrót, załóżmy, że w przestrzeni (X, d) spełniony jest warunek Cantora i niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Zbiory domknięte $F_n = \overline{\{a_m : m \geqslant n\}}$ tworzą ciąg zstępujący, $\operatorname{diam} F_n \to 0$, a zatem istnieje $a \in \bigcap_n F_n$. Punkt a jest punktem skupienia ciągu Cauchy'ego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a więc $a_n \to a$, zob. 3.1.2 (B).

Uwaga 3.4.2. Ponieważ warunek Cantora jest słabszy niż równoważny zwartości warunek (iii) w Twierdzeniu 2.1.4, z 3.4.1 wynika, że dla każdej metryki d generującej topologię przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T})$, przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna. Innym uzasadnieniem tego faktu jest odwołanie się do warunku (ii) w 2.1.4, oraz do 3.1.2 (B).

Przykład 3.4.3. Charakteryzacja zwartości zbiorów w przestrzeniach euklidesowych podana w 2.1.14 nie przenosi się na dowolne przestrzenie metryczne. Dla ilustracji, rozpatrzmy w przestrzeni Hilberta (l_2, d_h) zbiór $A = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$, gdzie ciąg $a_n = (0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots)$ ma na n-tym miejscu współrzędną $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a poza tym zera. Zbiór A leży w kuli o środku w zerze i promieniu 1. Ponieważ $d_h(a_n, a_m) = 1$, dla $n \neq m$, zbiór A jest domknięty, ale nie jest zwarty, bo z ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie można wybrać podciągu zbieżnego, zob. 2.1.4 (ii).

Definicja 3.4.4. *Zbiór w przestrzeni metrycznej (X, d) jest całkowicie ograniczony, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ można go pokryć skończenie wieloma zbiorami o średnicach $\leqslant \varepsilon$.*

W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ zbiory ograniczone są całkowicie ograniczone (jednakże, jak wskazuje Przykład 3.4.3, nie jest tak dla przestrzeni Hilberta). Domknięte i ograniczone podprzestrzenie przestrzeni euklidesowych są więc zupełne i całkowicie ograniczone. Podaną przez nas w 2.1.14 charakteryzację zbiorów zwartych w $\mathbb{R}^n$ można zatem wyprowadzić z opisanej w tytule tej części ogólnej własności, którą udowodnimy poniżej.

Twierdzenie 3.4.5. *Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona.*

Dowód. (A) Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią zwartą. W 3.4.2 zauważyliśmy, że zwartość pociąga zupełność przestrzeni (X, d). Ponadto, z pokrycia otwartego X kulami $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ można wybrać pokrycie skończone, a ponieważ $\mathrm{diam} B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \leqslant \varepsilon$, mamy też całkowitą ograniczoność (X, d).

(B) Na odwrót, niech przestrzeń metryczna (X, d) będzie zupełna i całkowicie ograniczona. Dążąc do sprzeczności, załóżmy, że istnieje rodzina otwarta $\mathcal{U}$ w przestrzeni (X, d) pokrywająca X, z której nie można wybrać pokrycia skończonego.

Indukcyjnie określimy zbiory $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$ w X takie, że $\mathrm{diam} A_n \leqslant \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, oraz zbioru A_n nie można pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$.

Przyjmijmy $A_0 = X$ i załóżmy, że zbiór A_{n-1} jest już określony. Korzystając z całkowitej ograniczoności, przedstawmy A_{n-1} w postaci skończonej sumy zbiorów o średnicach $\leqslant \frac{1}{n}$. Z założenia indukcyjnego wynika, że jednego z tych zbiorów nie można pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$ i przyjmijmy za A_n taki właśnie zbiór.

Warunek Cantora, zob. Twierdzenie 3.4.1, zapewnia istnienie $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Wybierzmy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $a \in U$, a następnie $r > 0$, dla którego $B(a, r) \subset U$. Jeśli $\frac{1}{n} < r$, to $A_n \subset B(a, r)$, bo zbiór $\overline{A_n}$ o średnicy $\leqslant \frac{1}{n}$ zawiera środek kuli $B(a, r)$. Tak więc pokryliśmy A_n jednym elementem $U \in \mathcal{U}$, co jest sprzeczne z wyborem A_n.

Uwaga 3.4.6. Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to domknięcie $\overline{A}$ zbioru całkowicie ograniczonego A w przestrzeni (X, d) jest zwarte.

Istotnie, $\overline{A}$ jest zbiorem całkowicie ograniczonym, bo jeśli $A = C_1 \cup \ldots \cup C_m$ i $\mathrm{diam} C_i \leqslant \varepsilon$, to $\overline{A} = \overline{C_1} \cup \ldots \cup \overline{C_m}$ i $\mathrm{diam} \overline{C_i} \leqslant \varepsilon$. Zatem podprzestrzeń metryczna $(\overline{A}, d_{\overline{A}})$ przestrzeni (X, d) jest zupełna (zob. 3.1.5) i całkowicie ograniczona, a więc zwarta.

3.5. **Twierdzenie Ascoliego - Arzeli.** Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą, to zgodnie z Twierdzeniem 2.2.1, każde przekształcenie ciągłe $f : X \to \mathbb{R}^n$ w przestrzeń euklidesową jest ograniczone. Tak więc, dla przestrzeni zwartych X, przestrzeń $C_b(X, \mathbb{R}^n)$ określona w 3.1.8 pokrywa się z przestrzenią $C(X, \mathbb{R}^n)$ wszystkich przekształceń ciągłych z X w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 3.5.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną .*

(A) Rodzina przekształceń ciągłych $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest jednakowo ciągła, jeśli dla każdego

$x \in X$ i $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu x takie, że dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$, $\mathrm{diam} f(U) \leqslant \varepsilon$.

(B) Rodzina $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ jest ograniczona, jeśli dla pewnego $r > 0$, obrazy $f(X)$ wszystkich przekształceń $f \in \mathcal{F}$ leżą w kuli $B(\mathbf{0}, r)$.

Twierdzenie 3.5.2. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą i niech rodzina $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ będzie jednakowo ciągła i ograniczona. Wówczas domknięcie $\mathcal{F}$ w przestrzeni metrycznej $(C(X, \mathbb{R}^n), d_{sup})$ jest zwarte.*

Dowód. Zgodnie z Uwagą 3.4.6, wystarczy sprawdzić, że rodzina przekształceń $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczona w metryce supremum d_{sup}. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Jednakowa ciągłość rodziny $\mathcal{F}$ zapewnia, że

(1) $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{T} : \forall_{f \in \mathcal{F}} \text{ diam } f(U) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\}$

jest pokryciem X. Ze zwartości X,

(2) $X = U_1 \cup \ldots \cup U_k$, gdzie $U_i \in \mathcal{U}$.

Rodzina $\mathcal{F}$ jest ograniczona, dla pewnego $r > 0$ mamy więc

(3) $\bigcup\{f(X) : f \in \mathcal{F}\} \subset B(\mathbf{0}, r)$.

Ponieważ kule w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ są całkowicie ograniczone,

(4) $B(\mathbf{0}, r) = B_1 \cup \ldots \cup B_m, \quad \mathrm{diam} B_j \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \; j = 1, \ldots, m.$

Dla każdej funkcji $s : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ określmy zbiór

(5) $\mathcal{A}_s = \{f \in \mathcal{F} : f(U_i) \cap B_{s(i)} \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, k\}$.

Jeśli $f \in \mathcal{F}$, to z (4) wynika, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ można wskazać $s(i) \in \{1, \ldots, m\}$ takie, że $f(U_i) \cap B_{s(i)} \neq \emptyset$, a więc

(6) $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{A}_s : \quad s : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}\}$.

Pozostaje pokazać, że ze względu na metrykę supremum,

(7) $\mathrm{diam} \mathcal{A}_s \leqslant \varepsilon$.

Ustalmy $s : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$. Niech $f, g \in \mathcal{A}_s$ i $x \in X$. Wybierzmy $i \in \{1, \ldots, k\}$ takie, że $x \in U_i$, zob. (2). Z (5), $f(U_i)$ oraz $g(U_i)$ przecinają ten sam zbiór $B_{s(i)}$ i ponieważ wszystkie trzy zbiory mają średnice $\leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, zob. (1), (2), (4), $d_e(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$. Zatem $d_{sup}(f, g) \leqslant \varepsilon$, co uzasadnia (7) i kończy dowód twierdzenia.

Zakończymy tę część obserwacją, która jest użyteczna w zastosowaniach twierdzenia Ascoliego - Arzeli.

Uwaga 3.5.3. Niech $\mathcal{F}$ spełnia założenia Twierdzenia 3.5.2 i niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji z $\mathcal{F}$. Ponieważ domknięcie $\overline{\mathcal{F}}$ jest zwarte, z ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ można wybrać podciąg zbieżny do funkcji $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$, zob. 2.1.4 (ii).

4. Spójność

4.1. **Przestrzenie spójne.**

Definicja 4.1.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest spójna, jeśli zbioru X nie można rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, niepustych zbiorów domkniętych (równoważnie – otwartych). Zbiór $S \subset X$ jest spójny, jeśli podprzestrzeń $(S, \mathcal{T}_S)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest spójna.*

Często wygodnie jest opisywać spójność zbiorów bez odwoływania się do topologii podprzestrzeni, jak w Twierdzeniu 4.1.3.

Uwaga 4.1.2. Niech $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$. Przypomnijmy, że otoczenia punktu $y \in Y$ w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są śladami na Y otoczeń punktu y w przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$, zob. 1.2.9, 1.2.13. Wynika stąd, że dla $A \subset Y$, domknięcie A w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest zbiorem $\overline{A} \cap Y$, gdzie $\overline{A}$ jest domknięciem A w przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$.

Twierdzenie 4.1.3. *Zbiór S w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych niepustych zbiorów A, B takich, że $S = A \cup B$, mamy $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ lub $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.*

Dowód. Zgodnie z Uwagą 4.1.2, jeśli $S = A \cup B$, to warunek $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ jest równoważny temu, że A i B są rozłącznymi zbiorami domkniętymi w podprzestrzeni $(S, \mathcal{T}_S)$. Tak więc warunek sformułowany w twierdzeniu jest równoważny spójności przestrzeni $(S, \mathcal{T}_S)$.

Twierdzenie 4.1.4. *Podzbiór S prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem, tzn. jeśli $a < c < b$ i $a, b \in S$, to $c \in S$.*

Dowód. (A) Niech $S \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, $S = A \cup B$, $a \in A$, $b \in B$. Przyjmijmy, że $a < b$ i rozpatrzmy $c = \sup(A \cap [a, b])$. Wówczas $c \in S$. Pokażemy, że $c \in \overline{A} \cap \overline{B}$. W tym celu rozpatrzmy dowolny przedział $J = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Ponieważ c jest kresem górnym zbioru $A \cap [a, b]$, zbiór ten przecina $(c - \varepsilon, c]$, ale jest rozłączny z $(c, c + \varepsilon)$. W szczególności, albo $c = b$, albo też $(c, c + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, co pokazuje, że J przecina oba zbiory A i B.

Ponieważ $c \in A \cup B$, mamy zatem $c \in (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

(B) Niech teraz $S \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem spójnym, $a < c < b$ i $a, b \in S$. Dla $A = \{s \in S : s \leqslant c\}$, $B = \{s \in S : c \leqslant s\}$, mamy $S = A \cup B$ i $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subset \{c\}$, a więc ze spójności S, otrzymujemy $c \in S$.

Twierdzenie 4.1.5. *Przekształcenia ciągłe przeprowadzają zbiory spójne na zbiory spójne.*

Dowód. Zgodnie z Uwagą 1.3.9 (A), wystarczy sprawdzić, że jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłym przekształceniem przestrzeni spójnej $(X, \mathcal{T}_X)$ na $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to przestrzeń Y też jest spójna.

Niech $Y = U_0 \cup U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, $U_i \in \mathcal{T}_Y$, $i = 0, 1$. Wówczas, dla $W_i = f^{-1}(U_i)$ mamy $X = W_0 \cup W_1$, $W_0 \cap W_1 = \emptyset$, $W_i \in \mathcal{T}_X$. Ze spójności X, jeden ze zbiorów U_i jest pusty, co dowodzi spójności Y.

Twierdzenie 4.1.6. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną zbiorów spójnych w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Jeśli przecięcie $\bigcap \mathcal{S}$ jest niepuste, to suma $\bigcup \mathcal{S}$ jest spójna.*

Dowód. Niech $a \in \bigcap \mathcal{S}$. Rozpatrzmy dowolny rozkład sumy $\bigcup \mathcal{S} = A \cup B$, gdzie $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, $a \in A$. Mamy pokazać, że $B = \emptyset$. Dla każdego $S \in \mathcal{S}$, $\overline{A \cap S} \cap (B \cap S) = \emptyset = (A \cap S) \cap (\overline{B \cap S})$ i $a \in A \cap S$, a więc ze spójności S, $B \cap S = \emptyset$. Zatem $\bigcup \mathcal{S} \subset A$, skąd $B = \emptyset$.

Twierdzenie 4.1.7. *Iloczyn kartezjański skończenie wielu przestrzeni spójnych jest spójny.*

Dowód. Odwołując się do indukcji, wystarczy sprawdzić, że iloczyn kartezjański $(X \times Y, \mathcal{T})$ dwóch przestrzeni spójnych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójny. Ustalmy $(a, b) \in X \times Y$ i niech dla każdego $y \in Y$,

$$S_y = (X \times \{y\}) \cup (\{a\} \times Y).$$

Zbiory $X \times \{y\}$ i $\{a\} \times Y$, homeomorficzne odpowiednio z X i Y, są spójne i zawierają punkt (a, y), zatem ich suma S_y jest spójna, zgodnie z 4.1.6. Ponieważ $(a, b) \in \bigcap\{S_y : y \in Y\}$, 4.1.6 zapewnia też spójność sumy $\bigcup\{S_y : y \in Y\} = X \times Y$.

Twierdzenie 4.1.8. *Jeśli w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, $S \subset T \subset \overline{S}$ i zbiór S jest spójny, to zbiór T też jest spójny. W szczególności, domknięcie zbioru spójnego jest spójne.*

Dowód. Rozpatrzmy dowolny rozkład $T = A \cup B$, gdzie $(\overline{A} \cap B) = \emptyset = (A \cap \overline{B})$, $A \cap S \neq \emptyset$. Mamy pokazać, że $B = \emptyset$.

Ponieważ $\overline{A \cap S} \cap (B \cap S) = \emptyset = (A \cap S) \cap \overline{B \cap S}$, oraz $A \cap S \neq \emptyset$, ze spójności S wnosimy, że $B \cap S = \emptyset$. To oznacza, że $S \subset A$, skąd $T \subset \overline{S} \subset \overline{A}$, a więc $B = T \cap B = \emptyset$.

Przykład 4.1.9. Sprawdzimy, że zbiór $T = \{(t, \sin(\frac{1}{t})) : t \in (0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$ na płaszczyźnie euklidesowej jest spójny.

Istotnie, $S = \{(t, \sin(\frac{1}{t})) : t \in (0, 1]\}$ jest obrazem przedziału $(0, 1]$ przy przekształceniu ciągłym $t \to (t, \sin(\frac{1}{t}))$, jest więc zbiorem spójnym, oraz $T = \overline{S}$.

4.2. **Przestrzenie łukowo spójne.** Drogą w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ łączącą punkty $a, b \in X$ nazywamy przekształcenie ciągłe $f : [0, 1] \to X$ takie, że $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Zauważmy, że jeśli drogi $f : [0, 1] \to X$, $g : [0, 1] \to X$ łączą odpowiednio punkty a i b, oraz b i c, to droga $h : [0, 1] \to X$ określona formułami $h(t) = f(2t)$, dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$, oraz $h(t) = g(2t - 1)$, dla $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, łączy punkty a i c, przy czym jej obraz jest sumą obrazów dróg f i g.

Definicja 4.2.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna, jeśli każdą parę punktów z X można połączyć drogą w X.*

Uwaga 4.2.2. Przestrzeń łukowo spójna $(X, \mathcal{T})$ jest spójna. Aby to sprawdzić, ustalmy $a \in X$ i dla każdego $x \in X$ wybierzmy drogę $f_x : [0, 1] \to X$ łączącą a i x. Zbiór $S_x = f_x([0, 1])$ jest spójny, a więc zgodnie z 4.1.6, $\bigcup_{x \in X} S_x = X$ jest zbiorem spójnym.

Przykład 4.2.3. Pokażemy, że spójna podprzestrzeń T płaszczyzny euklidesowej opisana w Przykładzie 4.1.9 nie jest łukowo spójna.

Przyjmijmy oznaczenie $L = \{0\} \times [-1, 1]$. Dążąc do sprzeczności, załóżmy, że istnieje droga $f : [0, 1] \to T$ łącząca $a = (0, 1)$ z $b = (1, \sin 1)$. Ponieważ przekształcenie f jest jednostajnie ciągłe, zob. 2.2.4, dla dostatecznie drobnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału $[0, 1]$, każdy zbiór $f([t_{i-1}, t_i])$ ma średnicę $\leqslant 1$. Ponieważ $f(t_0) \in L$, $f(t_n) \notin L$, istnieje i takie, że $f(t_{i-1}) \in L$, ale $f(t_i) \notin L$ i przyjmijmy $C = f([t_{i-1}, t_i])$. Rzut J zbioru C na pierwszą współrzędną jest spójnym podzbiorem $\mathbb{R}$, a więc przedziałem. Jest to przedział niezdegenerowany, zawierający 0, zatem $(0, \delta) \subset J$ dla pewnego $\delta > 0$. Dla $t \in (0, \delta)$, $(t, \sin(\frac{1}{t}))$ jest jedynym punktem z T, który rzutuje się na t, a więc $(t, \sin(\frac{1}{t})) \in C$.

Zatem zbiór C zawiera pewne punkty postaci $(r,1)$ i $(s,-1)$, co przeczy temu, że $\operatorname{diam} C \leqslant 1$.

Twierdzenie 4.2.4. *Spójny, otwarty zbiór w przestrzeni euklidesowej* $(\mathbb{R}^n, d_e)$ *jest łukowo spójny.*

Dowód. Zauważmy, że w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ każdy punkt $b \in B(a,r)$ można połączyć z a drogą $f(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$, której obraz leży w kuli $B(a,r)$.

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie spójnym zbiorem otwartym w $(\mathbb{R}^n, d_e)$, ustalmy $p \in U$ i niech W będzie zbiorem punktów $q \in U$, które można połączyć z p drogą w U. Mamy pokazać, że $W = U$.

Jeśli $q \in W$, $B(q,r) \subset U$ i $x \in B(q,r)$, to ponieważ istnieją drogi w U łączące p z q, oraz q z x, istnieje też droga w U łącząca p z x. Zatem $B(q,r) \subset W$, skąd wynika otwartość zbioru W.

Podobnie, jeśli $q \in U \setminus W$ i $B(q,r) \subset U$, żadnego punktu $x \in B(q,r)$ nie można połączyć z p drogą w U, bo wówczas drogą w U można byłoby połączyć p i q, wbrew wyborowi q. Zatem $B(q,r) \subset U \setminus W$, co pokazuje, że także zbiór $U \setminus W$ jest otwarty.

Ze spójności U wynika, że oba zbiory W i $U \setminus W$ nie mogą być niepuste i ponieważ $p \in W$, mamy $U \setminus W = \emptyset$, czyli $U = W$.

4.3. **Składowe.** Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Dla ustalonego $a \in X$, zgodnie z 4.1.6, suma wszystkich spójnych podzbiorów przestrzeni X, zawierających a, jest zbiorem spójnym. Jest to maksymalny, ze względu na inkluzję, zbiór spójny w X zawierający punkt a.

Definicja 4.3.1. *Składową przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T})$ *nazywamy zbiór spójny* S *w* X *taki, że żaden zbiór w* X*, zawierający w istotny sposób* S*, nie jest spójny.*

Tak więc, każdy punkt przestrzeni topologicznej należy do pewnej składowej, przy czym różne składowe przestrzeni są zbiorami rozłącznymi. Ponieważ domknięcie zbioru spójnego jest spójne, zob. 4.1.8, składowe są zbiorami domkniętymi.

Definicja 4.3.2. *Składową łukowej spójności przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T})$ *nazywamy maksymalny, w sensie inkluzji, łukowo spójny podzbiór* X.

Składowe łukowej spójności są parami rozłączne i pokrywają całą przestrzeń. Składowe łukowej spójności nie muszą być domknięte. Ilustruje to przestrzeń T opisana w 4.1.9, gdzie składową łukowej spójności zawierającą punkt $(1, \sin 1)$ jest zbiór S, który nie jest domknięty w T.

5. Przestrzenie ilorazowe

5.1. **Topologia ilorazowa.** Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w zbiorze X. Symbolem $X/\sim$ oznaczamy zbiór klas abstrakcji $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ elementów X ze względu na relację $\sim$ i niech $\pi : X \to X/\sim$ będzie przekształceniem ilorazowym $\pi(x) = [x]$.

Jeśli relacja równoważności $\sim$ jest określona w zbiorze punktów przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, w zbiorze $X/\sim$ określamy topologię ilorazową

$$\mathcal{T}/\sim \; = \{U \subset X/\sim \; : \; \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Jest to najsilniejsza (tzn. zawierająca najwięcej podzbiorów zbioru $X/\sim$) topologia w $X/\sim$, dla której przekształcenie ilorazowe π jest ciągłe.

Uwaga 5.1.1. Niech $\pi : X \to X/\sim$ będzie przekształceniem ilorazowym przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ na przestrzeń ilorazową $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$.

(A) Dla każdego przekształcenia $f : X/\sim \to Y$ w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$, ciągłość f jest równoważna ciągłości złożenia $f \circ \pi : X \to Y$.

Ponieważ złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe, wystarczy sprawdzić, że z ciągłości $f \circ \pi$ wynika ciągłość f. Niech $U \in \mathcal{T}_Y$. Wówczas $\pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, a więc $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}/\sim$.

(B) Niech $u : X \to Y$ będzie ciągłym przekształceniem na przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ takim, że $u(x) = u(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sim y$ (tzn. warstwy u pokrywają się z klasami abstrakcji w relacji $\sim$). Wówczas, jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa i dla pewnego zbioru zwartego $K \subset X$, $\pi(K) = X/\sim$, to naturalna bijekcja $f : X/\sim \to Y$, $f(\pi(x)) = u(x)$, jest homeomorfizmem.

Istotnie, $f \circ \pi = u$ jest przekształceniem ciągłym, a więc z (A) dostajemy ciągłość bijekcji f. Ponieważ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest Hausdorffa, ciągłość bijekcji f zapewnia, że także $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ jest przestrzenią Hausdorffa, a ponieważ $\pi(K) = X/\sim$, przestrzeń ilorazowa jest zwarta, zob. 2.2.1. Z wniosku 2.2.3 wynika, że f jest homeomorfizmem.

Przykład 5.1.2. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, d_e)$ określoną formułą $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y$ jest liczbą całkowitą. Sprawdzimy, że przestrzeń ilorazowa $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{T}(d_e)/\sim)$ jest homeomorficzna z okręgiem $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ na płaszczyźnie euklidesowej.

Istotnie, funkcja $u : \mathbb{R} \to S^1$ określona formułą $u(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ przyjmuje te same wartości w s i t wtedy i tylko wtedy, gdy $s \sim t$, oraz $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\sim$, a więc wystarczy odwołać się do 5.1.1 (B).

Przykład 5.1.3. Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{P}^2$ jest przestrzenią $(S^2/\sim, \mathcal{T}(d_e)/\sim)$ otrzymaną ze sfery euklidesowej $S^2 = \{a \in \mathbb{R}^3 : d_e(a, \mathbf{0}) = 1\}$ przez utożsamienie punktów antypodycznych: $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $a = -b$.

Płaszczyznę rzutową można zanurzyć w $\mathbb{R}^4$. Rozpatrzmy w tym celu funkcję $u : S^2 \to \mathbb{R}^4$ określoną formułą $u(a) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$, gdzie $a = (x, y, z)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Można sprawdzić, że klasy abstrakcji w relacji $\sim$ pokrywają się z warstwami u, tzn. u przyjmuje na parze różnych punktów a, b te same wartości wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -b$. Ponieważ sfera S^2 jest zwarta, z 5.1.1 (B) wnosimy, że płaszczyzna rzutowa jest homeomorficzna z podprzestrzenią $u(S^2)$ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, d_e)$.

Niech A będzie zbiorem punktów w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ i niech, dla $x, y \in X$, $x \sim y$, jeśli $x = y$ lub $x, y \in A$. Przestrzeń ilorazową $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ nazywać będziemy przestrzenią otrzymaną z X przez sklejenie zbioru A do punktu i oznaczać będziemy symbolem $(X/A, \mathcal{T}/A)$.

Jeśli $X \subset \mathbb{R}^m$ jest zwartą podprzestrzenią, $A \subset X$ jest zbiorem domkniętym i $\mathcal{T}(d_e)$ jest topologią euklidesową w X, to przestrzeń $(X/A, \mathcal{T}(d_e)/A)$ można zanurzyć w $\mathbb{R}^{m+1}$.

Istotnie, przekształcenie $u : X \to \mathbb{R}^{m+1}$ określone formułą, zob. 1.6 (1),

(1) $u(x) = (d_A(x)x, d_A(x))$

jest ciągłe i u ma jedyną wartwę niejednopunktową $u^{-1}(\mathbf{0}) = A$, a więc, zgodnie z Uwagą 5.1.1 (B), przestrzenie X/A i $u(X)$ są homeomorficzne.

Bez założenia zwartości, sklejanie zbioru do punktu w przestrzeni metryzowalnej może jednak prowadzić do przestrzeni niemetryzowalnej.

Przykład 5.1.4. Niech $(\mathbb{R}/\mathbb{N}, \mathcal{T}(d_e)/\mathbb{N})$ będzie przestrzenią otrzymaną z prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ przez sklejenie zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ do punktu. Wykażemy, że ta przestrzeń nie jest metryzowalna.

Załóżmy przeciwnie, że pewna metryka d generuje topologię $\mathcal{T}(d_e)/\mathbb{N}$ i niech B_n będzie kulą w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}/\mathbb{N}, d)$ o środku w punkcie $\pi(1)$ i promieniu $\frac{1}{n}$, gdzie $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ jest przekształceniem ilorazowym. Zbiór otwarty $\pi^{-1}(B_n)$ zawiera $\mathbb{N}$, można więc wybrać $r_n \in \pi^{-1}(B_n) \cap (n, n + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Zbiór $W = \mathbb{R} \setminus \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest otwarty w $\mathbb{R}$ i $\pi^{-1}(\pi(W)) = W$, zatem $\pi(W) \in \mathcal{T}(d_e)/\mathbb{N} = \mathcal{T}(d)$. Z drugiej strony, $\pi(1) \in \pi(W)$, ale $\pi(r_n) \in B_n \setminus \pi(W)$, dla $n \in \mathbb{N}$, co pokazuje, że żadna kula o środku w $\pi(1)$ nie leży w $\pi(W)$ i $\pi(W) \notin \mathcal{T}(d)$. Doszliśmy więc do sprzeczności.

Przykład 5.1.4 ilustruje też rolę założenia o istnieniu zbioru zwartego K w Uwadze 5.1.1 (B), do której odwoływaliśmy się w tej części kilkakrotnie. Istotnie, niech $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem ciągłym określonym formułą (1), gdzie $A = \mathbb{N}$. Wówczas $u(s) = u(t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(s) = \pi(t)$. Jednakże przestrzeń $u(\mathbb{R})$ nie jest homeomorficzna z $\mathbb{R}/\mathbb{N}$, bo jest przestrzenią metryzowalną.

5.2. **Przyklejanie przestrzeni wzdłuż przekształcenia.** Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi z rozłącznymi zbiorami punktów, $X \cap Y = \emptyset$. Sumą prostą tych przestrzeni nazywamy przestrzeń $(X \cup Y, \mathcal{T}_{X \oplus Y})$, gdzie topologia $\mathcal{T}_{X \oplus Y}$ jest rodziną wszystkich sum $U \cup V$, $U \in \mathcal{T}_X$, $V \in \mathcal{T}_Y$. Przestrzenie $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są podprzestrzeniami ich sumy prostej, przy czym oba zbiory X, Y są otwarte (a więc i domknięte) w sumie prostej.

Załóżmy teraz dodatkowo, że $K \subset X$ i $f : K \to Y$ jest ciągłym przekształceniem określonym na podprzestrzeni $(K, \mathcal{T}_K)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$.

Określmy w $X \cup Y$ relację równoważności $\sim_f$, która utożsamia punkty należące do K z ich obrazami przy f, nie utożsamiając innych punktów. Dokładniej, klasy abstrakcji w relacji $\sim_f$ są postaci $f^{-1}(a) \cup \{a\}$, dla $a \in f(K)$, oraz $\{a\}$, dla $a \in (X \setminus K) \cup (Y \setminus f(K))$.

Przestrzeń $(X \cup Y/\sim_f, \mathcal{T}_{X \oplus Y}/\sim_f)$ będziemy oznaczali symbolem $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$ i niech $\pi_f : X \cup Y \to X \cup_f Y$ będzie przekształceniem ilorazowym. Mówimy, że przestrzeń $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$ powstaje w wyniku przyklejenia Y do X wzdłuż przekształcenia f.

Przykład 5.2.1. Rozpatrzmy półsferę

$$S^2_+ = \{(s \cos t, s \sin t, \sqrt{1 - s^2}) : s \in [0, 1], t \in [0, 2\pi]\},$$

okrąg

$$K = \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]\} \subset S^2_+,$$

oraz przekształcenie

$$f : K \to S^1, \quad f(\cos t, \sin t, 0) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

na okrąg jednostkowy S^1 na płaszczyźnie euklidesowej. Przestrzeń $S^2_+ \cup_f S^1$ (gdzie S^2_+ i S^1 rozpatruje się z topologią euklidesową) jest homeomorficzna z płaszczyzną rzutową $\mathbb{P}^2$ opisaną w Przykładzie 5.1.3. Aby się o tym przekonać zauważmy, że $S^2_+ \subset S^2$. Niech $\sim$ oznacza obcięcie relacji równoważności na S^2 rozpatrywanej w 5.1.3 do S^2_+ i niech $u : S^2_+ \to \mathbb{P}^2$ będzie obcięciem do S^2_+ przekształcenia ilorazowego sklejającego punkty antypodyczne sfery. Z 5.1.1 (B) przestrzeń ilorazowa $(S^2_+/\sim, \mathcal{T}(d_e)/\sim)$ jest homeomorficzna z $\mathbb{P}^2$. Z drugiej strony, ta przestrzeń jest homeomorficzna z $S^2_+ \cup_f S^1$, bo nietrywialne klasy abstrakcji relacji $\sim$ pokrywają się z warstwami f, K jest zwarty i $f(K) = S^1$, więc przekształcenie ilorazowe $\pi : S^2_+ \to S^2_+/\sim$ przedłuża się do $\overline{\pi} : S^2_+ \cup S^1 \to S^2_+/\sim$ takiego, że warstwy $\overline{\pi}$ pokrywają się z klasami abstrakcji relacji $\sim_f$.

Jeśli $K \subset X$ i $f : K \to \{*\}$, gdzie $* \notin X$, to przestrzeń $X \cup_f \{*\}$ można utożsamiać z przestrzenią X/K otrzymaną z X przez sklejenie K do punktu. Następujące twierdzenie jest więc uogólnieniem obserwacji z 5.1 związanych z formułą (1), a Przykład 5.1.4 ilustruje rolę zwartości w tym twierdzeniu.

Twierdzenie 5.2.2. *Niech $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ będą rozłącznymi zwartymi podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowych, niech K będzie domkniętym podzbiorem X i niech $f : K \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas przestrzeń $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$ zanurza się homeomorficznie w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^{n+m+1}$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia Tietzego (zob. 1.6.6), f można przedłużyć do przekształcenia ciągłego $\overline{f} : X \to \mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że $d_K(x) = \inf\{d(x,z) : z \in K\}$ jest funkcją ciągłą, zob. 1.6 (2). Określmy przekształcenie ciągłe $g : X \to \mathbb{R}^{n+m+1}$ formułą, zob. 5.1 (1),

(1) $g(x) = (\overline{f}(x), d_K(x)x, d_K(x))$

i niech

(2) $Z = (Y \times \{\mathbf{0}\}) \cup g(X) \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$.

Pokażemy, że przestrzeń $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$ jest homeomorficzna z podprzestrzenią Z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+m+1}$. W tym celu rozpatrzmy przekształcenie $u : X \cup Y \to Z$ na Z, określone formułą

$$u(a) = \begin{cases} g(a), & \text{jeśli } a \in X, \\ (a, \mathbf{0}), & \text{jeśli } a \in Y. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla $a, b \in X \cup Y$, warunek $u(a) = u(b)$ jest równoważny warunkowi $\pi_f(a) = \pi_f(b)$.

Ponieważ g jest przekształceniem ciągłym, oraz X i Y są zbiorami domkniętymi w $X \cup Y$, u też jest przekształceniem ciągłym, zob. 1.3.9 (B). Ponadto, suma prosta przestrzeni zwartych jest zwarta, a więc z Uwagi 5.1.1 (B) wnosimy, że przestrzenie $X \cup_f Y$ i Z są homeomorficzne.

6. Homotopie

Homotopia między przekształceniami f i g oznacza, że g można otrzymać z f w wyniku ciągłej deformacji, zależącej od parametru $t \in I$, gdzie $I = [0,1]$.

Przestrzeń, dla której identyczność jest homotopijna z przekształceniem stałym, nazywamy przestrzenią ściągalną. Zbiory wypukłe są ściągalne, ale żadna sfera euklidesowa S^n nie jest ściągalna, zob. Wniosek 6.2.6 i Uzupełnienia 7.6.6.

Pokażemy, jak z nieściągalności okręgu S^1 można wyprowadzić zasadnicze twierdzenie algebry, zob. 6.2.7.

Pętle w przestrzeni X zaczepione w punkcie a – to drogi w X zaczynające się i kończące w a. Homotopia między pętlami α i β zaczepionymi w a jest ciągłą deformacją od α do β, nie poruszającą punktu zaczepienia. Pojęcie to pozwala przyporządkować przestrzeni X z wyróżnionym punktem a ważny obiekt – grupę podstawową $\pi_1(X,a)$, której elementami są klasy homotopii pętli w X zaczepionych w a. Jeśli przestrzeń X jest łukowo spójna, wybór punktu zaczepienia jest nieistotny i mówimy o grupie podstawowej $\pi_1(X)$ przestrzeni. Pokażemy, że grupa $\pi_1(S^1)$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$.

Pojęcie homotopii prowadzi do homotopijnej równoważności, która klasyfikuje przestrzenie bardziej elastycznie, niż relacja homeomorfizmu, zachowując jednak, w obrębie danej klasy równoważności, ważne własności topologiczne. W szczególności, łukowo spójne, homotopijnie równoważne przestrzenie mają izomorficzne grupy podstawowe, zob. Uzupełnienia 7.9.3.

6.1. **Homotopia przekształceń i pętli.**

Definicja 6.1.1. *Przekształcenia ciągłe $f,g : X \to Y$ przestrzeni $(X,\mathcal{T}_X)$ w $(Y,\mathcal{T}_Y)$ są homotopijne, jeśli istnieje przekształcenie ciągłe $H : X \times I \to Y$ – homotopia łącząca f z g, takie, że $f(x) = H(x,0)$ i $g(x) = H(x,1)$, dla $x \in X$. Piszemy wówczas $f \sim g$.*

Homotopia $H : X \times I \to Y$ łącząca f z g określa rodzinę przekształceń $f_t : X \to Y$, $f_t(x) = H(x,t)$, zależącą w sposób ciągły od punktu x i parametru t, przy czym $f_0 = f$ i $f_1 = g$. Homotopia H określa również rodzinę dróg $h_x : I \to Y$, $h_x(t) = H(x,t)$ łączących $f(x)$ z $g(x)$ dla $x \in X$.

Definicja 6.1.2. *Przestrzeń topologiczna $(X,\mathcal{T})$ jest ściągalna, jeśli identyczność jest homotopijna z przekształceniem stałym $\varepsilon_a(x) = a$, dla pewnego $a \in X$.*

Przykład 6.1.3. Wypukła podprzestrzeń X przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest ściągalna. Istotnie, dla $a \in X$, $H(x,t) = (1-t)x + ta$, $(x,t) \in X \times I$, jest homotopią łączącą id_X z ε_a.

Uwaga 6.1.4. (A) Przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna, bo jeśli homotopia $H : X \times I \to X$ łączy id_X z ε_a, to $h_x(t) = H(x,t)$, $t \in I$, jest drogą w X od punktu x do a, a zatem każde dwa punkty w X można połączyć drogą.

(B) W przestrzeni łukowo spójnej X, dla dowolnych $a,b \in X$, $\varepsilon_a \sim \varepsilon_b$. Aby to sprawdzić, wystarczy wybrać drogę $h : I \to X$ od a do b i określić homotopię $H : X \times I \to X$ łączącą ε_a z ε_b formułą $H(x,t) = h(t)$.

Ponieważ przestrzenie ściągalne są łukowo spójne, jeśli $id_X \sim \varepsilon_a$ dla pewnego $a \in X$, to $id_X \sim \varepsilon_b$ dla każdego $b \in X$. Wynika to z 6.1.4 i z części (A) kolejnej uwagi.

Uwaga 6.1.5. (A) Dla ustalonych przestrzeni topologicznych X, Y, relacja homotopii w zbiorze $C(X,Y)$ przekształceń ciągłych z X w Y jest relacją równoważności.

Zwrotność $f \sim f$ jest jasna, a symetria wynika z obserwacji, że jeśli homotopia $H : X \times I \to Y$ łączy f z g, to $\overline{H}(x,t) = H(x,1-t)$ jest homotopią łączącą g

z f. Sprawdzimy przechodniość. Niech $f, g, h \in C(X,Y)$, $f \sim g$, $g \sim h$ i niech homotopie $H_1, H_2 : X \times I \to Y$ łączą f z g i g z h, odpowiednio. Wówczas

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

jest homotopią łączącą f z h, a więc $f \sim h$.

(B) Niech $f, g : X \to Y$, $u : S \to X$, $w : Y \to Z$ będą przekształceniami ciągłymi. Jeśli $f \sim g$, to także $w \circ f \circ u \sim w \circ g \circ u$.

Jeśli bowiem homotopia $H : X \times I \to Y$ łączy f z g, to homotopia $G : S \times I \to Z$, $G(s,t) = w(H(u(s),t))$, łączy $w \circ f \circ u$ z $w \circ g \circ u$.

(C) Dowolne przekształcenia $f, g : X \to Y$ w przestrzeń ściągalną Y są homotopijne. Istotnie, $id_Y \sim \varepsilon_a$, zatem z (B) i (A), $f = id_Y \circ f \sim \varepsilon_a \circ f = \varepsilon_a \circ g \sim id_Y \circ g = g$.

Definicja 6.1.6. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną z wyróżnionym punktem $a \in X$.*

(A) Pętlą w X zaczepioną w a nazywamy drogę $\alpha : I \to X$ taką, że $\alpha(0) = a = \alpha(1)$. Zbiór pętli w X zaczepionych w a oznaczamy symbolem $\Omega(X,a)$.

(B) Homotopią między pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(X,a)$ nazywamy homotpię $H : I \times I \to X$ łączącą α z β i spełniającą warunek $H(0,t) = a = H(1,t)$, dla $t \in I$.

Tak więc, dla homotopii $H : I \times I \to X$ między pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(X,a)$, każde przekształcenie $\alpha_t(s) = H(s,t)$ jest pętlą w X zaczepioną w a . Aby nie komplikować oznaczeń, homotopijność pętli $\alpha, \beta \in \Omega(X,a)$ zapisywać będziemy używając wprowadzonego wcześniej symbolu $\alpha \sim \beta$, pamiętając jednak, że na homotopię między pętlami nakładamy dodatkowe ograniczenie – punkt zaczepienia pętli nie przemieszcza się przy homotopii.

Uwaga 6.1.7. Relacja homotopii w zbiorze $\Omega(X,a)$ jest relacją równoważności. Dla uzasadnienia, wystarczy powtórzyć rozumowanie z 6.1.5 (A).

6.2. **Pętle w S^1.** W tej części będziemy rozpatrywali S^1 jako zbiór liczb zespolonych o module 1,

(1) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $d_e(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Dla każdej drogi $f : I \to S^1$ można określić przekształcenie ciągłe $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ takie, że $2\pi\tilde{f}(s)$ jest argumentem liczby zespolonej $f(s)$, $s \in I$. Przy tym, dla każdego wyboru argumentu α liczby zespolonej $f(0)$, istnieje dokładnie jedno takie przekształcenie $\tilde{f}$ spełniające warunek $2\pi\tilde{f}(0) = \alpha$.

Istotnie, z jednostajnej ciągłości f, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|s-t| < \delta$, to $|f(s) - f(t)| < 2$ i niech $\frac{1}{N} < \delta$. Wówczas $\tilde{f}$ można określić kolejno na przedziałach $I_i = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$, $i = 1, \ldots, N$: ponieważ łuk $T_i = f(I_i)$ okręgu S^1 nie zawiera punktów przeciwległych, jeśli $\tilde{f}(\frac{i-1}{N})$ jest już określone, dla każdego $z \in T_i$ można wskazać jednoznacznie argument $u(z)$ tej liczby spełniający warunek $|u(z) - 2\pi\tilde{f}(\frac{i-1}{N})| < \pi$; funkcja $u : T_i \to \mathbb{R}$ jest ciągła i wystarczy przyjąć $\tilde{f}(s) = \frac{1}{2\pi}u(f(s))$, dla $s \in I_i$.

Liczba $2\pi(\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0))$ mierzy przyrost argumentu wzdłuż drogi f. Jeśli f jest pętlą, $f(0) = f(1)$, więc liczba $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ jest całkowita. Pokażemy, że ta liczba - stopień pętli, nie zmienia się przy homotopii pętli.

Wyprowadzimy to z Twierdzenia 6.2.1, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o podnoszeniu przekształceń, zob. Uzupełnienia 7.10.2. Wykażemy przy tym istnienie przekształcenia $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ związanego z drogą f w S^1, niezależnie od podanego wyżej uzasadnienia. Zacznijmy od wprowadzenia pewnych oznaczeń.

Przekształcenie

(2) $E : \mathbb{R} \to S^1, \quad E(s) = \cos(2\pi s) + i\sin(2\pi s),$

nazywamy nawinięciem prostej na okrąg. Zauważmy, że

(3) $E(s) \cdot E(t) = E(s+t), \quad E(-s) = \frac{1}{E(s)},$

oraz

(4) $E^{-1}(1) = \mathbb{Z},$

gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.

Nawinięcie E przekształca przedział $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ homeomorficznie na $S^1 \setminus \{-1\}$. Niech L będzie homeomorfizmem odwrotnym do obcięcia nawinięcia E do $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, to znaczy

(5) $L : S^1 \setminus \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad E \circ L(z) = z.$

Twierdzenie 6.2.1. *Niech $f : I^n \to S^1$ będzie przekształceniem ciągłym i $f(\mathbf{0}) = 1$. Istnieje wówczas dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $\tilde{f} : I^n \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \tilde{f} = f$, oraz $\tilde{f}(\mathbf{0}) = 0$.*

Dowód. Przekształcenia ciągłe na I^n są jednostajnie ciągłe, zob. 2.2.4, istnieje zatem liczba $\delta > 0$ taka, że

(6) jeśli $d_e(x, y) < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < 2$,

i niech liczba naturalna N spełnia warunek

(7) $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$

Określimy przekształcenia ciągłe $f_j : I^n \to S^1$ formułami

(8) $f_j(x) = f((\frac{j}{N})x), \quad j = 0, 1, \ldots, N.$

Ponieważ $d_e((\frac{j}{N})x, (\frac{j-1}{N})x) = \frac{1}{N} d_e(x, \mathbf{0}) < \frac{\sqrt{n}}{N}$, z (7) i (6) mamy $|f_j(x) - f_{j-1}(x)| < 2$, a więc

(9) $\frac{f_j(x)}{f_{j-1}(x)} \neq -1, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$

Z (5) i (9) wynika, że funkcja

(10) $\tilde{f} = L(\frac{f_1}{f_0}) + L(\frac{f_2}{f_1}) + \ldots + L(\frac{f_N}{f_{N-1}})$

jest dobrze określona i ciągła. Z (3), (5) i (10), $E \circ \tilde{f} = \frac{f_1}{f_0} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdots \frac{f_N}{f_{N-1}} = \frac{f_N}{f_0} = f$, a ponieważ $f_j(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) = 1$ i $L(1) = 0$, mamy też $\tilde{f}(\mathbf{0}) = 0$.

Pozostaje uzasadnić jednoznaczność $\tilde{f}$. Niech funkcja ciągła $g : I^n \to \mathbb{R}$ spełnia warunki $E \circ g = f$, $g(\mathbf{0}) = 0$ i niech $h = \tilde{f} - g$. Z (3), $E \circ h = \frac{E \circ \tilde{f}}{E \circ g} = \frac{f}{f} = 1$, zatem z (4), $h(I^n) \subset \mathbb{Z}$. Spójny zbiór $h(I^n)$ jest więc jednopunktowy, a ponieważ $h(\mathbf{0}) = \tilde{f}(\mathbf{0}) - g(\mathbf{0}) = 0$, mamy $h(x) = 0$ dla $x \in I^n$. Zatem $g = \tilde{f}$, co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 6.2.2. Niech $f : I^n \to S^1$ i $\tilde{f} : I^n \to \mathbb{R}$ będą takie, jak w Twierdzeniu 6.2.1. Jeśli $S \subset I^n$ jest zbiorem spójnym i $f(S) = \{1\}$, to dla pewnej liczby całkowitej $d \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}(S) = \{d\}$.

Istotnie, $E \circ \tilde{f}(S) = f(S) = \{1\}$, zatem z (4), zbiór spójny $\tilde{f}(S)$ jest podzbiorem $\mathbb{Z}$, a więc jest zbiorem jednopunktowym.

Definicja 6.2.3. *Stopniem pętli* $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$ *nazywamy liczbę całkowitą* $\deg\alpha = \tilde{\alpha}(1)$, *gdzie* $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą taką, że* $E \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ *i* $\tilde{\alpha}(0) = 0$, *zob. 6.2.1, 6.2.2.*

Twierdzenie 6.2.4. *Pętle* $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ *są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe stopnie,* $\deg\alpha = \deg\beta$.

Dowód. Niech $H : I \times I \to S^1$ będzie homotopią między pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ (przypomnijmy, że $H(0, t) = 1 = H(1, t)$, dla $t \in I$). Z 6.2.1, istnieje przekształcenie ciągłe $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \tilde{H} = H$ i $\tilde{H}(0, 0) = 0$.

Z 6.2.2, dla $S = \{i\} \times I$, $i = 0, 1$, $\tilde{H}(0, t) = 0$ i $\tilde{H}(1, t) = d$, dla $t \in I$ i pewnego $d \in \mathbb{Z}$. Przyjmijmy $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{H}(s, 0)$, $\tilde{\beta}(s) = \tilde{H}(s, 1)$. Wówczas $E \circ \tilde{\alpha}(s) = E \circ \tilde{H}(s, 0) = H(s, 0) = \alpha(s)$ i podobnie, $E \circ \tilde{\beta} = \beta$. Ponadto, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{H}(0, 0) = 0 = \tilde{H}(0, 1) = \tilde{\beta}(0)$. Zgodnie z 6.2.3, $\deg\alpha = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\beta}(1) = \deg\beta$.

Na odwrót, załóżmy, że pętle $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ mają równe stopnie i niech $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $E \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, $E \circ \tilde{\beta} = \beta$, $\tilde{\alpha}(0) = 0 = \tilde{\beta}(0)$. Wówczas $\tilde{\alpha}(1) = \deg\alpha = \deg\beta = \tilde{\beta}(1)$, skąd wynika, że $H(s, t) = E((1 - t)\tilde{\alpha}(s) + t\tilde{\beta}(s))$ jest homotopią między pętlami α i β.

Wniosek 6.2.5. *Dla* $d \in \mathbb{Z}$ *pętla*

(11) $\quad \omega_d(s) = \cos(2\pi ds) + i\sin(2\pi ds),\ s \in I,$

ma stopień d. *Jeśli* $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$ *i* $\deg\alpha = d$, *to* α *jest homotopijna z pętlą* ω_d.

Dowód. Dla funkcji liniowej $\tilde{\omega}_d(s) = ds$ mamy $E \circ \tilde{\omega}_d = \omega_d$ i $\tilde{\omega}_d(0) = 0$, a więc $\deg\omega_d = \tilde{\omega}_d(1) = d$, zob. 6.2.3. Z 6.2.4 mamy $\alpha \sim \omega_d$.

Wniosek 6.2.6. *Okrąg* S^1 *jest nieściągalny. Co więcej, jeśli* n, m *są liczbami całkowitymi i przekształcenia* z^n *i* z^m *z* S^1 *w* S^1 *są homotopijne, to* $n = m$.

Dowód. Niech $H : S^1 \times I \to S^1$ będzie homotopią łączącą z^n z z^m, tzn. $H(z, 0) = z^n$ i $H(z, 1) = z^m$, dla $z \in \mathbb{C}$. Wówczas przekształcenie $G : I \times I \to S^1$ określone formułą $G(s, t) = H(E(s), t) \cdot H(1, t)^{-1}$ jest homotopią między pętlami $\omega_n, \omega_m \in \Omega(S^1, 1)$, zob. (2) i (11). Z 6.2.4 i 6.2.5, $n = \deg\omega_n = \deg\omega_m = m$.

Wniosek 6.2.7. (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy wielomian* $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ *o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $P(z) \neq 0$, dla $z \in \mathbb{C}$. Funkcja $F : S^1 \times I \to \mathbb{C}$ zadana wzorem $F(z, s) = s^n P(\frac{z}{s}) = s^n a_0 + s^{n-1} a_1 z + \ldots + s a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ jest ciągła i nie przyjmuje wartości 0.

Określmy $H : S^1 \times I \to S^1$ formułami

$$H(z, t) = \begin{cases} \frac{F(z, 2t)}{|F(z, 2t)|}, & \text{jeśli } \ t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ \frac{P(2(1-t)z)}{|P(2(1-t)z)|}, & \text{jeśli } \ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dla $t = \frac{1}{2}$ obie formuły dają $H(z, \frac{1}{2}) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$, przekształcenie H jest więc ciągłe na $S^1 \times [0,1]$, zob. 1.3.9 (B). Zatem H jest homotopią łączącą przekształcenie $H(z,0) = z^n$ z przekształceniem stałym $H(z,1) = \frac{P(0)}{|P(0)|}$. Z 6.1.4 (B) otrzymujemy $z^n \sim \varepsilon_1 = z^0$, co przeczy Wnioskowi 6.2.6.

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym orzeka, że dla kuli $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : d_e(x, \mathbf{0}) \leqslant 1\}$, każde przekształcenie ciągłe $f : D^n \to D^n$ ma punkt stały. Dla $n = 1$ jest to prosta konsekwencja spójności $D^1 = [-1, 1]$ i Twierdzenia 4.1.5. Dla $n = 2$ wyprowadzimy to twierdzenie z nieściągalności okręgu S^1. Dowód dla dowolnych n podajemy w Uzupełnieniach 7.6.

Wniosek 6.2.8. *Dla każdego przekształcenia ciągłego $f : D^2 \to D^2$ istnieje $x \in D^2$ takie, że $f(x) = x$.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $f(x) \neq x$ dla $x \in D^2$ i niech $r(x)$ będzie punktem przecięcia okręgu S^1 z półprostą wychodzącą z $f(x)$ w kierunku wektora $\overrightarrow{f(x)x}$. Przekształcenie $r : D^2 \to S^1$ jest ciągłe i $r(x) = x$, dla $x \in S^1$. Formuła $H(x,t) = r(tx)$ określa homotopię $H : S^1 \times I \to S^1$ łączącą przekształcenie stałe $H(x,0) = r(0)$ z identycznością $H(x,1) = r(x) = x$, co przeczy nieściągalności S^1, zob. 6.2.6.

6.3. **Grupa podstawowa przestrzeni.** Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną z wyróżnionym punktem $a \in X$. W zbiorze $\Omega(X,a)$ pętli w X zaczepionych w a wprowadzimy operacje mnożenia i odwracania pętli.

Definicja 6.3.1. *Iloczynem pętli $\alpha, \beta \in \Omega(X,a)$ nazywamy pętlę*

(1) $$\alpha \star \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \textit{jeśli } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2s-1), & \textit{jeśli } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Pętla odwrotna do $\alpha \in \Omega(X,a)$ jest określona formułą

(2) $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s), \quad s \in [0,1].$

Uwaga 6.3.2. Dla pętli ω_c, ω_d opisanych w 6.2.5, $\overline{\omega_d} = \omega_{-d}$ i $\omega_c \star \omega_d \sim \omega_{c+d}$.

Pierwsza równość wynika ze wzoru 6.2 (11). Dla uzasadnienia drugiej części rozważmy przekształcenie ciągłe $u : I \to \mathbb{R}$, określone formułami $u(s) = 2cs$, jeśli $s \in [0, \frac{1}{2}]$ i $u(s) = c + 2(s - \frac{1}{2})d$, jeśli $s \in [\frac{1}{2}, 1]$. Mamy $E \circ u = \omega_c \star \omega_d$, $u(0) = 0$, a więc $\deg(\omega_c \star \omega_d) = u(1) = c + d$, zob. 6.2.3 i 6.2.5.

Sprawdzimy, że mnożenie i odwracanie pętli jest zgodne z relacją homotopii pętli.

Lemat 6.3.3. *Niech $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \Omega(X,a)$. Jeśli $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, to $\alpha\star\beta \sim \alpha'\star\beta'$, oraz $\overline{\alpha} \sim \overline{\alpha}'$.*

Dowód. Jeśli H_0 jest homotopią między α i α', a H_1 jest homotopią między β i β', to formuła

$$H(s,t) = \begin{cases} H_0(2s,t), & \text{jeśli } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_1(2s-1,t), & \text{jeśli } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

określa homotopię między $\alpha \star \beta$ i $\alpha' \star \beta'$, a $\overline{H}_0(s,t) = H_0(1-s,t)$ jest homotopią między $\overline{\alpha}$ i $\overline{\alpha}'$.

Następny lemat ustala, że mnożenie pętli jest, z dokładnością do relacji homotopii, łączne.

Lemat 6.3.4. *Dla $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X,a)$, $(\alpha \star \beta) \star \gamma \sim \alpha \star (\beta \star \gamma)$.*

Dowód. Dla $0 < u < w < 1$ określmy pętlę $\tau_{u,w} \in \Omega(X,a)$ formułami

$$\tau_{u,w}(s) = \begin{cases} \alpha(\frac{s}{u}), & \text{jeśli } s \in [0,u], \\ \beta(\frac{s-u}{w-u}), & \text{jeśli } s \in [u,w], \\ \gamma(\frac{s-w}{1-w}), & \text{jeśli } s \in [w,1]. \end{cases}$$

Niech K będzie odcinkiem łączącym punkty $(\frac{1}{4},0)$ i $(\frac{1}{2},1)$ w kwadracie I^2, a L odcinkiem łączącym $(\frac{1}{2},0)$ z $(\frac{3}{4},1)$ i niech $(u(t),t) \in K$, $(w(t),t) \in L$, dla $t \in I$. Wówczas $H(s,t) = \tau_{u(t),w(t)}(s)$ jest homotopią miedzy $(\alpha \star \beta) \star \gamma$ i $\alpha \star (\beta \star \gamma)$.

Ostatni lemat z tej serii wyjaśnia, że z dokładnością do relacji homotopii, pętla stała ε_a jest elementem neutralnym, a pętla $\overline{\alpha}$ jest odwrotnością pętli α, ze względu na wprowadzoną operację mnożenia.

Lemat 6.3.5. *Dla każdej pętli $\alpha \in \Omega(X,a)$, $\varepsilon_a \star \alpha \sim \alpha \sim \alpha \star \varepsilon_a$, oraz $\alpha \star \overline{\alpha} \sim \varepsilon_a \sim \overline{\alpha} \star \alpha$.*

Dowód. Niech K będzie odcinkiem łączącym punkty $(\frac{1}{2},0)$ i $(0,1)$ w kwadracie I^2 i niech $(u(t),t) \in K$, dla $t \in I$. Dla $u \in [0,\frac{1}{2}]$ określmy pętle $\tau_u, \sigma_u \in \Omega(X,a)$ formułami

$$\tau_u(s) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } s \in [0,u], \\ \alpha(\frac{s-u}{1-u}), & \text{jeśli } s \in [u,1]; \end{cases} \qquad \sigma_u(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{jeśli } s \in [0,u], \\ \alpha(2u), & \text{jeśli } s \in [u,1-u], \\ \overline{\alpha}(2s-1), & \text{jeśli } s \in [1-u,1], \end{cases}$$

(zauważmy, że $\overline{\alpha}(2(1-u)-1) = \overline{\alpha}(1-2u) = \alpha(2u)$). Wówczas homotopia $H(s,t) = \tau_{u(t)}(s)$ łączy pętlę $\varepsilon_a \star \alpha$ z α, a homotopia $G(s,t) = \sigma_{u(t)}(s)$ łączy $\alpha \star \overline{\alpha}$ z ε_a. Podobnie określa się homotopie łączące $\alpha \star \varepsilon_a$ z α i $\overline{\alpha} \star \alpha$ z ε_a.

Lematy 6.3.3 – 6.3.5 pozwalają określić strukturę grupy w zbiorze $\Omega(X,a)/\sim$ klas abstrakcji pętli zaczepionych w a, ze względu na relację homotopii między pętlami.

Definicja 6.3.6. *Grupą podstawową $\pi_1(X,a)$ przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{T})$ z wyróżnionym punktem a nazywamy zbiór klas abstrakcji $[\alpha] = \{\alpha' : \alpha' \in \Omega(X,a),\ \alpha \sim \alpha'\}$, $\alpha \in \Omega(X,a)$, z działaniem mnożenia $[\alpha][\beta] = [\alpha \star \beta]$, elementem jednostkowym $[\varepsilon_a]$ i operacją odwracania $[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$.*

Dokładniej, 6.3.3 zapewnia, że określenie mnożenia w $\pi_1(X,a)$ nie zależy od wyboru reprezentantów klas abstrakcji $[\alpha] \in \pi_1(X,a)$, 6.3.4 stwierdza łączność mnożenia, a 6.3.5 pokazuje, że $[\alpha][\varepsilon_a] = [\alpha] = [\varepsilon_a][\alpha]$ i $[\alpha][\overline{\alpha}] = [\varepsilon_a] = [\overline{\alpha}][\alpha]$.

Twierdzenie 6.3.7. *Grupa podstawowa $\pi_1(S^1,1)$ jest izomorficzna z grupą addytywną liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.*

Dowód. Zgodnie z 6.2.4, pętle zaczepione w 1 są homotopijne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe stopnie. Funkcja

$$\phi([\alpha]) = \deg\alpha, \quad \alpha \in \Omega(S^1, 1),$$

jest więc dobrze określona i różnowartościowa. Funkcja ϕ jest homomorfizmem,

$$\phi([\alpha][\beta]) = \phi([\alpha]) + \phi([\beta]), \text{ dla } \quad \alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1),$$

bo z 6.2.5 i 6.3.2, dla $c = \deg\alpha$ i $d = \deg\beta$, $\phi([\alpha][\beta]) = \phi([\omega_c][\omega_d]) = \phi([\omega_c \star \omega_d]) = \phi([\omega_{c+d}]) = c + d$.

Z 6.2.5 wynika też, że ϕ jest epimorfizmem, ϕ jest więc izomorfizmem.

Twierdzenie 6.3.8. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna, to dla dowolnych punktów $a, b \in X$, grupy $\pi_1(X, a)$ i $\pi_1(X, b)$ są izomorficzne.*

Dowód. Wybierzmy drogę $h : I \to X$ od a do b i zwiążmy z nią przekształcenie $\varphi_h : \Omega(X, b) \to \Omega(X, a)$,

$$(3) \quad \varphi_h(\alpha) = \begin{cases} h(3s), & \text{jeśli } s \in [0, \frac{1}{3}], \\ \alpha(3s-1), & \text{jeśli } s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ h(3(1-s)), & \text{jeśli } s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Jeśli H jest homotopią między pętlami α i β zaczepionymi w b, to homotopię między pętlami $\varphi_h(\alpha)$ i $\varphi_h(\beta)$ zaczepionymi w a można określić formułami

$$H_h(s, t) = \begin{cases} h(3s), & \text{jeśli } s \in [0, \frac{1}{3}], \\ H(3s-1, t), & \text{jeśli } s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ h(3(1-s)), & \text{jeśli } s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Zatem klasa $[\varphi_h(\alpha)]$ nie zależy od wyboru reprezentanta klasy $[\alpha]$, co pozwala zdefiniować $\phi_h : \pi_1(X, b) \to \pi_1(X, a)$ formułą

$$(4) \quad \phi_h([\alpha]) = [\varphi_h(\alpha)], \text{ dla } [\alpha] \in \pi_1(X, b).$$

Argument podobny do użytego w drugiej części dowodu Lematu 6.3.5 pokazuje, że dla $\alpha, \beta \in \Omega(X, b)$, $\varphi_h(\alpha \star \beta) \sim \varphi_h(\alpha) \star \varphi_h(\beta)$, a więc ϕ_h jest homomorfizmem grup.

Niech $\overline{h}(s) = h(1-s)$ będzie drogą od b do a, odwrotną do h. Jeśli $\alpha \in \Omega(X, b)$ i $\beta \in \Omega(X, a)$, to $\varphi_{\overline{h}}(\varphi_h(\alpha)) \sim \alpha$ i $\varphi_h(\varphi_{\overline{h}}(\beta)) \sim \beta$, co uzasadnia się podobnie, jak drugą część Lematu 6.3.5. Zatem $\phi_{\overline{h}}$ i ϕ_h są homomorfizmami wzajemnie odwrotnymi, a więc izomorfizmami.

Definicja 6.3.9. *Dla przestrzeni łukowo spójnej $(X, \mathcal{T})$, grupą podstawową $\pi_1(X)$ nazywać będziemy grupę izomorficzną z $\pi_1(X, a)$, dla dowolnego $a \in X$.*

Z Twierdzenia 6.3.7 otrzymujemy natychmiast

Wniosek 6.3.10. *Grupa podstawowa okręgu S^1 jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$.*

6.4. **Homotopijna równoważność.** Na zakończenie tego rozdziału opiszemy ważną klasyfikację przestrzeni topologicznych, związaną z pojęciem homotopii.

Definicja 6.4.1. *Przestrzenie topologiczne* $(X, \mathcal{T}_X)$ *i* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *są homotopijnie równoważne, jeśli istnieją przekształcenia ciągłe* $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ *takie, że* $g \circ f \sim id_X$*, oraz* $f \circ g \sim id_Y$.

Uwaga 6.4.2. Relacja homotopijnej równoważności jest relacją równoważności w klasie przestrzeni topologicznych. Wyjaśnienia wymaga jedynie przechodniość: jeśli X i Y, oraz Y i Z są homotopijnie równoważne, to X i Z są homotopijnie równoważne. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, oraz $u : Y \to Z$, $w : Z \to Y$ będą przekształceniami ciągłymi spełniającymi warunki $g \circ f \sim id_X$, $f \circ g \sim id_Y$, oraz $w \circ u \sim id_Y$, $u \circ w \sim id_Z$. Z 6.1.5 (B), $(g \circ w) \circ (u \circ f) = g \circ (w \circ u) \circ f \sim g \circ id_Y \circ f = g \circ f \sim id_X$, oraz $(u \circ f) \circ (g \circ w) = u \circ (f \circ g) \circ w \sim u \circ id_Y \circ w = u \circ w \sim id_Z$.

Przykład 6.4.3. (A) Przestrzeń ściągalna X jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową $Y = \{a\}$, $a \in X$, bo dla zanurzenia $i_Y : Y \to X$ i przekształcenia stałego $r : X \to Y$ mamy $r \circ i_Y = id_Y$, oraz $i_Y \circ r \sim id_X$.

Ponieważ każde dwie przestrzenie jednopunktowe są homeomorficzne, z 6.4.2 wynika, że każde dwie przestrzenie ściągalne są homotopijnie równoważne. W szczególności, prosta euklidesowa i płaszczyzna są homotopijnie równoważne, ale nie są homeomorficzne, zob. 1.3.8.

(B) Okrąg $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ jest homotopijnie równoważny z płaszczyzną bez punktu $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Istotnie, dla zanurzenia $i_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C}^*$, oraz przekształcenia $r : C^* \to S^1$, $r(x) = \frac{1}{d_e(x,\mathbf{0})} x$, nie poruszającego punktów S^1 mamy $r \circ i_{S^1} = id_{S^1}$, zaś $H : \mathbb{C}^* \times I \to \mathbb{C}^*$ określone formułą $H(x, t) = (1 - t + \frac{t}{d_e(x,\mathbf{0})})x$ jest homotopią łączącą $id_{\mathbb{C}^*}$ z $i_{S^1} \circ r$.

Uwaga 6.4.4. Grupa podstawowa zbioru wypukłego X w przestrzeni euklidesowej jest trywialna: dla ustalonego $a \in X$ i pętli $\alpha \in \Omega(X, a)$, $H(s, t) = (1 - t)a + t\alpha(s)$ jest homotopią miedzy ε_a i α, a więc $[\alpha] = [\varepsilon_a]$. W Uzupełnieniach 7.9.3 wykażemy ogólniejszy fakt, że grupy podstawowe łukowo spójnych przestrzeni homotopijnie równoważnych są izomorficzne. W szczególności, grupa podstawowa przestrzeni ściągalnej jest trywialna.

7. Uzupełnienia

7.1. **Otwarty zbiór wypukły w $\mathbb{R}^n$ jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$.** Niech $||x|| = d_e(x, \mathbf{0})$, dla $x \in \mathbb{R}^n$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ i niech W będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ zawierajacym $\overline{B}$. Dla $x \neq \mathbf{0}$, przyjmijmy

$$p(x) = \sup\{t > 0 : \frac{tx}{||x||} \in W\}, \qquad q(x) = \begin{cases} \frac{1}{p(x)} & \text{jeśli } p(x) \neq \infty, \\ 0 & \text{jeśli } p(x) = \infty. \end{cases}$$

Określimy $f : W \to \mathbb{R}^n$ i $g : \mathbb{R}^n \to W$ formułami

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-q(x)||x||}\right) x, & \text{jeśli } x \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{jeśli } x = \mathbf{0}, \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+q(y)||y||}\right) y, & \text{jeśli } y \neq \mathbf{0}. \\ \mathbf{0}, & \text{jeśli } y = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Funkcje f i g są wzajemnie odwrotne (istotnie, dla $x \neq \mathbf{0}$, x, $f(x)$ i $g(f(x))$ leżą na jednej półprostej wychodzącej z $\mathbf{0}$ oraz $||f(x)||^{-1} = ||x||^{-1} - q(x)$ i $||g(y)||^{-1} = ||y||^{-1} + q(y)$). Sprawdzimy, że obie są ciągłe, a więc zbiory W i

$\mathbb{R}^n$ są homeomorficzne. Ciągłość funkcji f i g w punkcie $\mathbf{0}$ jest widoczna. Dla dowodu ciągłości f i g w pozostałych punktach wystarczy sprawdzić, że q jest funkcją ciągłą.

Ustalmy $a \neq \mathbf{0}$. Niech H będzie hiperpłaszczyzną przechodzącą przez $\mathbf{0}$ i prostopadłą do $\overrightarrow{\mathbf{0}a}$, $C = H \cap B$ i niech C^+ będzie częścią walca nad C leżącą w półprzestrzeni wyznaczonej przez H i punkt a. Z wypukłości W wynikają następujące dwie obserwacje: jeśli $p(a) = \infty$, to W zawiera C^+, a jeśli $p(a) = r \neq \infty$, to W zawiera stożek otwarty będący sumą odcinków otwartych $\overline{cb}$ łączących punkty $c \in C$ z wierzchołkiem $b = ra/||a||$ i jest rozłączny ze stożkiem otwartym będącym sumą półprostych otwartych wychodzących z b w kierunku wektora $\overrightarrow{cb}$, dla $c \in C$. Zatem, jeśli $a_n \to a$, to $p(a_n) \to p(a)$ (także, dla $p(a) = \infty$), a więc $q(a_n) \to q(a)$.

7.2. **Strzałka i kwadrat leksykograficzny.** (A) Wykażemy (zob. też Zadanie 1.49), że strzałka, tzn. zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z topologią $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ generowaną przez bazę złożoną z przedziałów $(a, b]$, nie jest przestrzenią metryzowalną.

Załóżmy przeciwnie, że $\mathcal{T}_{\leftarrow} = \mathcal{T}(d)$ dla pewnej metryki d na $\mathbb{R}$ i niech $B(a, r)$ będzie kulą w $(\mathbb{R}, d)$ o środku w a i promieniu r. Ustalmy $a \in \mathbb{R}$. Ponieważ $(-\infty, a] \in \mathcal{T}_{\leftarrow} = \mathcal{T}(d)$, istnieje n takie, że $B(a, \frac{1}{n}) \subset (-\infty, a]$ i z kolei, istnieje m takie, że $(a - \frac{1}{m}, a] \subset B(a, \frac{1}{n})$. Wynika stąd, że zbiory $A_{nm} = \{a \in \mathbb{R} : (a - \frac{1}{m}, a] \subset B(a, \frac{1}{n}) \subset (-\infty, a]\}$ pokrywają $\mathbb{R}$, a więc jeden z nich jest nieprzeliczalny. Ustalmy taki zbiór A_{nm}. W jednym z przedziałów $[\frac{k}{2m}, \frac{k+1}{2m}]$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ leży wówczas nieskończenie wiele elementów A_{nm}, możemy więc wybrać $a, b \in A_{nm}$ takie, że $a < b$ i $b - a < \frac{1}{m}$. Ponieważ $a \in (b - \frac{1}{m}, b] \subset B(b, \frac{1}{n})$, mamy $b \in B(a, \frac{1}{n}) \subset (-\infty, a]$, co przeczy temu, że $a < b$.

To samo rozumowanie pokazuje, że przedział $(0, 1]$ z topologią podprzestrzeni strzałki $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\leftarrow})$ nie jest metryzowalny, a więc $(I^2, \mathcal{T}(<))$, kwadrat leksykograficzny opisany w przykładzie 1.2.8, nie jest metryzowalny, zob. Przykład 1.2.10.

(B) Pokażemy, że kwadrat leksykograficzny $(I^2, \mathcal{T}(<))$ jest przestrzenią zwartą. Ponieważ topologie wyznaczone przez porządki liniowe (zob. 1.2.8) są Hausdorffa, wystarczy sprawdzić, że jeśli $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem kwadratu leksykograficznego, to I^2 można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$.

Dla każdego $t \in I$ wybierzmy $V_t, W_t \in \mathcal{U}$ takie, że $(t, 0) \in V_t$ i $(t, 1) \in W_t$. Ustalmy $0 < t < 1$. Z określenia topologii $\mathcal{T}(<)$, zob. 1.2.8, wynika istnienie $\varepsilon > 0$ takiego, że każdy punkt z I^2 leżący między $(t - \varepsilon, 0)$ i $(t, 0)$, ze względu na porządek leksykograficzny, należy do V_t, a każdy punkt leżący między $(t, 1)$ i $(t + \varepsilon, 1)$ należy do W_t. Dla przedziału euklidesowego $J_t = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap I$ mamy więc $(J_t \times I) \setminus (\{t\} \times I) \subset V_t \cup W_t$. Podobnie można dobrać przedziały J_t dla $t = 0$ i $t = 1$. Ze zwartości przedziału euklidesowego I, można wybrać pokrycie skończone $I = J_{t_1} \cup \ldots \cup J_{t_k}$. Wówczas $I^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (V_{t_i} \cup W_{t_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{t_i\} \times I$. Na każdym zbiorze $\{t\} \times I$, topologia podprzestrzeni przestrzeni $(I^2, \mathcal{T}(<))$ jest identyczna z topologią euklidesową, zob. 1.2.8, a więc zbiory $\{t\} \times I$ są zwarte w przestrzeni $(I^2, \mathcal{T}(<))$. Wynika stąd, że sumę $\bigcup_{i=1}^{k} \{t_i\} \times I$ możemy pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$ i w rezultacie możemy wybrać z $\mathcal{U}$ skończone pokrycie I^2.

7.3. **Dowolne iloczyny kartezjańskie i twierdzenie Tichonowa.** Niech $(X_s, \mathcal{T}_s)$, $s \in S$, będzie rodziną przestrzeni topologicznych, indeksowaną elementami dowolnego zbioru S. Punktami iloczynu $\prod_{s\in S} X_s$ są funkcje $u : S \to \bigcup_{s\in S} X_s$ takie, że $u(s) \in X_s$, dla $s \in S$.

Kostkami bazowymi w $\prod_{s\in S} X_s$ nazywamy zbiory

(1) $\prod_{s\in S} V_s$, gdzie $V_s \in \mathcal{T}_s$ i zbiór $\{s \in S : V_s \neq X_s\}$ jest skończony.

Rodzina $\mathcal{B}$ kostek bazowych (1) spełnia warunki (i), (ii) w 1.2.6, jest więc bazą topologii w $\prod_{s\in S} X_s$. Przestrzeń $(\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T})$ z topologią generowaną przez bazę $\mathcal{B}$ nazywamy iloczynem kartezjańskim przestrzeni $(X_s, \mathcal{T}_s)$.

Uwaga 7.3.1. Podobnie jak w 2.4.1 łatwo sprawdza się, że iloczyn kartezjański przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Przykład 7.3.2. Dla $I = [0, 1]$, oznaczmy symbolem $(\mathbb{R}^I, \mathcal{T})$ iloczyn kartezjański $(\prod_{s\in I} \mathbb{R}_s, \mathcal{T})$, gdzie $(\mathbb{R}_s, \mathcal{T}_s) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(d_e))$ jest prostą euklidesową.

Zbiór $C(I)$ funkcji ciągłych $f : I \to \mathbb{R}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^I$ i niech $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{C(I)}$ będzie topologią podprzestrzeni przestrzeni $(\mathbb{R}^I, \mathcal{T})$. Topologię $\mathcal{T}_p$ w $C(I)$ nazywa się topologią zbieżności punktowej.

Przestrzeń $(C(I), \mathcal{T}_p)$ jest niemetryzowalna. Załóżmy przeciwnie, że pewna metryka d na $C(I)$ generuje $\mathcal{T}_p$, niech $\mathbf{0} \in C(I)$ będzie funkcją zerową i niech B_n będzie kulą o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu $\frac{1}{n}$ w przestrzeni metrycznej $(C(I), d)$. Ponieważ $B_n \in \mathcal{T}_p$, istnieją kostki bazowe $W_n = \prod_{s\in S} V_s^n$, gdzie V_s^n są otwarte w $\mathbb{R}$ i zbiory $T_n = \{s \in I : V_s^n \neq \mathbb{R}\}$ są skończone, takie, że $\mathbf{0} \in W_n \cap C(I) \subset B_n$. Ustalmy $t \in I \setminus \bigcup_n T_n$ i niech $U = \prod_{s\in S} U_s$, gdzie $U_t = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i $U_s = \mathbb{R}$, dla $s \neq t$. Ponieważ $\mathbf{0} \in U$ i $U \in \mathcal{T}_p$, istnieje n takie, że $B_n \subset U$ i niech $f \in C(I)$ zeruje się na T_n i przyjmuje wartość 1 w punkcie t. Wówczas $f \in W_n \setminus U$, co przeczy temu, że $W_n \cap C(I) \subset U$.

Topologia $\mathcal{T}(d_{sup})$ generowana w $C(I)$ przez metrykę określoną w 1.7.4 jest silniejsza niż topologia zbieżności punktowej, $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}(d_{sup})$. Ponieważ przestrzeń $(C(I), \mathcal{T}(d_{sup}))$ jest ośrodkowa, zob. 1.7.4 (A), wynika stąd ośrodkowość przestrzeni $(C(I), \mathcal{T}_p)$.

Każda niepusta kostka bazowa (1) w $\mathbb{R}^I$ zawiera funkcję ciągłą z I w $\mathbb{R}$, zbiór $C(I)$ jest więc gęsty w $\mathbb{R}^I$. W szczególności, z ośrodkowości przestrzeni $(C(I), \mathcal{T}_p)$ wynika ośrodkowość iloczynu kartezjańskiego $(\mathbb{R}^I, \mathcal{T})$.

Udowodnimy teraz uogólnienie Twierdzenia 2.5.1 – twierdzenie Tichonowa. Dowód będzie przebiegał podobnie, ale ponieważ dopuszczamy dowolne zbiory wskaźników, odwołamy się do Lematu Kuratowskiego - Zorna, który orzeka, że jeśli w niepustym zbiorze częściowo uporządkowanym $\mathcal{P}$ każdy łańcuch (tzn. zbiór złożony z elementów parami porównywalnych) jest ograniczony z góry, to w $\mathcal{P}$ istnieje element maksymalny (w istocie, twierdzenie Tichonowa jest równoważne Aksjomatowi Wyboru, równoważnemu z kolei Lematowi Kuratowskiego - Zorna).

Zacznijmy od opisu zbioru częściowo uporządkowanego $\mathcal{Q}$, który wykorzystamy w dowodzie twierdzenia Tichonowa.

Uwaga 7.3.3. Dla iloczynu $\prod_{s\in S} X_s$, niech $\mathcal{Q}$ będzie zbiorem wszystkich obcięć funkcji $u \in \prod_{s\in S} X_s$ do niepustych podzbiorów $T \subset S$. Dziedzinę funkcji $a \in \mathcal{Q}$ będziemy oznaczać przez T_a, przy czym wygodnie będzie traktować funkcję a jako zbiór par $(s, a(s))$. Dla $a, b \in \mathcal{Q}$ mówimy, że $a \leqslant b$ jeśli a jest obcięciem b do T_a, czyli $a \subset b$. Relacja $\leqslant$ jest częściowym porządkiem w $\mathcal{Q}$.

Jeśli $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$ jest łańcuchem w $\mathcal{Q}$, to

(2) $c = \bigcup\{a : a \in \mathcal{C}\}$ należy do $\mathcal{Q}$ i ogranicza $\mathcal{C}$ z góry

oraz

(3) $T_c = \bigcup\{T_a : a \in \mathcal{C}\}$.

Zauważmy ponadto, że $\mathcal{Q} = \bigcup\{\prod_{s\in T} X_s : T \subset S, T \neq \emptyset\}$, a iloczyn $\prod_{s\in S} X_s$ jest zbiorem elementów maksymalnych w $\mathcal{Q}$.

Twierdzenie 7.3.4. *Dowolny iloczyn kartezjański $(\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T})$ przestrzeni zwartych $(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia z Uwagi 7.3.3 i połóżmy

(4) $X(T) = \prod_{s\in T} X_s$, $\quad W^* = W \times \prod_{s\in S\setminus T} X_s$, dla $W \subset X(T)$ i $T \subset S$,

(5) $\mathcal{B}(a)$ jest rodziną kostek bazowych w $X(T_a)$ zawierających a, dla $a \in \mathcal{Q}$,

zob. (1). Dążąc do sprzeczności, załóżmy, że istnieje otwarte pokrycie $\mathcal{U}$ iloczynu kartezjańskiego $X(S)$, z którego nie można wybrać pokrycia skończonego i niech $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ składa się z elementów $a \in \mathcal{Q}$ spełniających warunek

(6) jeśli $W \in \mathcal{B}(a)$, to zbioru W^* nie można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$.

Aby pokazać, że zbiór $\mathcal{P}$ jest niepusty, ustalmy $t \in S$. Zauważmy, że $X(\{t\})$ można identyfikować z X_t. Gdyby każdy punkt $x \in X_t$ miał otoczenie V_x takie, że $(V_x)^*$ ma pokrycie skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$, to ze zwartości X_t, iloczyn $X(S)$ miałby pokrycie skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$. Zatem $X(\{t\}) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$.

Pokażemy teraz, że

(7) dla $a \in \mathcal{P}$ i $t \in S \setminus T_a$, w $X(T_a \cup \{t\})$ istnieje $b \geqslant a$ należące do $\mathcal{P}$.

Dla $x \in X_t$, niech $b_x \in X(T_a \cup \{t\})$ będzie przedłużeniem a przyjmującym w t wartość x. Jeśli żadne b_x nie jest w $\mathcal{P}$, to dla każdego $x \in X_t$ istnieje otoczenie $V_x \subset X_t$ oraz kostka $W_x \in \mathcal{B}(a)$ takie, że zbiór $(W_x \times V_x)^*$ można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$, zob. (6). Ze zwartości X_t, $X_t = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}$, dla pewnych $x_i \in X_t$ i niech $W = W_{x_1} \cap \ldots \cap W_{x_m} \in \mathcal{B}(a)$. Ponieważ V_{x_i}, $i \leqslant m$, pokrywają X_t, każdy element z $W \times X_t$ należy do pewnego $W_{x_i} \times V_{x_i}$, więc $W^* \subset \bigcup_{i=1}^m (W_{x_i} \times V_{x_i})^*$, zob (4). Zatem W^* można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$, co przeczy temu, że $a \in \mathcal{P}$ i kończy dowód (7).

Niech $\mathcal{C}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{P}$ i niech c będzie funkcją opisaną w (2). Pokażemy, że $c \in \mathcal{P}$. Rozważmy kostkę $V = \prod_{s\in T_c} V_s \in \mathcal{B}(c)$. Zbiór $F = \{s \in T_c : V_s \neq X_s\}$ jest skończony, zob. (5) i każde $s \in F$ należy do dziedziny pewnej funkcji z $\mathcal{C}$, zob. (3). Ponieważ $\mathcal{C}$ jest łańcuchem, istnieje funkcja $a \in \mathcal{C}$, której dziedzina zawiera F. Dla $W = \prod_{s\in T_a} V_s \in \mathcal{B}(a)$, z $F \subset T_a$, mamy $V^* = W^*$. Z $a \in \mathcal{P}$ wynika więc, że zbioru V^* nie można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}$. Zatem $c \in \mathcal{P}$ jest ograniczeniem z góry łańcucha $\mathcal{C}$, zob. (2).

Z Lematu Kuratowskiego - Zorna, w $\mathcal{P}$ istnieje element maksymalny $u \in \mathcal{P}$, a z (7) wynika, że $u \in X(S)$. W pokryciu $\mathcal{U}$ można więc znaleźć U zawierające u. Dla kostki $W \in \mathcal{B}(u)$ zawartej w U, $W^* = W$ jest pokryty jednym elementem $\mathcal{U}$, co daje sprzeczność z (6) i kończy dowód twierdzenia Tichonowa.

7.4. **Przestrzeń ultrafiltrów.** Ustalmy przestrzeń dyskretną D. Filtrem w D nazywamy niepustą rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów D taką, że

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ i jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$,

(2) jeśli $A \subset B \subset D,\ A \in \mathcal{F}$, to $B \in \mathcal{F}$.

Filtr w D, który jest maksymalny ze względu na inkluzję w rodzinie wszystkich filtrów w D nazywamy ultrafiltrem w D.

Uwaga 7.4.1. (A) Z lematu Kuratowskiego - Zorna wynika, że każdy filtr w D rozszerza się do ultrafiltru w D.

(B) Filtr $\mathcal{F}$ w D jest ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \subset D$, albo A albo $D \setminus A$ należy do $\mathcal{F}$.

(C) Każdy punkt $d \in D$ wyznacza ultrafiltr $\mathfrak{Z}_d = \{A \in D : d \in A\}$.

Przyjmijmy oznaczenia

(3) $\beta D = \{\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}$ jest ultrafiltrem w $D\}$,

(4) $O(A) = \{\mathfrak{Z} \in \beta D : A \in \mathfrak{Z}\}\ ,\ \ A \subset D.$

Zauważmy, że dla $A, B \subset D$

(5) $O(A \cap B) = O(A) \cap O(B)\ ,\ \ O(A \cup B) = O(A) \cup O(B).$

Pierwsza równość w (5) wynika natychmiast z (1) i (2), a druga jest konsekwencją pierwszej i faktu, że $O(D \setminus C) = \beta D \setminus O(C)$ dla $C \subset D$, zob. Uwaga 7.4.1 (B).

Z (5) wynika, że

(6) $\mathcal{B} = \{O(A) : A \subset D\}$

jest bazą pewnej topologii $\mathcal{T}_\beta$ w βD. Sprawdzimy, że

(7) $(\beta D, \mathcal{T}_\beta)$ jest przestrzenią zwartą.

Jeśli $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ są różnymi punktami βD i $A \in \mathfrak{Z}_1 \setminus \mathfrak{Z}_2$, to $O(A)$ i $O(D \setminus A)$ są rozłącznymi otoczeniami $\mathfrak{Z}_1$ i $\mathfrak{Z}_2$ w $(\beta D, \mathcal{T}_\beta)$, zob. (5).

Niech $\mathcal{U} = \{O(A) : A \in \mathcal{A}\}$ będzie pokryciem βD zbiorami z bazy $\mathcal{B}$ topologii $\mathcal{T}_\beta$, zob. (6). Rodzina $\mathcal{C} = \{C \subset D : D \setminus C \subset \bigcup \mathcal{E}$ dla skończonego $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$ zawiera dopełnienia wszystkich $A \in \mathcal{A}$, więc nie rozszerza się do ultrafiltru w D, bo każdy ultrafiltr $\mathfrak{Z} \in \beta D$ zawiera $A \in \mathcal{A}$ takie, że $\mathfrak{Z} \in O(A)$, zob. (4). Z Uwagi 7.4.1 (A) wynika, że $\mathcal{C}$ nie jest filtrem, co oznacza, że $\emptyset \in \mathcal{C}$, zob. (1) i (2). Zatem dla pewnej skończonej rodziny $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, $\bigcup \mathcal{E} = D$ i z (5), $\{O(A) : A \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{U}$ jest skończonym pokryciem βD, co kończy dowód (7).

Utożsamiając $d \in D$ z ultrafiltrem $\mathfrak{Z}_d$ określonym w Uwadze 7.4.1 (C) (który jest punktem izolowanym w βD, bo $O(\{d\}) = \{\mathfrak{Z}_d\}$) będziemy traktowali D jako podprzestrzeń przestrzeni zwartej βD.

Definicja 7.4.2. *Przestrzeń zwartą $(\beta D, \mathcal{T}_\beta)$ będziemy nazywali uzwarceniem Čecha - Stone'a przestrzeni dyskretnej D.*

Podstawowa własność βD jest opisana w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 7.4.3. *Każde przekształcenie $f : D \to X$ przestrzeni dyskretnej D w przestrzeń zwartą X ma ciągłe przedłużenie $f^\beta : \beta D \to X$.*

Dowód. Niech $\mathfrak{Z} \in \beta D$. Istnieje wówczas $x \in X$ takie, że dla każdego otoczenia V punktu x, $f^{-1}(V) \in \mathfrak{Z}$.

W przeciwnym razie zbiory otwarte V takie, że $f^{-1}(V) \notin \mathfrak{Z}$ pokrywałyby X i ze zwartości X otrzymalibyśmy skończone pokrycie $V_1 \cup \ldots \cup V_n = X$, $f^{-1}(V_m) \notin \mathfrak{Z}$, $m \leqslant n$. Z (5) mielibyśmy $\bigcup_{m \leqslant n} O(f^{-1}(V_m)) = \beta D$, a z (4), $\mathfrak{Z} \notin \bigcup_{m \leqslant n} O(f^{-1}(V_m))$.

Możemy zatem określić $f^\beta : \beta D \to X$ w taki sposób, że

(8) $\qquad f^{-1}(V) \in \mathfrak{Z}$ dla każdego otoczenia V punktu $f^\beta(\mathfrak{Z})$.

Z własności Hausdorffa X, punkt $f^\beta(\mathfrak{Z})$ jest wyznaczony jednoznacznie. Ponadto, $f^\beta(\mathfrak{Z}_d) = f(d)$ dla $d \in D$.

Dla dowodu ciągłości f^β pokażemy, że przeciwobraz zbioru K domkniętego w X jest domknięty w βD. Jeśli $\mathfrak{Z} \notin (f^\beta)^{-1}(K)$, to istnieją rozłączne zbiory V, W otwarte w X takie, że $f^\beta(\mathfrak{Z}) \in V$ i $K \subset W$ (zob. dowód 2.1.13). Z (8) i (4), $\mathfrak{Z} \in O(f^{-1}(V))$ i analogicznie, $(f^\beta)^{-1}(K) \subset O(f^{-1}(W))$. Zbiór $O(f^{-1}(V))$ jest więc otoczeniem $\mathfrak{Z}$ rozłącznym z $(f^\beta)^{-1}(K)$, co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 7.4.4. Z podanej wyżej konstrukcji uzwarcenia Čecha - Stone'a dla przestrzeni dyskretnych można wyprowadzić twierdzenie Tichonowa 7.3.4.

Istotnie, niech $\Pi_{s \in S} X_s$ będzie iloczynem kartezjanskim przestrzeni zwartych i niech $p_s : \Pi_{s \in S} X_s \to X_s$ będą rzutowaniami.

Ponieważ iloczyn kartezjański przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa zob. 7.3.1, wystarczy sprawdzić, że $\Pi_{s \in S} X_s$ jest ciągłym obrazem przestrzeni zwartej.

Niech D będzie przestrzenią dyskretną o mocy równej mocy $\Pi_{s \in S} X_s$ i niech f będzie dowolnym przekształceniem D na $\Pi_{s \in S} X_s$.

Każde złożenie $p_s \circ f : D \to X_s$ przedłuża się, zgodnie z Twierdzeniem 7.4.3, do przekształcenia ciągłego $(p_s \circ f)^\beta : \beta D \to X_s$. Przekształcenie przekątniowe $F : \beta D \to \Pi_{s \in S} X_s$ określone formułą $F(\mathfrak{Z})(s) = (p_s \circ f)^\beta(\mathfrak{Z})$ jest ciągłe (bo $p_s \circ F = (p_s \circ f)^\beta$, zob. 1.4.5 (B)) i $F(D) = f(D) = \Pi_{s \in S} X_s$.

Uwaga 7.4.5. Korzystając z twierdzenia Tichonowa 7.3.4 można podać konstrukcję uzwarcenia Čecha - Stone'a βX dla wszystkich przestrzeni X, które można zanurzyć w iloczyn kartezjański odcinków (są to dokładnie przestrzenie spełniające warunek (ii) w 7.8.15, zob. Zadanie 7.25 (A)).

7.5. **Twierdzenie Jordana o rozcinaniu płaszczyzny.** Łukiem nazywamy przestrzeń homeomorficzną z odcinkiem $[0, 1]$, a krzywą Jordana, przestrzeń homeomorficzną z okręgiem S^1. Brzegiem zbioru A w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy zbiór $\mathrm{bd}A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}A$.

Twierdzenie 7.5.1 (Jordana o rozcinaniu). *Dla każdej krzywej Jordana C na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$, dopełnienie $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ma dokładnie dwie składowe – ograniczoną i nieograniczoną, przy czym C jest wspólnym brzegiem obu tych składowych.*

Dowód, który podamy, pochodzi z artykułu Ryuji Maehara, *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Math. Monthly 91(1984), 641–643 (jest to pewna wersja dowodu z książki E. Moisa, *Geometric topology in dimensions* 2 *and* 3, Springer 1977). Inny dowód można znaleźć w Zadaniu 7.33.

Mówimy, że zbiór zwarty $L \subset \mathbb{R}^2$ rozcina płaszczyznę, jeśli jego dopełnienie $\mathbb{R}^2 \setminus L$ nie jest spójne.

Zauważmy, że jeśli zbiór zwarty $L \subset \mathbb{R}^2$ rozcina płaszczyznę, to tylko jedna składowa $\mathbb{R}^2 \setminus L$ jest nieograniczona.

Istotnie, jeśli $L \subset [-n,n] \times [-n,n]$, to składowa nieograniczona dopełnienia $\mathbb{R}^2 \setminus L$ przecina zbiór spójny $\mathbb{R}^2 \setminus [-n,n] \times [-n,n]$ rozłączny z L, a więc musi zawierać ten zbiór.

Lemat 7.5.2. *Łuk $L \subset \mathbb{R}^2$ nie rozcina płaszczyzny.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie i niech U będzie składową ograniczoną dopełnienia $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Można przy tym założyć, rozpatrując odpowiednie przekształcenia $x \to r(x-a)$ płaszczyzny, że $(0,0) \in U$ i $U \cup L$ leży we wnętrzu koła $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leqslant 1\}$, gdzie $||x|| = d_e(x, \mathbf{0})$.

Z twierdzenia Tietzego, 1.6.5, identyczność id : $L \to L$ można przedłużyć do przekształcenia ciągłego $u : L \cup U \to L$. Niech $f : D^2 \to S^1$ będzie określone formułą

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{u(x)}{||u(x)||}, & \text{jeśli } x \in U \cup L, \\ \\ -\frac{x}{||x||}, & \text{jeśli } x \in D^2 \setminus U. \end{cases}$$

Dla $x \in (U \cup L) \cap (D^2 \setminus U) = L$ obie części formuły pokrywają się, więc przekształcenie f jest ciągłe, zob. 1.3.9 (B), ale nie ma punktów stałych, co przeczy Twierdzeniu Brouwera, 6.2.8.

Niech $J = [-1,1]$.

Lemat 7.5.3. *(A) Jeśli $f : J^2 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem ciągłym, które przeprowadza każde dwa przeciwległe boki kwadratu J^2 w dwie różne półpłaszczyzny domknięte ograniczone osią współrzędnych równoległą do tych boków, to $f(J^2)$ zawiera $(0,0)$.*

(B) Jeśli drogi $u, v : J \to J^2$ łączą dwie pary przeciwległych boków kwadratu J^2 (to znaczy, że $u(i) \in \{i\} \times J$, $v(i) \in J \times \{i\}$ dla $i \in \{-1,1\}$), to $u(J) \cap v(J) \neq \emptyset$.

Dowód. (A) Niech $f = (f_1, f_2)$. Zamieniając, jeśli trzeba, f_i na $-f_i$, można przyjąć, że f przeprowadza każdy bok kwadratu J^2 w półpłaszczyznę domkniętą zawierającą przeciwległy bok.

Dążąc do sprzeczności załóżmy, że $(0,0) \notin f(J^2)$. Dla $x \in J^2$ punkt $g(x) = \frac{1}{\max\{|f_1(x)|,|f_2(x)|\}} f(x)$ leży w przecięciu brzegu kwadratu bdJ^2 z półprostą wychodzącą z $(0,0)$ i zawierającą $f(x)$. Z własności f wynika, że $g(x) \neq x$ dla $x \in J^2$, co przeczy Twierdzeniu Brouwera, 6.2.8 (bo J^2 jest homeomorficzne z D^2).

(B) Przekształcenie $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ określone formułą $f(s,t) = u(s) - v(t)$ spełnia założenia części (A), więc $f(s,t) = (0,0)$ dla pewnego $(s,t) \in J^2$, czyli $u(s) = v(t)$.

Dowód Twierdzenia Jordana. (A) Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie krzywą Jordana. Zwartość $C \times C$ i ciągłość metryki, zob. 1.4.4, zapewniają istnienie punktów $a, b \in C$ takich że $d_e(a,b) = \sup\{d_e(x,y) : x, y \in C\}$.

Wykorzystując odpowiednie złożenie izometrii płaszczyzny i przekształcenia $(s,t) \to (r_1 s, r_2 t)$, gdzie $r_1, r_2 > 0$, można przyjąć, że $a = (-1,0)$, $b = (1,0)$, $C \subset J^2$ oraz a, b są jedynymi punktami C leżącymi na brzegu kwadratu bdJ^2.

Niech $p = (0,1)$, $q = (0,-1)$. Na mocy Lematu 7.5.3 (B), odcinek $\overline{pq} = \{0\} \times J$ łączący p z q przecina C i niech $p_1 = (0, s_1)$ będzie najwyższym punktem tego przecięcia, tzn. $s_1 = \max\{s \in J : (0,s) \in \overline{pq} \cap C\}$.

Punkty a i b dzielą krzywą Jordana C na dwa łuki J_p i J_q, przy czym przyjmujemy, że $p_1 \in J_p$. Niech $p_2 = (0, s_2)$ będzie najniższym punktem odcinka $\overline{pq}$ leżącym na łuku J_p, tzn. $s_2 = \min\{s \leqslant s_1 : (0,s) \in J_p\}$ (może być $p_1 = p_2$).

Zauważmy, że odcinek $\overline{p_2 q}$ przecina łuk J_q.

W przeciwnym razie, oznaczając przez $\widehat{p_1 p_2}$ część łuku J_p łączącą p_1 z p_2, otrzymalibyśmy łuk $\overline{pp_1} \cup \widehat{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 q}$, który łączy p z q, wymijając łuk J_q łączący a z b, sprzecznie z Lematem 7.5.3 (B).

Niech $q_1 = (0, t_1)$ będzie najniższym, a $q_2 = (0, t_2)$ najwyższym, punktem odcinka $\overline{qp_2}$ leżącym na łuku J_q, tzn. $t_1 = \min\{t \leqslant s_2 : (0,t) \in J_q\}$ oraz $t_2 = \max\{t \leqslant s_2 : (0,t) \in J_q\}$ (może być $q_1 = q_2$).

Zauważmy, że $q_2 \neq p_2$ i ponieważ tylko końce odcinka $\overline{q_2 p_2}$ leżą w C, więc $c = \frac{q_2 + p_2}{2} \notin C$.

(B) Pokażemy, że składowa U dopełnienia $\mathbb{R}^2 \setminus C$ zawierająca punkt c jest ograniczona.

W przeciwnym razie istniałaby droga $f : [0,1] \to U$ łącząca w U punkt c z pewnym punktem $z \in U \cap \mathrm{bd}J^2$, przy czym można przyjąć, że $f(t) \notin \mathrm{bd}J^2$, dla $t < 1$, a więc f jest drogą w $U \cap J^2$.

Jeśli druga współrzędna punktu z jest ujemna, to punkt z można połączyć z q łukiem L w $\mathrm{bd}J^2$ wymijającym a i b. Wówczas droga biegnąca najpierw łukiem $\overline{pp_1} \cup \widehat{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 c}$, potem drogą f, a następnie łukiem L, łączy w J^2 punkty q i p, wymijając łuk J_q, co przeczy Lematowi 7.5.3 (B).

Podobnie, jeśli druga współrzędna punktu z jest dodatnia, niech M będzie łukiem w $\mathrm{bd}J^2$ łączącym z i p oraz wymijającym a i b. Wówczas droga biegnąca najpierw odcinkiem $\overline{qc}$, potem drogą f, a następnie łukiem M, łączyłaby w J^2 punkty q i p, wymijając łuk J_p, sprzecznie z Lematem 7.5.3 (B).

Tak więc, U jest ograniczone, a ponieważ $\mathrm{bd}U \subset C$ i zgodnie z Lematem 7.5.2, żaden właściwy podzbiór zwarty C nie rozcina $\mathbb{R}^2$, mamy także $\mathrm{bd}U = C$.

(C) Ponieważ zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus J^2$ jest spójny, składowa nieograniczona V dopełnienia $\mathbb{R}^2 \setminus C$ zawiera $\mathbb{R}^2 \setminus J^2$. Pokażemy, że V i składowa ograniczona U określona w (B) są jedynymi składowymi $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Załóżmy przeciwnie, że W jest składową $\mathbb{R}^2 \setminus C$ różną od U i V. Wówczas $W \subset J^2$ jest składową ograniczoną $\mathbb{R}^2 \setminus C$ i podobnie jak dla U, $\mathrm{bd}W = C$.

Zauważmy, że $\mathrm{bd}J^2 \setminus \{a,b\} \subset V$, stąd także $(\overline{pp_1} \cup \overline{qq_1}) \setminus \{p_1, q_1\} \subset V$, zatem $W \cap (\mathrm{bd}J^2 \cup C \cup \overline{pp_1} \cup \overline{qq_1}) = \emptyset$. Ponadto, ponieważ $\overline{p_2 q_2} \subset U \cup C$, $W \cap \overline{p_2 q_2} = \emptyset$.

Zatem, oznaczając przez $\widehat{q_2 q_1}$ część łuku J_q łączącą q_2 z q_1, otrzymujemy łuk $T = \overline{pp_1} \cup \widehat{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 q_2} \cup \widehat{q_2 q_1} \cup \overline{q_1 q}$, który łączy p z q, wymijając $W \cup \{a,b\}$.

Niech B_a, B_b będą kołami o środkach w a i b, odpowiednio, rozłącznymi z łukiem T. Ponieważ $a, b \in \mathrm{bd}W$, W przecina B_a i B_b, a więc można znaleźć drogę w $W \cup (J^2 \cap (B_a \cup B_b))$, która łączy punkty a i b, wymijając łuk T, sprzecznie z Lematem 7.5.3 (B).

(D) Pozostaje do wykazania, że także dla składowej nieograniczonej V dopełnienia $\mathbb{R}^2 \setminus C$, $\mathrm{bd}V = C$. To jednak łatwo można sprowadzić do przypadku składowej ograniczonej dopełnienia C, rozpatrując inwersję $z \to \frac{1}{z}$ płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ z usuniętym zerem.

7.6. **Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.** Przyjmijmy oznaczenia: $||x-y|| = d_e(x,y)$, dla $x, y \in \mathbb{R}^n$, $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad ||x|| \leqslant 1\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; ||x|| = 1\}$.

Twierdzenie 7.6.1. *Nie istnieje retrakcja kuli D^n na sferę S^{n-1}, tzn. nie istnieje przekształcenie ciągłe $r : D^n \to S^{n-1}$ takie, że $r(x) = x$, dla $x \in S^{n-1}$.*

Udowodnimy najpierw pewną wersję tego twierdzenia dla przekształceń klasy C^∞, tzn. dla funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych (odwołując się do materiału wchodzącego w zakres pierwszego semestru Analizy II), a następnie pokażemy, jak wyprowadzić stąd Twierdzenie 7.6.1.

Zacznijmy od pewnej tożsamości, związanej z różniczkowaniem wyznaczników.

Uwaga 7.6.2. Niech $H : U \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem klasy C^∞ na zbiorze U otwartym w $\mathbb{R}^{n+1}$ i niech, dla $u = (u_1, \ldots, u_{n+1}) \in U$,

$$(1) \qquad J_i(u) = \det[\tfrac{\partial H}{\partial u_1}(u), \ldots, \widehat{\tfrac{\partial H}{\partial u_i}(u)}, \ldots, \tfrac{\partial H}{\partial u_{n+1}}(u)],$$

gdzie daszek oznacza, że i-ta kolumna $\frac{\partial H}{\partial u_i}(u)$ macierzy po prawej stronie (1) została pominięta. Wówczas

$$(2) \qquad \textstyle\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \, \frac{\partial J_i}{\partial u_i}(u) = 0, \quad u \in U,$$

co wynika z reguły różniczkowania wyznacznika (zob. M.Spivak, Analiza na rozmaitościach, 2.15), oraz z równości pochodnych mieszanych $\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_j \partial u_i}$, zapewnionej przez założenie, że H jest klasy C^∞ (dla $n = 1$, formuła (2) stwierdza równość pochodnych mieszanych).

Lemat 7.6.3. *Nie istnieje przekształcenie $f : G \to \mathbb{R}^n$ klasy C^∞ określone na zbiorze otwartym G w $\mathbb{R}^n$ zawierającym D^n takie, że $f(G) \subset S^{n-1}$, oraz $f(x) = x$, dla $x \in S^{n-1}$.*

Dowód. Dążąc do sprzeczności, załóżmy, że $f : G \to \mathbb{R}^n$ jest takim przekształceniem, niech

$$(3) \quad H(x,t) = (1-t)x + tf(x), \quad h_t(x) = H(x,t), \quad \text{dla } (x,t) \in G \times \mathbb{R},$$

i niech

$$(4) \quad J(x,t) = \det[dh_t(x)], \quad V(t) = \textstyle\int_{D^n} J(x,t)dx,$$

gdzie dh_t jest pochodną przekształcenia $h_t : G \to \mathbb{R}^n$. Z (3), $h_0(x) = x$, zatem $J(x, 0) = 1$ i $V(0)$ jest objętością kuli D^n, zob. (4). Także z (3), $h_1(x) = f(x)$ i ponieważ $f(G) \subset S^{n-1}$, $df(x)$ nie jest izomorfizmem, a więc $J(x,1) = 0$ i $V(1) = 0$, zob. (4).

Aby dojść do sprzeczności, wystarczy wykazać, że funkcja $V(t)$ jest stała, tzn.

$$(5) \quad V'(t) = 0, \quad \text{dla } \; t \in \mathbb{R}.$$

Różniczkując całkę z parametrem, mamy $V'(t) = \frac{d}{dt}\int_{D^n} J(x,t)dx = \int_{D^n} \frac{\partial J}{\partial t}(x,t)dx$. Przyjmijmy oznaczenia z Uwagi 7.6.2, gdzie $U = G \times \mathbb{R}$ i $u = (x_1, \ldots, x_n, t) \in U$. Z (1), (4) i (3), $J(x,t) = J_{n+1}(x,t)$, zatem z (2), $V'(t)$ jest sumą całek $\mp \int_{D^n} \frac{\partial J_i}{\partial x_i}(x,t)dx$, $i \leqslant n$. Ustalmy $i \leqslant n$ i niech D^n_i będzie przekrojem D^n hiperpłaszczyzną $x_i = 0$, oraz dla $z \in D^n_i$, niech z^- , z^+ będą punktami na sferze S^{n-1} wyznaczającymi prostą prostopadłą do D^n_i, przechodzącą przez z, przy czym i-ta współrzędna z^- jest ujemna, a z^+ - dodatnia. Wówczas,

$$\int_{D^n} \frac{\partial J_i}{\partial x_i}(x,t)dx = \int_{D^n_i} \left[\int_{[z^-,z^+]} \frac{\partial J_i}{\partial x_i}(x,t)dx_i \right] dz = \int_{D^n_i} [J_i(z^+,t) - J_i(z^-,t)]dz.$$

Jeśli $x \in S^{n-1}$, to $f(x) = x$ i z (3), $H(x,t) = x$, a więc $\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = 0$. To oznacza, że dla $x \in S^{n-1}$, $i \leqslant n$, ostatnia kolumna macierzy w (1) jest zerowa i $J_i(x,t) = 0$. W szczególności, $J_i(z^+,t) = 0 = J_i(z^-,t)$, mamy więc (5), co kończy dowód lematu.

Pomostem między Lematem 7.6.3 i Twierdzeniem 7.6.1 są gładkie rozkłady jedynki, które opiszemy w następnym lemacie, zob. 1.6.2.

Dla funkcji $\lambda : G \to [0,1]$ symbolem cozλ oznaczać będziemy dopełnienie zbioru, na którym λ przyjmuje wartość zero: $\mathrm{coz}\lambda = \{x \in G : \lambda(x) \neq 0\}$.

Lemat 7.6.4. *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym i $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas zbiór otwarty $G \subset \mathbb{R}^n$ zawierający K, oraz funkcje $\lambda_i : G \to [0,1]$ klasy C^∞ takie, że*

(6) $\mathrm{diam}(\mathrm{coz}\lambda_i) < \varepsilon$, $\mathrm{coz}\lambda_i \cap K \neq \emptyset$, *dla* $i \leqslant m$,

(7) $\lambda_1(x) + \ldots + \lambda_m(x) = 1$, *dla* $x \in G$.

Dowód. Funkcja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona formułami

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t^2}), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

jest klasy C^∞. Dla kostki otwartej $W = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, funkcja

$$\varphi_W(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (\varphi(x_i - a_i) \cdot \varphi(b_i - x_i))$$

jest klasy C^∞ i $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_W(x) > 0\}$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$, pokryjmy K kostkami otwartymi $W_1, \ldots, W_m$ o średnicach $< \varepsilon$, przecinającymi K i przyjmijmy $\varphi_i = \varphi_{W_i}$, $\sigma = \varphi_1 + \ldots + \varphi_m$, oraz $G = W_1 \cup \ldots \cup W_m = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) > 0\}$.Wówczas funkcje $\lambda_i = \frac{\varphi_i}{\sigma}$, $i \leqslant m$, mają żądane własności.

Dowód twierdzenia 7.6.1. Załóżmy, że istnieje retrakcja $r : D^n \to S^{n-1}$. Rozszerzymy r w sposób ciągły na $\mathbb{R}^n$, przyjmując $r(x) = \frac{x}{||x||} \in S^{n-1}$, dla $x \notin D^n$.

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że r przekształca każdą kulę $B(x,\delta)$ o środku w $x \in D^n$ na zbiór o średnicy $< \frac{1}{2}$, zob. 2.1.6. Przyjmijmy $\varepsilon = \min(\delta, \frac{1}{2})$ i niech $\lambda_i : G \to \mathbb{R}$ będą funkcjami opisanymi w Lemacie 7.6.4 (dla $K = D^n$), ponumerowanymi tak, że przecięcie zbioru $\mathrm{coz}\lambda_i = \{x : \lambda_i(x) > 0\}$ ze sferą S^{n-1} jest niepuste dla $i \leqslant p$ i puste dla $i = p+1, \ldots, m$. Wybierzmy $a_i \in \mathrm{coz}\lambda_i$, przy czym $a_i \in S^{n-1}$ dla $i \leqslant p$, i niech

(8) $g(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x)x + \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i(x) r(a_i)$, dla $x \in G$.

Ponieważ dla $i \leqslant p$, $r(a_i) = a_i$, z (7) i (8) mamy $g(x) - r(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x)(x - a_i) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(r(a_i) - r(x))$. Jeśli $\lambda_i(x) > 0$, to $x, a_i \in \mathrm{coz}\lambda_i$, a więc z (6), $||x - a_i|| < \frac{1}{2}$ i $||r(a_i) - r(x)|| < \frac{1}{2}$. Wynika stąd, że $||g(x) - r(x)|| < 1$, a zatem $g(x) \neq 0$, dla $x \in G$. Możemy więc określić funkcję $f : G \to \mathbb{R}^n$ klasy C^∞ formułą

(9) $f(x) = \frac{g(x)}{||g(x)||}$, $x \in G$.

Zauważmy, że $f(G) \subset S^{n-1}$. Jeśli $x \in S^{n-1}$, to $\lambda_i(x) = 0$ dla $i \geqslant p+1$, zatem z (8) i (7), $g(x) = x$ i z (9), $f(x) = x$. Otrzymaliśmy sprzeczność z Lematem 7.6.3.

Wniosek 7.6.5 (Twierdzenie Brouwera)**.** *Dla każdego przekształcenia ciągłego $f : D^n \to D^n$ istnieje $x \in D^n$ takie, że $f(x) = x$.*

Dowód. Jeśli dla pewnego przekształcenia ciągłego $f : D^n \to D^n$ mielibyśmy $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in D^n$, to argument opisany w dowodzie Wniosku 6.2.8 prowadziłby do retrakcji $r : D^n \to S^{n-1}$, co przeczyłoby Twierdzeniu 7.6.1.

Wniosek 7.6.6. *Sfera S^n jest nieściągalna.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje homotopia $H : S^n \times I \to S^n$ łącząca id_{S^n} z przekształceniem stałym ε_a. Wówczas przekształcenie ciągłe $r : D^{n+1} \to S^n$ określone formułą $r(x) = H(\frac{x}{||x||}, 1 - ||x||)$, dla $x \neq 0$, oraz $r(0) = a$, jest retrakcją, co przeczy Twierdzeniu 7.6.1.

Uwaga 7.6.7. Dowód kluczowego Lematu 7.6.3 jest wzięty z książki N.Dunforda i J.T.Schwartza, *Linear Operators*, New York 1958. Interesującą dyskusję tego dowodu można znaleźć w artykule N.V.Ivanova, *A topologist's view of the Dunford - Schwartz proof of the Brouwer Fixed-Point Theorem*, Mathematical Intelligencer 22 (3) (2000), 55 – 57. Inne dowody twierdzenia Brouwera, kombinatoryczny i analityczny, oraz liczne odsyłacze do literatury, można znaleźć w książce K.Goebela, *Twierdzenia o punktach stałych*, Lublin 2005.

7.7. **Przedłużanie przekształceń ciągłych w sfery.** Twierdzenie 7.6.1 pokazuje, że identyczności $id : S^n \to S^n$ nie można przedłużyć do przekształcenia ciągłego kuli D^{n+1} o wartościach w S^n. Wykażemy, że każde przekształcenie ciągłe z domkniętego podzbioru kuli D^n w S^n ma ciągłe przedłużenie na D^n i wyprowadzimy stąd twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru w $\mathbb{R}^n$ oraz twierdzenie Borsuka o rozcinaniu $\mathbb{R}^n$.

Zaczniemy od bardzo użytecznego twierdzenia Borsuka o przedłużaniu homotopii.

Lemat 7.7.1 (Twierdzenie Borsuka o kapeluszu)**.** *Niech A będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej X i niech $f : A \to S^n$ będzie przekształceniem ciągłym. Jeśli istnieje homotopia $H : A \times I \to S^n$ łącząca f z przekształceniem $g : A \to S^n$, które ma ciągłe przedłużenie $\overline{g} : X \to S^n$, to f też ma ciągłe przedłużenie $\overline{f} : X \to S^n$, przy czym H przedłuża się do homotopii $\overline{H} : X \times I \to S^n$ łączącej $\overline{f}$ z $\overline{g}$.*

Dowód. Przyjmijmy, że $H(x, 0) = g(x)$, $H(x, 1) = f(x)$ i określmy przekształcenie $F : X \times \{0\} \cup A \times I \to S^n$ wzorem

$$(1) \qquad F(x,t) = \begin{cases} \overline{g}(x), & \text{jeśli } t = 0, \\ H(x,t), & \text{jeśli } x \in A. \end{cases}$$

Przekształcenie F jest ciągłe, zob. 1.3.9 (B) i przyjmuje wartości w kuli D^{n+1}, która jest homeomorficzna z kostką $[-1, 1]^{n+1}$. Niech $\overline{F} : X \times I \to D^{n+1}$ będzie ciągłym przedłużeniem F (zob. 1.6.5) i niech

$$(2) \qquad B = \Big\{x \in X : \overline{F}(x, s) = \mathbf{0} \text{ dla pewnego } s \in I\Big\}.$$

Zbiór B jest domknięty w X jako rzut zbioru domkniętego $\overline{F}^{\,-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset X \times I$ równoległy do osi zwartej I (zob. Zadanie 2.14). Niech $u : X \to I$ będzie funkcją ciągłą taką, że

$$(3) \qquad u|B \equiv 0, \quad u|A \equiv 1.$$

Zauważmy, że zawsze

(4) $\qquad \overline{F}(x, tu(x)) \neq \mathbf{0}$,

bo dla $x \notin B$, (4) wynika z (2), a dla $x \in B$, $\overline{F}(x, tu(x)) = \overline{F}(x, 0)) = \overline{g}(x) \in S^n$, zob. (3) i (1).

Szukaną homotopię można więc określić formułą, zob. (4), (1) i (3)

$$\overline{H}(x, t) = \frac{\overline{F}(x,tu(x))}{||\overline{F}(x,tu(x))||}.$$

Kolejny lemat opisuje podstawową własność topologiczną związaną z wymiarem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że dla funkcji $\lambda : X \to I$, $\mathrm{coz}\lambda = \{x \in X : \lambda(x) \neq 0\}$.

Lemat 7.7.2. *Dla każdego $\delta > 0$ istnieje rozkład jedynki $\lambda_1, \ldots, \lambda_m : D^n \to I$ na kuli D^n taki, że $\mathrm{diam}(\mathrm{coz}\lambda_j) < \delta$ i każdy punkt D^n należy do nie więcej niż $n+1$ zbiorów $\mathrm{coz}\lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$.*

Dowód. Powiemy, że zbiór ograniczony A w $\mathbb{R}^n$ ma własność $\mathcal{D}_k$, jeśli dla każdego $\delta > 0$ istnieje otwarte w $\mathbb{R}^n$ pokrycie A zbiorami o średnicach mniejszych niż δ takimi, że każdy punkt $\mathbb{R}^n$ należy do nie więcej niż $k+1$ elementów tego pokrycia.

Przez indukcję udowodnimy, że każdy zbiór ograniczony leżący w skończonej sumie k-wymiarowych podprzestrzeni afinicznych $\mathbb{R}^n$ ma własność $\mathcal{D}_k$. Dla $k = n$ oznacza to w szczególności, że kula D^n ma własność $\mathcal{D}_n$ i teza wynika z twierdzenia o rozkładach jedynki, zob. 1.6.2.

Oczywiście, zbiory skończone w $\mathbb{R}^n$ mają własność $\mathcal{D}_0$. Ustalmy $\delta > 0$ i załóżmy, że A jest zbiorem ograniczonym leżącym w sumie skończonej rodziny $\mathcal{P}$ k-wymiarowych podprzestrzeni afinicznych $\mathbb{R}^n$. Niech $\mathcal{H}$ będzie skończoną rodziną hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^n$ o równaniach postaci $x_i = c$ wyznaczającą parami rozłączne otwarte w $\mathbb{R}^n$ skończone pokrycie $\mathcal{W}_0$ zbioru $A \setminus \bigcup \mathcal{H}$ kostkami o średnicach mniejszych niż δ. Pozostała część $A \cap \bigcup \mathcal{H}$ leży w sumie przecięć $P \cap H$, gdzie $P \in \mathcal{P}$ i $H \in \mathcal{H}$. Przesuwając w razie potrzeby hiperpłaszczyzny z $\mathcal{H}$ możemy dodatkowo założyć, że żadne $H \in \mathcal{H}$ nie zawiera żadnej z podprzestrzeni $P \in \mathcal{P}$, więc niepuste przecięcia $P \cap H$ są podprzestrzeniami afinicznymi $\mathbb{R}^n$ wymiaru mniejszego niż k. Korzystając z własności $\mathcal{D}_{k-1}$ zbioru $A \cap \bigcup \mathcal{H}$ otrzymujemy otwarte pokrycie $\mathcal{W}_1$ tego zbioru takie, że $\mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1$ jest szukanym pokryciem A.

Twierdzenie 7.7.3. *Niech $f : A \to S^n$ będzie przekształceniem ciągłym określonym na domkniętym podzbiorze kuli D^n. Istnieje wówczas przekształcenie ciągłe $\overline{f} : D^n \to S^n$ takie, że $\overline{f}|A = f$.*

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem kuli D^n takim, że $\mathrm{diam} f(U \cap A) < \frac{1}{4}$ dla $U \in \mathcal{U}$.

Niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a dla $\mathcal{U}$ i niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_m : D^n \to I$ będzie rozkładem jedynki na D^n opisanym w 7.7.2.

Określmy $g : D^n \to D^{n+1}$ wzorem

(5) $\qquad g(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) b_j$,

gdzie punkty $b_j \in S^n$ wybrane są następujaco: $b_j = f(a_j)$ dla pewnego $a_j \in \mathrm{coz}\lambda_j \cap A$ jeśli to przecięcie jest niepuste oraz $b_j = (0, \ldots, 0, 1)$ w przeciwnym wypadku.

Dla $x \in A$, $g(x) = \sum \{\lambda_j(x) f(a_j) : x \in \mathrm{coz}\lambda_j\}$, więc $g(x)$ jest wypukłą kombinacją punktów $f(a_j)$ takich, że $||f(x) - f(a_j)|| < \frac{1}{4}$ i mamy

(6) $\qquad g(x) \in B(f(x), \frac{1}{4})$, $\quad$ dla $x \in A$.

Ponadto, dla dowolnego $x \in D^n$, $\lambda_j(x) \neq 0$ dla co najwyżej $n+1$ wskaźników j, zatem $g(D^n)$ leży w skończonej sumie podprzestrzeni afinicznych wymiaru $\leqslant n$ w $\mathbb{R}^n$ (zob. (5)) i możemy wybrać $a \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{4}) \setminus g(D^n)$. Niech

(7) $\qquad h(x) = \frac{g(x)-a}{||g(x)-a||}\ , \quad x \in D^n\ , \quad a \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{4}) \setminus g(D^n).$

Z (7) i (6) wynika, że dla $x \in A$, $f(x)$ i $h(x)$ nie są punktami antypodycznymi, zatem

$$H(x,t) = \frac{tf(x)+(1-t)h(x)}{||tf(x)+(1-t)h(x)||}$$

jest homotopią $H : A\times I \to S^n$ pomiędzy $h|A$ i f. Teza wynika wiec z twierdzenia Borsuka 7.7.1.

Uwaga 7.7.4. W Twierdzeniu 7.7.3 kulę D^n można zastąpić sferą S^n, bo dla domkniętego zbioru $A \subset S^n$, $b \in S^n \setminus A$ i dodatniego $r < 2$ takiego, że kula $B = B(b,r)$ w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest rozłączna z A, zarówno $S^n \setminus B$ jak i $\overline{B \cap S^n}$, są homeomorficzne z D^n.

Uwaga 7.7.5. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym podzbiorem otwartym, $a \in U$ i niech

$$\pi_a(x) = \frac{x-a}{||x-a||}\ , \quad x \neq a.$$

Przekształcenia $\pi_a|\,\overline{U}\setminus U : \overline{U}\setminus U \to S^{n-1}$ nie można przedłużyć do ciągłego przekształcenia z $\overline{U}$ w S^{n-1}. W szczególności, z twierdzenia Borsuka 7.7.1, $\pi_a|\,\overline{U}\setminus U$ nie jest homotopijne z przekształceniem stałym z $\overline{U}\setminus U$ w S^{n-1}.

Istotnie, dążąc do sprzeczności załóżmy, że istnieje ciągłe $g : \overline{U} \to S^{n-1}$ takie, że $g|\,\overline{U}\setminus U = \pi_a|\,\overline{U}\setminus U$. Niech $U \subset B(a,r)$ i niech $f : D^n \to S^{n-1}$ będzie dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} g(a+rx), & \text{jeśli } \ a+rx \in \overline{U}, \\ \pi_a(a+rx), & \text{jeśli } \ a+rx \in \overline{B(a,r)} \setminus U. \end{cases}$$

Przekształcenie f jest ciągłe, zob. 1.3.9 (B). Dla $x \in S^{n-1}$, $a + rx \notin U$, więc $f(x) = \pi_a(a+rx) = \frac{rx}{||rx||} = x$, czyli f jest retrakcją kuli D^n na jej brzeg S^n, sprzecznie z Twierdzeniem 7.6.1.

Twierdzenie 7.7.6. *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Wówczas $a \in K$ nie należy do wnętrza K w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy a ma dowolnie małe otoczenia otwarte U w przestrzeni K takie, że każde przekształcenie ciągłe $f : K \setminus U \to S^{n-1}$ można przedłużyć do ciągłego przekształcenia $\overline{f} : K \to S^{n-1}$*

Dowód. Załóżmy najpierw, że a nie należy do wnętrza K w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ustalmy $r > 0$, wybierzmy $b \in B(a,r) \setminus K$ i przyjmijmy

(8) $\qquad U = B(a,r) \cap K\ , \quad S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| = r\}.$

Niech $f : K \setminus U \to S^{n-1}$ będzie przekształceniem ciągłym. Ponieważ $S(a,r)$ jest sferą $(n-1)$-wymiarową, z 7.7.4, $f|\,S(a,r) \cap K$ można przedłużyć w sposób ciągły na $S(a,r)$, a więc otrzymujemy przekształcenie ciągłe $g : K \setminus U \cup S(a,r) \to S^{n-1}$ przedłużające f. Ciągłe przedłużenie $\overline{f} : K \to S^{n-1}$ przekształcenia f możemy teraz określić przyporządkowując punktowi $x \in \overline{U}$ punkt $g(\overline{x})$, gdzie $\overline{x}$ jest punktem przecięcia $S(a,r)$ z półprostą wychodzącą z b i zawierająca x (z (8), $\overline{U} \setminus U \subset S(a,r)$, więc dla $x \in \overline{U} \setminus U$ mamy $\overline{x} = x$ i $\overline{f}(x) = f(x)$).

Na odwrót, jeśli dla pewnego $r > 0$, $\overline{B(a,r)} \subset K$, to z 7.7.5, dla dowolnego otoczenia otwartego U punktu a leżącego w $B(a,r)$, obcięcia $\pi_a| \, K \setminus U$ przekształcenia określonego w 7.7.5 nie można przedłużyć do przekształcenia ciągłego z K w S^{n-1}.

Wniosek 7.7.7 (Twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru)**.** *Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $h : G \to h(G)$ będzie homeomorfizmem na podzbiór $\mathbb{R}^n$. Wówczas $h(G)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Niech $a \in G$ i $\overline{B(a,r)} \subset G$. Stosując 7.7.6 do $K = h(\overline{B(a,r)})$ wnosimy, że $h(a)$ leży we wnętrzu K w $\mathbb{R}^n$.

Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie Borsuka o rozcinaniu przestrzeni euklidesowych.

Będziemy mówili, że zbiór zwarty $A \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$, jeśli dopełnienie $\mathbb{R}^n \setminus A$ nie jest spójne – ma co najmniej dwie składowe (zauważmy, że w $\mathbb{R}^n$ składowe zbiorów otwartych są otwarte).

Jeśli A leży w kuli $B(\mathbf{0},r)$ i $n \geqslant 2$, to dokładnie jedna składowa zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$ zawiera zbiór spójny $\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{0},r)$, a pozostałe składowe są ograniczone. Tak więc, zbiór zwarty $A \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{R}^n \setminus A$ ma składową ograniczoną – istnieje otwarty ograniczony zbiór spójny U w $\mathbb{R}^n$ taki, że $\overline{U} \setminus U \subset A$.

Twierdzenie 7.7.8 (Borsuka o rozcinaniu)**.** *Dla $n \geqslant 2$, zbiór zwarty $A \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie z A w S^{n-1} nie homotopijne z przekształceniem stałym.*

Ponieważ zgodnie z 7.6.6 sfera S^{n-1} nie jest ściągalna, wynika stąd w szczególności, że każdy zbiór w $\mathbb{R}^n$ homeomorficzny z S^{n-1} rozcina $\mathbb{R}^n$.

Dowód 7.7.8 poprzedzimy uwagą odwołującą się do Lematu Kuratowskiego - Zorna, przypomnianego przed 7.3.3.

Uwaga 7.7.9. Niech $f : A \to S^{n-1}$ będzie przekształceniem ciągłym określonym na podzbiorze domkniętym A zwartej przestrzeni X. Jeśli f nie ma ciągłego przedłużenia na X, to w X istnieje zbiór zwarty K zawierający A taki, że f nie ma ciągłego przedłużenia na K, ale ma ciągłe przedłużenie na dowolny zwarty podzbiór właściwy K zawierający A.

Dla uzasadnienia, rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{W}$ wszystkich zbiorów W otwartych w X, rozłącznych z A i takich, że f nie ma ciągłego przedłużenia na $X \setminus W$. Rodzinę $\mathcal{W}$ rozpatrujemy z naturalnym częściowym porządkiem wyznaczonym przez inkluzję. Z Lematu Kuratowskiego - Zorna, wystarczy pokazać, że suma dowolnego łańcucha w $\mathcal{W}$ jest elementem $\mathcal{W}$.

Dążąc do sprzeczności załóżmy, że $\mathcal{V}$ jest łańcuchem w $\mathcal{W}$ i dla $V = \bigcup \mathcal{V}$ istnieje ciągłe $g : Z \setminus V \to S^{n-1}$ takie, że $g|A = f$. Podobnie jak w dowodzie 7.7.1, istnieje wtedy ciągłe przedłużenie $\overline{g} : X \to D^n$ przekształcenia g na X i możemy określić ciągłe przedłużenie $h : X \setminus \overline{g}^{\,-1}(\mathbf{0}) \to S^{n-1}$ przekształcenia g wzorem $h(x) = \frac{\overline{g}(x)}{||\overline{g}(x)||}$.

Rodzina $\mathcal{V}$ jest otwartym w X pokryciem zwartego zbioru $\overline{g}^{\,-1}(\mathbf{0})$, a ponieważ $\mathcal{V}$ jest łańcuchem, istnieje $W \in \mathcal{V}$ zawierający $\overline{g}^{\,-1}(\mathbf{0})$. Obcięcie przekształcenia h do $X \setminus W$ jest ciągłym przedłużeniem f, wbrew określeniu rodziny $\mathcal{W}$.

Przejdziemy teraz do dowodu 7.7.8.

Dowód. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, $n \geqslant 2$.

Załóżmy najpierw, że istnieje ciągłe przekształcenie $f : A \to S^{n-1}$ nie homotopijne z przekształceniem stałym, wybierzmy $r > 0$ takie, że $A \subset B(\mathbf{0}, r)$ i połóżmy $X = \overline{B(\mathbf{0}, r)}$.

Przestrzeń X jest ściągalna, więc f nie ma ciągłego przedłużenia na X, zob. Zadanie 6.3. Niech K będzie zwartym podzbiorem X o własnościach opisanych w 7.7.9. Dla każdego $a \in K \setminus A$ i jego otwartego w K otoczenia V rozłącznego z A, f ma ciągłe przedłużenie f_V na $K \setminus V$. Ponieważ f_V nie ma przedłużenia na K, z 7.7.6 wnioskujemy, że każdy punkt z $K \setminus A$ leży we wnętrzu K w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a więc $U = K \setminus A$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Ponieważ $\overline{U} \setminus U \subset A$, każda składowa zbioru U jest ograniczoną składową $\mathbb{R}^n \setminus A$, zatem A rozcina $\mathbb{R}^n$.

Na odwrót, załóżmy, że A rozcina $\mathbb{R}^n$ i niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym zbiorem otwartym takim, że $\overline{U} \setminus U \subset A$. Uwaga 7.7.5 daje wówczas przekształcenie ciągłe z A w $\mathbb{R}^n$, które nie jest homotopijne z przekształceniem stałym.

7.8. **Przestrzenie normalne i przestrzenie parazwarte.** Twierdzenie Tietzego 1.6.5 o przedłużaniu przekształceń ciągłych można rozszerzyć na następującą klasę przestrzeni.

Definicja 7.8.1. *Przestrzeń Hausdorffa X jest normalna jeśli dla każdej pary A, B rozłącznych, domkniętych podzbiorów X istnieją rozłączne zbiory otwarte U, V takie, że $A \subset U$, $B \subset V$.*

Uwaga 7.8.2. (A) Przestrzenie metryzowalne i przestrzenie zwarte są normalne, zob. Zadania 4.1 (A) i 2.18.

(B) Jeśli F jest zbiorem domkniętym w przestrzeni normalnej X i $A_0, A_1 \subset F$ są rozłącznymi zbiorami domkniętymi, to istnieją zbiory domknięte F_0, F_1 w X takie, że $F = F_0 \cup F_1$ oraz $A_0 \cap F_1 = \emptyset$ i $A_1 \cap F_0 = \emptyset$.

Lemat 7.8.3 (Lemat Urysohna)**.** *Dla każdej pary A, B rozłącznych, domkniętych podzbiorów przestrzeni normalnej X istnieje funkcja ciągła $f : X \to I$ taka, że $f|A \equiv 0$ i $f|B \equiv 1$.*

Dowód. Dla $n = 0, 1, \ldots$, niech $\mathcal{S}_n$ będzie rodziną przedziałów $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Korzystając z 7.8.2 (B), można określić indukcyjnie ze względu na n, zbiory F_S, $S \in \mathcal{S}_n$, domknięte w przestrzeni X takie, że

(1) $F([0,1]) = X$, $F(S) = F(S_0) \cup F(S_1)$, jeśli $S = S_0 \cup S_1$,

(2) $A \cap F([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]) = \emptyset$ dla $k > 0$ i $B \cap F([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]) = \emptyset$ dla $k < 2^n - 1$.

(3) jeśli $S_0, S_1 \in \mathcal{S}_n$ są rozłączne, to $F(S_0) \cap F(S_1) = \emptyset$,

Przyjmijmy dla $n = 1, 2, \ldots$

(4) $F_n = \bigcup \{F(S) \times S : S \in \mathcal{S}_n\} \subset X \times I$.

Zbiory $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ są domknięte w $X \times I$ oraz, dla każdego $x \in X$ i $n \geqslant 1$, sekcja $\{t \in I : (x,t) \in F_n\}$ jest niepusta i ma średnicę $\leqslant 2\frac{1}{2^n}$, zob. (1), (3) i (4). Zatem $\bigcap_n F_n$ jest wykresem pewnej funkcji $f : X \to I$. Ponieważ f ma wykres domknięty w $X \times I$ i odcinek jest zwarty, funkcja f jest ciągła, zob. Zadanie 2.17. Z (2) wynika, że $f|A \equiv 0$ i $f|B \equiv 1$, zob. (4).

Lemat 7.8.3 pozwala przenieść na przestrzenie normalne Twierdzenie 1.6.2 o rozkładach jedynki. W dowodzie będziemy korzystali z charakteryzacji przestrzeni normalnych wynikającej bezpośrednio z 7.8.3. Przypomnijmy, że dla funkcji $\lambda : X \to I$, $\mathrm{coz}\lambda = \{x \in X : \lambda(x) \neq 0\}$.

Uwaga 7.8.4. Przestrzeń Hausdorffa X jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru domkniętego A i zbioru otwartego W zawierającego A istnieje funkcja ciągła $\varphi : X \to I$ taka, że $\varphi|A \equiv 1$ i $\mathrm{coz}\varphi \subset W$.

Twierdzenie 7.8.5. *Niech $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ będzie skończonym otwartym pokryciem przestrzeni normalnej X. Istnieją wówczas funkcje ciągłe $\lambda_i : X \to I$ takie, że $\mathrm{coz}\lambda_i \subset W_i$, $i = 1, \ldots, m$, oraz $\sum_{i=1}^m \lambda_i(x) = 1$, dla $x \in X$.*

Dowód. Udowodnimy przez indukcję, że dla każdego zbioru A domkniętego w X i jego skończonego otwartego w X pokrycia $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$, istnieją funkcje ciągłe $\varphi_i : X \to I$ takie, że $\mathrm{coz}\varphi_i \subset W_i$, $i = 1, \ldots, m$, a funkcja $\sigma = \sum_{i=1}^m \varphi_i$ jest dodatnia na A. To wystarczy, bo przyjmując dla $A = X$, jak w dowodzie 1.6.2, $\lambda_i = \frac{\varphi_i}{\sigma}$ otrzymamy funkcje z żądanymi własnościami.

Dla $m = 1$ teza wynika z 7.8.4. Jeśli $m > 1$, to funkcje φ_i, $i < m$, znajdujemy stosując założenie indukcyjne do pokrycia $\{W_1, W_2, \ldots, W_{m-1}\}$ zbioru $A \setminus W_m$, a φ_m otrzymujemy stosując 7.8.4 do zbiorów $A_m = \{x \in A : \sum_{i<m} \varphi_i(x) = 0\} \subset W_m$.

Wniosek 7.8.6 (Twierdzenie Tietzego - Urysohna). *Każda funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ określona na domkniętej podprzestrzeni A przestrzeni normalnej X ma ciągłe przedłużenie $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Dowód. Wykorzystując 7.8.5 możemy powtórzyć dowód twierdzenia Hahna 1.6.4 dla przestrzeni normalnych, zob. 1.6.6.

Uwaga 7.8.7. Niech $(C(I), d_{sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z odcinka w prostą rzeczywistą, z metryką supremum. Wniosek 7.8.6 można wzmocnić w następujący sposób: każda funkcja ciągła $\varphi : A \to C(I)$ określona na domkniętej podprzestrzeni A przestrzeni normalnej X ma ciągłe przedłużenie $\overline{\varphi} : X \to C(I)$.

Istotnie, zgodnie z Zadaniami 3.38 i 3.39, możemy znaleźć zanurzenie homeomorficzne $h : C(I) \to R^{\mathbb{N}}$ na domknięty podzbiór $E = h(C(I))$ iloczynu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ oraz ciągłe przekształcenie $r : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to E$ takie, że $r(x) = x$ dla $x \in E$. Z twierdzenia Tietze - Urysohna, przekształcenie $h \circ \varphi : A \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ma ciągłe przedłużenie $\overline{h \circ \varphi} : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i $\overline{\varphi} = h^{-1} \circ r \circ (\overline{h \circ \varphi}) : X \to C(I)$ jest ciągłym przedłużeniem φ.

Na przestrzenie normalne można też przenieść twierdzenie Borsuka o przedłużaniu homotopii. Rozumowanie użyte w dowodzie tego twierdzenia wymaga jednak pewnego uzupełnienia, podanego w następującym lemacie, zauważonym przez Moritę i Starbirda.

Lemat 7.8.8. *Niech A będzie zbiorem domkniętym w przestrzeni normalnej X. Każde przekształcenie ciągłe $F : X \times \{0\} \cup A \times I \to \mathbb{R}$ ma ciągłe przedłużenie na iloczyn kartezjański $X \times I$.*

Dowód. Określmy przekształcenie ciągłe $\varphi : A \to C(I)$ w przestrzeń funkcyjną $(C(I), d_{sup})$ wzorem

(5) $\quad \varphi(x)(t) = F(x,t)\ , \quad x \in A.$

Zgodnie z Uwagą 7.8.7 istnieje ciągłe przedłużenie $\overline{\varphi} : X \to C(I)$ przekształcenia φ. Formuła

(6) $\quad \overline{F}(x,t) = (\,\overline{\varphi}(x)(t) - \overline{\varphi}(x)(0)\,) + F(x,0)$

określa ciągłe przekształcenie $\overline{F} : X \times I \to \mathbb{R}$ takie, że $\overline{F}(x,0) = F(x,0)$ dla $x \in X$. Ponadto, jeśli $x \in A$, to $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$, więc z (5) i (6) mamy $\overline{F}(x,t) = F(x,t)$, a zatem $\overline{F}$ przedłuża F.

Twierdzenie 7.8.9 (Morita, Starbird)**.** *Twierdzenie Borsuka o kapeluszu jest prawdziwe dla przestrzeni normalnych X.*

Dowód. Z 7.8.8 wynika, że każde przekształcenie ciągłe z $X \times \{0\} \cup A \times I$ o wartościach w S^n ma ciągłe przedłużenie na $X \times I$ o wartościach w D^{n+1}. Można więc powtórzyć dowód 7.7.1 (twierdzenia Borsuka o kapeluszu dla przestrzeni metryzowalnych) zakładając jedynie, że X jest przestrzenią normalną.

Jak pokazała M.E. Rudin, istnieją przestrzenie normalne X takie, że iloczyn $X \times I$ nie jest normalny. W lemacie 7.8.8 ważna jest więc postać zbioru domkniętego w $X \times I$ – kapelusza, z którego przedłuża się przekształcenie ciągłe na cały iloczyn.

W uzasadnieniu Uwagi 7.8.7 skorzystaliśmy z rozkładu jedynki na nieskończoną rodzinę funkcji, zob. wskazówka do Zadania 3.39. To narzędzie jest bardzo użyteczne w wielu zagadnieniach matematyki.

Definicja 7.8.10. *(A) Rodzina funkcji ciągłych $\lambda_s : X \to I$, $s \in S$, na przestrzeni topologicznej X jest rozkładem jedynki na X, jeśli dla każdego $x \in X$ zbiór indeksów $s \in S$, dla których $\lambda_s(x) \neq 0$ jest przeliczalny i $\sum_{s \in S} \lambda_s(x) = 1$.*

(B) Rozkład jedynki $\{\lambda_s : s \in S\}$ jest wpisany w otwarte pokrycie $\mathcal{U}$ przestrzeni X, jeśli dla każdego $s \in S$ istnieje $U \in \mathcal{U}$ takie, że $\mathrm{coz}\lambda_s \subset U$.

(C) Rozkład jedynki $\{\lambda_s : s \in S\}$ jest lokalnie skończony na X, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje otoczenie V punktu x przecinające $\mathrm{coz}\lambda_s$ dla co najwyżej skończenie wielu $s \in S$.

Następująca uwaga pochodzi od R. Mathera

Uwaga 7.8.11. Jeśli $\{\lambda_s : s \in S\}$ jest rozkładem jedynki na przestrzeni topologicznej X, to istnieje lokalnie skończony rozkład jedynki $\{\mu_s : s \in S\}$ na X taki, że $\mathrm{coz}\mu_s \subset \mathrm{coz}\lambda_s$ dla $s \in S$.

Istotnie, niech $\varphi(x) = \sup\{\lambda_s(x) : s \in S\}$. Dla dowolnego $a \in X$ istnieje jego otoczenie V_0 i skończony zbiór $S_0 \subset S$ taki, że $1 - \sum_{s \in S_0} \lambda_s(x) < \frac{\varphi(a)}{2}$ dla $x \in V_0$. Stąd łatwo wywnioskować, że funkcja φ jest ciągła na X oraz, że rodzina funkcji ciągłych $\varphi_s(x) = \max(\lambda_s(x) - \frac{\varphi(x)}{2}, 0)$ ma następujące własności: każdy punkt w X ma otoczenie przecinające co najwyżej skończenie wiele zbiorów $\mathrm{coz}\varphi_s$, a funkcja ciągła $\sigma = \sum_{s \in S} \varphi_s$ jest dodatnia na X. Ponieważ $\mathrm{coz}\varphi_s \subset \mathrm{coz}\lambda_s$, wystarczy przyjąć $\mu_s = \frac{\varphi_s}{\sigma}$.

Definicja 7.8.12. *Przestrzeń Hausdorffa X jest parazwarta, jeśli dla każdego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X istnieje rozkład jedynki na X wpisany w $\mathcal{U}$.*

Uwaga 7.8.13. Zgodnie z 7.8.11, w przestrzeni parazwartej X, dla każdego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X istnieje lokalnie skończony rozkład jedynki na X wpisany w $\mathcal{U}$.

Wniosek 7.8.14. *Przestrzenie parazwarte są normalne.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem domkniętym w przestrzeni parazwartej X, a W otwartym zbiorem zawierającym A. Rozważmy lokalnie skończony rozkład jedynki $\{\lambda_s : s \in S\}$ na X wpisany w dwuelementowe pokrycie $\{W, X \setminus A\}$ i dla $T = \{s \in S : \mathrm{coz}\lambda_s \subset W\}$ połóżmy $\varphi = \sum_{s\in T} \lambda_s$. Mamy $\varphi|A \equiv 1$ i $\mathrm{coz}\varphi \subset W$, a lokalna skończoność zapewnia ciągłość $\varphi : X \to I$, więc teza wynika z 7.8.4.

Z 7.8.5 i 7.8.2 (A) wynika, że przestrzenie zwarte są parazwarte. Następujące twierdzenie opisuje szerszą klasę przestrzeni parazwartych.

Twierdzenie 7.8.15. *Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa spełniająca następujące dwa warunki:*

(i) z każdego otwartego pokrycia X można wybrać pokrycie przeliczalne,

(ii) dla każdego punktu $x \in X$ i jego otwartego otoczenia U istnieje funkcja ciągła $\varphi : X \to I$ taka, że $\varphi(x) = 1$ i $\mathrm{coz}\varphi \subset U$.

Wówczas X jest przestrzenią parazwartą.

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem X i niech Φ będzie rodziną funkcji ciągłych $\varphi : X \to I$ takich, że $\mathrm{coz}\varphi \subset U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}$. Własność (ii) zapewnia, że rodzina $\{\mathrm{coz}\varphi : \varphi \in \Phi\}$ jest otwartym pokryciem X, więc z własności (i) otrzymujemy przeliczalny podzbiór $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ rodziny Φ taki, że funkcja $\sigma = \sum_{i\geqslant 1} \frac{\varphi_i}{2^i} : X \to I$ jest dodatnia na X. Z 1.3.5 (B) wynika ciągłość σ, więc przyjmując $\lambda_i = \frac{\varphi_i}{2^i\sigma}$ dla $i = 1, 2, \ldots$, otrzymujemy rozkład jedynki na X wpisany w $\mathcal{U}$.

Uwaga 7.8.16. Następująca konstrukcja ma liczne zastosowania.

Niech zbiór X będzie sumą zbiorów $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, i niech $\mathcal{T}_n$ będzie topologią na K_n taką, że przestrzeń $(K_n, \mathcal{T}_n)$ jest zwarta i $\mathcal{T}_{n+1}$ indukuje na K_n topologię $\mathcal{T}_n$. Określmy w X topologię $\mathcal{T}_\infty = \{U \subset X : U \cap K_n \in \mathcal{T}_n \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\}$, zob. Przykład 1.2.2.

Przestrzeń $(X, \mathcal{T}_\infty)$ jest parazwarta.

Warunek (i) z 7.8.15 jest spełniony, wystarczy więc sprawdzić warunek (ii).

Niech $x \in U \in \mathcal{T}_\infty$. Ustalmy $m \geqslant 1$ takie, że $x \in K_m$. Wszystkie przestrzenie $(K_n, \mathcal{T}_n)$ są zwarte, więc z 7.8.6, dla $n \geqslant m$ istnieją funkcje ciągłe $\varphi_n : K_n \to I$ takie, że $\varphi_m(x) = 1$, $\mathrm{coz}\varphi_n \subset U \cap K_n$ i $\varphi_{n+1}|K_n = \varphi_n$. Funkcja $\varphi : X \to I$ będąca przedłużeniem wszystkich funkcji φ_n, ma żądane własności.

Z twierdzenia 7.8.15 wynika, że metryzowalne przestrzenie ośrodkowe są parazwarte, zob. Zadanie 1.51 (A). Udowodnimy że wszystkie przestrzenie metryzowalne są parazwarte. W dowodzie będziemy korzystać z twierdzenia Zermelo mówiącego, że dowolny zbiór można dobrze uporządkować (twierdzenie Zermelo jest równoważne lematowi Kuratowskiego - Zorna, zob. dyskusja poprzedzająca 7.3.3)

Twierdzenie 7.8.17 (A.H. Stone)**.** *Przestrzenie metryzowalne są parazwarte.*

Dowód. Ustalmy metrykę d generującą topologię przestrzeni X i niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem X. Możemy przyjąć, że rodzina $\mathcal{U}$ jest dobrze uporządkowana przez relację $\prec$.

Dla $U \in \mathcal{U}$ i $n = 1, 2, \ldots$, niech

(7) $\quad U(n) = \bigcup \Big\{B(x, \frac{1}{3n}) : B(x, \frac{1}{n}) \subset U \text{ i } x \notin \bigcup\{V \in \mathcal{U} : V \prec U\}\Big\}.$

Zauważmy, że

(8) $\quad \mathrm{dist}(U(n), V(n)) \geqslant \frac{1}{3n}$, dla $U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V$.

Istotnie, jeśli $a \in U(n)$, $b \in V(n)$ i $V \prec U$, to $a \in B(x, \frac{1}{3n})$, $b \in B(y, \frac{1}{3n})$, gdzie $x \notin V$ i $B(y, \frac{1}{n}) \subset V$, zob. (7), więc $d(x, y) > \frac{1}{n}$ i $d(a, b) > \frac{1}{3n}$.

Niech $\lambda_{U,n} : X \to [0, \frac{1}{2^n}]$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\mathrm{coz}\lambda_{U,n} = U(n)$, zob. 1.6.1. Z (8), funkcja $\lambda_n = \sum\{\lambda_{U,n} : U \in \mathcal{U}\}$ jest ciągła i $\lambda_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, zatem funkcja $\sigma = \sum_n \lambda_n$ jest ciągła z 1.3.5 (B). Pokażemy, że $\sigma(x) > 0$ dla $x \in X$. Istotnie, jeśli U jest pierwszym, w sensie porządku $\prec$, elementem $\mathcal{U}$ zawierającym x, oraz $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$, to zgodnie z (7), $x \in U(n)$, a więc $\lambda_{U,n}(x) > 0$.

Rodzina $\Big\{\frac{\lambda_{U,n}}{\sigma} : U \in \mathcal{U}, n \geqslant 1\Big\}$ jest rozkładem jedynki na X wpisanym w $\mathcal{U}$.

7.9. **Homotopijna niezmienniczość grupy podstawowej.** Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym i $a \in X$. Jeśli α jest pętlą w X zaczepioną w a, to $f \circ \alpha$ jest pętlą w Y zaczepioną w $f(a)$. Ponadto, jeśli $\alpha \sim \alpha'$, to $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$, oraz $f \circ (\alpha \star \beta) = (f \circ \alpha) \star (f \circ \beta)$, zob. 6.3.1. Przekształcenie f indukuje zatem homomorfizm grup podstawowych

(1) $\quad f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a)), \quad f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$

Twierdzenie 7.9.1. *Jeśli przekształcenia ciągłe $f, g : X \to Y$ są homotopijne i $a \in X$, to istnieje izomorfizm $\phi : \pi_1(Y, g(a)) \to \pi_1(Y, f(a))$ taki, że $f_* = \phi \circ g_*$.*

Dowód. Niech $H : X \times I \to Y$ będzie homotopią łączącą f z g. Wówczas $h(t) = H(a, t)$ jest drogą w Y od $f(a)$ do $g(a)$ i niech $\phi_h : \pi_1(Y, g(a)) \to \pi_1(Y, f(a))$ będzie izomorfizmem związanym z drogą h, opisanym w 6.3 (4). Sprawdzimy, że $f_* = \phi_h \circ g_*$. Zgodnie z (1) i określeniem ϕ_h, zob. 6.3 (3), (4), mamy pokazać, że dla każdej pętli $\alpha \in \Omega(X, a)$,

(2) $\quad f \circ \alpha \sim \varphi_h(g \circ \alpha).$

Niech $H' : I \times I \to Y$ będzie zadane wzorem

$$H'(s,t) = \begin{cases} H(a, 3st), & \text{jeśli } s \in [0, \frac{1}{3}], \\ H(\alpha(3s-1), t), & \text{jeśli } s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ H(a, 3(1-s)t), & \text{jeśli } s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

H' jest homotopią łączącą $\varphi_{\varepsilon_{f(a)}}(f \circ \alpha)$ z $\varphi_h(g \circ \alpha)$, gdzie $\varepsilon_{f(a)}$ jest pętlą stałą zaczepioną w $f(a)$. Ponieważ $\varphi_{\varepsilon_{f(a)}}(\beta) \sim \beta$ dla $\beta \in \Omega(Y, f(a))$, otrzymaliśmy (2).

Uwaga 7.9.2. Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ będą przekształceniami ciągłymi, $a \in X$, $b = f(a)$, $c = g(b)$. Wówczas, zob. (1), $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, gdzie $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b)$, $g_* : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(Z, c)$.

Wniosek 7.9.3. *Niech X i Y będą łukowo spójnymi przestrzeniami homotopijnie równoważnymi. Wówczas grupy podstawowe $\pi_1(X)$ i $\pi_1(Y)$ są izomorficzne.*

Dowód. Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ będą przekształceniami ciągłymi takimi, że $g \circ f \sim id_X$, oraz $f \circ g \sim id_Y$. Ustalmy $a \in X$ i niech $b = f(a)$, $c = g(b)$. Pokażemy, że

(3) $g_* : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(X, c)$ jest izomorfizmem.

Ponieważ $g \circ f \sim id_X$, z 7.9.1 dostajemy izomorfizm $\phi : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, c)$ taki, że $(g \circ f)_* = \phi \circ (id_X)_* = \phi$. Z Uwagi 7.9.2 wynika, że $\pi_1(X, c)$ jest obrazem g_*.

Z drugiej strony, $f \circ g \sim id_Y$ i ponownie odwołując się do 7.9.1, mamy izomorfizm $\phi : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(X, f(c))$ taki, że $(f \circ g)_* = \phi \circ (id_Y)_* = \phi$. Z Uwagi 7.9.2 wnosimy, że g_* ma trywialne jądro (dokładniej, korzystając z 7.9.2, wyróżniamy tym razem punkt c w X i rozpatrujemy homomorfizm $f_* : \pi_1(X, c) \to \pi_1(Y, f(c)))$.

Ponieważ przestrzenie X i Y są łukowo spójne, $\pi_1(X)$ jest izomorficzne z $\pi_1(X, c)$, a $\pi_1(Y)$ jest izomorficzne z $\pi_1(Y, b)$. Z (3) otrzymujemy więc izomorfizm grup $\pi_1(X)$ i $\pi_1(Y)$.

7.10. **Nakrycia i podnoszenie przekształceń ciągłych.** Niech $p : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zbiór otwarty U w Y jest trywialnie nakryty przez p, jeśli istnieje rodzina $\mathcal{V}$ parami rozłącznych zbiorów otwartych w X taka, że dla każdego $V \in \mathcal{V}$ obcięcie $p \mid V : V \to U$ jest homeomorfizmem i $p^{-1}(U) = \bigcup \mathcal{V}$.

Przekształcenie p jest nakryciem, jeśli Y ma pokrycie zbiorami otwartymi, z których każdy jest trywialnie nakryty przez p.

Przykład 7.10.1. (A) Nawinięcie prostej na okrąg, opisane w 6.2 (2), jest nakryciem.

(B) Przekształcenie ilorazowe $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2$ sfery na płaszczyznę rzutową, określone w 5.1.3, jest nakryciem.

Następujące twierdzenie o podnoszeniu przekształceń ciągłych jest uogólnieniem Twierdzenia 6.2.1.

Twierdzenie 7.10.2. *Niech $p : X \to Y$ będzie nakryciem, niech $f : I^n \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym i niech $a \in p^{-1}(f(\mathbf{0}))$. Istnieje wówczas dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $\tilde{f} : I^n \to X$ takie, że $p \circ \tilde{f} = f$ i $\tilde{f}(\mathbf{0}) = a$.*

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem przestrzeni Y zbiorami trywialnie nakrytymi przez p i niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a dla pokrycia I^n zbiorami otwartymi $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, zob. 2.1.6. Podzielmy I^n hiperpłaszczyznami prostopadłymi do osi współrzędnych na m domkniętych kostek o średnicach $< \delta$ i ponumerujmy te kostki tak, że $\mathbf{0} \in K_1$ i $L_i = K_1 \cup \ldots \cup K_i$ ma niepuste, spójne przecięcie z K_{i+1}, dla $i < m$. Pokażemy, że dla każdego $i \leqslant m$, istnieje dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $g_i : L_i \to X$ spełniające warunek

(1) $p \circ g_i = f \mid L_i, \quad g_i(\mathbf{0}) = a,$

gdzie $f \mid L_i : L_i \to X$ jest obcięciem f do L_i.

Przyjmijmy $L_0 = \{\mathbf{0}\}$, $g_0(\mathbf{0})) = a$ i załóżmy, że mamy już określone przekształcenie $g_i : L_i \to X$ spełniające (1), $i < m$. Zbiór $f(K_{i+1})$ leży w pewnym $U \in \mathcal{U}$, trywialnie nakrytym przez p i niech $p^{-1}(U) = \bigcup \mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{V}$ jest rodziną opisaną w definicji nakrycia. Ponieważ $g_i(L_i \cap K_{i+1})$ jest spójnym podzbiorem $\bigcup \mathcal{V}$ i elementy $\mathcal{V}$ są parami rozłącznymi zbiorami otwartymi, istnieje $V \in \mathcal{V}$ takie, że $g_i(L_i \cap K_{i+1}) \subset V$. Ponieważ $p \mid V : V \to U$ jest homeomorfizmem, określając $g_{i+1} : L_{i+1} \to X$ formułami $g_{i+1} \mid L_i = g_i$, oraz $g_{i+1} \mid K_{i+1} = (p \mid V)^{-1} \circ (f \mid K_{i+1})$ otrzymujemy przekształcenie ciągłe spełniające (1), zob. 1.3.9 (B). Jest to jedyny sposób przedłużenia g_i na L_{i+1} z zachowaniem (1), bo każde takie przedłużenie przekształca K_{i+1} w $p^{-1}(U)$, a więc ze spójności K_{i+1} - w zbiór V.

W rezultacie, przyjmując $\tilde{f} = g_m : I^n \to X$ otrzymujemy jedyne przekształcenie ciągłe spełniające warunek $p \circ \tilde{f} = f$ i przedłużające g_0, tzn. przeprowadzające $\mathbf{0}$ w a.

Wniosek 7.10.3. *Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{P}^2$ jest nieściągalna.*

Dowód. Zgodnie z 7.9.3, wystarczy w pewnym punkcie płaszczyzny rzutowej zaczepić pętlę nie homotopijną z pętlą stałą. Niech $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2$ będzie nakryciem płaszczyzny rzutowej, zob. 7.10.1 (B), niech $a_i = (0, 0, (-1)^i)$, $i = 0, 1$, będą biegunami północnym i południowym sfery S^2 i niech $b = \pi(a_0) = \pi(a_1)$.

Zgodnie z 7.10.2, dla każdej pętli $\alpha : I \to \mathbb{P}^2$ zaczepionej w b istnieje dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $\tilde{\alpha} : I \to S^2$ takie, że $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ i $\tilde{\alpha}(0) = a_0$. Dla pętli stałej ε_b, $\tilde{\varepsilon}_b(s) = a_0$, dla $s \in I$. Niech $H : I^2 \to \mathbb{P}^2$ będzie homotopią między dowolnymi pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(\mathbb{P}^2, b)$. Z 7.10.2, istnieje przekształcenie ciągłe $\tilde{H} : I^2 \to S^2$ takie, że $\pi \circ \tilde{H} = H$, oraz $\tilde{H}(\mathbf{0}) = a_0$. Ponieważ, dla $i = 0, 1$, $H(\{i\} \times I) = \{b\}$, $\tilde{H}(\{i\} \times I) \subset \pi^{-1}(b) = \{a_0, a_1\}$ i ze spójności odcinka wynika, że $\tilde{H}$ jest stałe na $\{i\} \times I$. Dla $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{H}(s, 0)$, $\tilde{\beta}(s) = \tilde{H}(s, 1)$ mamy $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, $\pi \circ \tilde{\beta} = \beta$, $\tilde{\alpha}(0) = a_0 = \tilde{\beta}(0)$, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Wynika stąd, że dla homotopijnych pętli $\alpha, \beta \in \Omega(\mathbb{P}^2, b)$, drogi $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ kończą się w tym samym biegunie sfery. W szczególności, dla pętli $\alpha \in \Omega(\mathbb{P}^2, b)$ homotopijnej z pętlą stałą ε_b, droga $\tilde{\alpha}$ kończy się w a_0. Pozostaje wskazać pętlę $\alpha \in \Omega(\mathbb{P}^2, b)$, dla której $\tilde{\alpha}$ kończy się w a_1.

Przyjmijmy $w(s) = (0, \sin(\pi s), \cos(\pi s))$, $s \in I$, $\alpha = \pi \circ w$. Wówczas w jest drogą w S^2 od a_0 do a_1, α jest pętlą w $\mathbb{P}^2$ zaczepioną w b i $\tilde{\alpha} = w$, a więc pętla α nie jest homotopijna z pętlą stałą.

1. Przestrzenie metryczne i przestrzenie topologiczne.

1.1. ♠ Niech $d_k : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określone następującą formułą, gdzie $\mathbf{0} = (0,0)$, a d_e oznacza metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^2$:

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } a, b \text{ i } \mathbf{0} \text{ leżą na jednej prostej,} \\ d_e(a,\mathbf{0}) + d_e(b,\mathbf{0}), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

(A) Sprawdzić, że d_k jest metryką.

(B) Pokazać, że zbiór U jest otwarty w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie U z każdą prostą przechodzącą przez $\mathbf{0}$ jest otwarte w topologii euklidesowej tej prostej i jeśli $\mathbf{0} \in U$, to U zawiera pewną kulę euklidesową o środku w $\mathbf{0}$.

1.2. ♠ Niech dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $p(x,y) = (x,0)$ i niech $d_r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określone formułą, gdzie d_e jest metryką euklidesową

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } p(a) = p(b), \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(p(b),b), & \text{jeśli } p(a) \neq p(b). \end{cases}$$

(A) Sprawdzić, że d_r jest metryką.

(B) Pokazać, że zbiór U jest otwarty w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie U z każdą prostą pionową jest otwarte w topologii euklidesowej tej prostej, oraz jeśli $a = (t,0) \in U$, to U zawiera pewną kulę euklidesową o środku w a.

1.3. Niech $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone formułą

$$d(s,t) = \begin{cases} \max(|s|,|t|), & \text{jeśli } s \neq t \text{ ,} \\ 0, & \text{jeśli s=t.} \end{cases}$$

Pokazać, że metryka d generuje w $\mathbb{R}$ tę samą topologię, co metryka w Przykładzie 1.1.7 (A).

1.4. Pokazać, że dla każdego zbioru $A \subset (0,+\infty)$ można określić przestrzeń metryczną (X,d) taką, że $A = \{d(x,y) : x,y \in X, x \neq y\}$.

Wskazówka. Zob. Zadanie 1.3.

1.5. (A) Niech $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie niemalejącą funkcją wklęsłą (tzn. zbiór pod wykresem jest wypukły) taką, że $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(u) > 0$ dla $u > 0$. Pokazać, że dla każdej metryki d na zbiorze X, $d_\varphi(x,y) = \varphi(d(x,y))$ jest metryką na X.

Wskazówka. Sprawdzić, że $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$, dla $0 \leqslant u \leqslant v$. W tym celu, dla $u < v$, skorzystać z nierówności $\frac{\varphi(u+v)-\varphi(u)}{v} \leqslant \frac{\varphi(v)-\varphi(u)}{v-u} \leqslant \frac{\varphi(v)}{v}$, które wynikają z wklęsłości φ.

(B) Pokazać, że jeśli φ jest ciągła w zerze, to zbiory otwarte w (X, d_φ) i (X,d) są identyczne.

(C) Pokazać, że jeśli φ nie jest ciągła w zerze, to każdy zbiór w przestrzeni (X, d_φ) jest otwarty.

1.6. ♠ Niech $(C[0,1], d_{sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$ z metryką supremum:

$$d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Które z następujących zbiorów są otwarte w tej przestrzeni:

$A = \{f \in C[0,1] : \ f(t) > 0 \text{ dla } t \in [0,1]\}$,

$B = \{f \in C[0,1] : \ f \text{ przyjmuje wartość zero}\}$,

$C = \{f \in C[0,1] : \int_0^1 |f(t)|dt < 1\}$,
$D = \{f \in C[0,1] : f$ jest ściśle rosnąca$\}$?

1.7. W zbiorze $C[0,1]$ funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$ rozpatrzmy metrykę określoną formułą

$$\tau(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt.$$

Które ze zbiorów A, B, C, D z Zadania 1.6 są otwarte w przestrzeni $(C[0,1], \tau)$?

1.8. Niech $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych ($0 \notin \mathbb{N}$) i niech, dla $a = (n_1, n_2, \ldots)$, $b = (m_1, m_2, \ldots)$

$$d(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{i:\, n_i \neq m_i\}}, & \text{jeśli } a \neq b, \\ 0, & \text{jeśli } a = b. \end{cases}$$

(A) Wykazać, że d jest metryką w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, przy czym $d(a,b) \leqslant \max\{d(a,c), d(b,c)\}$, dla $a, b, c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(B) Wykazać, że każde dwie kule w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ są albo rozłączne, albo jedna zawiera się w drugiej.

(C) Które z następujących zbiorów są otwarte w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$:
$A = \{(n_1, n_2, \ldots) : n_i = 1$ dla co najmniej trzech indeksów $i\}$,
$B = \{(n_1, n_2, \ldots) : n_i = 1$ dla nieskończenie wielu $i\}$.

(D) Niech $<$ będzie porządkiem leksykograficznym w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (tzn. $(n_1, n_2, \ldots) < (m_1, m_2, \ldots)$ jeśli dla pewnego i, $n_i < m_i$ oraz $n_j = m_j$ dla $j < i$) i niech, dla $a < b$, $(a,b) = \{x : a < x < b\}$. Wykazać, że przedziały (a,b) są otwarte w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$. Niech $c = (2, 1, 1, \ldots)$. Pokazać, że nie istnieje przedział (a,b) taki, że $c \in (a,b) \subset B(c, \frac{1}{2})$.

1.9. Niech M będzie zbiorem niemalejących funkcji ciągłych $f : [0,1] \to [0,1]$ spełniających warunek $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Niech $\lambda(f) = \inf\{s : f(s) = 1\}$, $\delta(f,g) = \inf\{s : f(s) \neq g(s)\}$ oraz dla $f, g \in M$,

$$d(f,g) = \begin{cases} (\lambda(f) - \delta(f,g)) + (\lambda(g) - \delta(f,g)), & \text{jeśli } f \neq g, \\ 0, & \text{jeśli } f = g. \end{cases}$$

(A) Sprawdzić, że d jest metryką na M.

(B) Które z następujących zbiorów są otwarte w przestrzeni (M, d):
$A = \{f \in M : f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}\}$, $B = \{f \in M : f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}\}$, $C = \{f \in M : f(\frac{1}{2}) = 1\}$?

1.10. Wykazać, że dla przestrzeni metrycznej (X, d) następujące warunki są równoważne:

(i) dla każdego $A \subset X$, zbiór A lub jego dopełnienie $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym,

(ii) dla co najwyżej jednego punktu $x \in X$, $\{x\}$ nie jest zbiorem otwartym.

1.11. ♠ Punkt a w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest izolowany, jeśli $\{a\}$ jest zbiorem otwartym. Przestrzeń topologiczna jest dyskretna, jeśli wszystkie jej punkty są izolowane.

Niech $\mathcal{T}_k$ i $\mathcal{T}_r$ będą topologiami generowanymi przez metryki d_k i d_r z Zadań 1.1 i 1.2.

(A) Określić zbiór nieprzeliczalny $Y \subset \mathbb{R}^2$ taki, że podprzestrzeń $(Y, (\mathcal{T}_k)_Y)$ jest dyskretna, ale podprzestrzeń $(Y, (\mathcal{T}_r)_Y)$ nie ma punktów izolowanych.

(B) Określić zbiór nieprzeliczalny $Y \subset \mathbb{R}^2$ taki, że obie przestrzenie $(Y, (\mathcal{T}_k)_Y)$ i $(Y, (\mathcal{T}_r)_Y)$ mają dokładnie jeden punkt nieizolowany.

1.12. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów $U \subset \mathbb{R}^2$ takich, że przecięcie $U \cap L$ z każdą prostą równoległą do osi x-ów, lub y-ów jest otwarte ze względu na metrykę euklidesową w L.

(A) Sprawdzić, że $\mathcal{T}$ jest topologią w $\mathbb{R}^2$ i przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ jest Hausdorffa.

(B) Pokazać, że jeśli $C \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ jest zbiorem nieskończonym, to istnieje $U \in \mathcal{T}$ takie, że $\mathbf{0} \in U$ i zbiór $C \setminus U$ jest nieskończony.

(C) Wykazać, że topologia $\mathcal{T}$ jest niemetryzowalna.

Wskazówka. Założyć, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$, pokazać, że każda kula $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$ zawiera punkt c_n o obu współrzędnych dodatnich, rozpatrzyć $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ i wyprowadzić z (B) sprzeczność.

1.13. Niech F będzie skończonym podzbiorem $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{B} = \{\{t\} : t \in \mathbb{R} \setminus F\} \cup \{(t-\varepsilon, t+\varepsilon) : \ t \in F, \ \varepsilon > 0\}$.

(A) Sprawdzić, że rodzina $\mathcal{B}$ spełnia warunki (i) i (ii) Twierdzenia 1.2.6 dla $X = \mathbb{R}$ i zauważyć, że topologia $\mathcal{T}$ generowana przez $\mathcal{B}$ w $\mathbb{R}$ różni się od topologii euklidesowej.

(B) Niech $u(t) = \min\{|t-s| : s \in F\}$. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie określone formułą $f(s) = (s, u(s))$ i $d(s,t) = d_r(f(s), f(t))$, gdzie d_r jest metryką z Zadania 1.2. Wykazać, że metryka d generuje w $\mathbb{R}$ topologię $\mathcal{T}$.

1.14. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną i niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną skończonych sum zbiorów postaci $U \cap F$, gdzie $U, X \setminus F \in \mathcal{T}$. Wykazać, że $\mathcal{A}$ jest algebrą, tzn. skończone sumy, przecięcia i dopełnienia zbiorów z $\mathcal{A}$ należą do $\mathcal{A}$.

1.15. ♠ Pokazać, że na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$:

(A) $\overline{\mathbb{P}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza liczby wymierne i $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(B) Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, niech $b_1, b_2, \ldots$ będzie zbieżnym ciągiem liczb rzeczywistych i niech $B = \{a_i + b_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Pokazać, że jeśli $\overline{A} = \mathbb{R}$, to także $\overline{B} = \mathbb{R}$. Czy założenie zbieżności ciągu (b_i) jest istotne?

1.16. ♠ Dla $a, b \in \mathbb{R}^2$, niech $I(a,b)$ będzie odcinkiem łączącym a i b, wraz z końcami. Niech

$A = \bigcup\{I(\mathbf{0}, b) : b = (1,t), t \in \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})\}$,

$B = \bigcup\{I(\mathbf{0}, b) : b = (t,1), t \in \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})\}$,

$C = \bigcup\{I(\mathbf{0}, b) : b = (1,q), q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$.

Znaleźć domknięcia i wnętrza zbiorów A, B, C w następujących przestrzeniach topologicznych:

(a) $\mathbb{R}^2$ z topologią euklidesową,

(b) $\mathbb{R}^2$ z topologią generowaną przez metrykę d_k z Zadania 1.1,

(c) $\mathbb{R}^2$ z topologią generowaną przez metrykę d_r z Zadania 1.2.

1.17. Ustawmy liczby wymierne z przedziału $[0,1]$ w ciąg $q_1, q_2, \ldots$ i niech

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(q_n, t) : 0 < t \leqslant 1\}$,

$B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(q_n, t) : 0 < t \leqslant 1/n\}$.

(A) Znaleźć wnętrze i domknięcie zbiorow A i B w każdej z przestrzeni topologicznych opisanych w (a), (b), (c) w Zadaniu 1.16.

(B) Niech Y będzie zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ mających pierwszą współrzędną wymierną. Rozważyć Y z topologią podprzestrzeni przestrzeni opisanych w (a), (b), (c) w Zadaniu 1.16 i znaleźć wnętrze i domknięcie zbiorów A i B w każdej z tych topologii Y.

1.18. ♠ Niech $(C[0,1], d_{sup})$ będzie przestrzenią opisaną w Zadaniu 1.6. Znaleźć domknięcie i wnętrze każdego ze zbiorów A, B, C, D opisanych w tym zadaniu, w topologii generowanej przez metrykę supremum.

1.19. Niech $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ będzie przestrzenią opisaną w Zadaniu 1.8.

(A) Znaleźć domknięcia i wnętrza zbiorów A i B opisanych w tym zadaniu.

(B) Niech F będzie zbiorem domkniętym w przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wykazać, że istnieje $a \in F$ takie, że ze względu na porządek leksykograficzny określony w Zadaniu 1.8 (D), $a < u$ dla każdego $u \in F \setminus \{a\}$.

Wskazówka. Wybrać współrzędne $n_1, n_2, \dots$ punktu a indukcyjnie: n_1 jest najmniejszą, spośród pierwszych współrzędnych punktów $u \in F$; jeśli $n_1, \dots, n_k$ są określone, n_{k+1} jest najmniejszą, spośród $(k+1)$-szych współrzędnych tych punktów $u \in F$, które mają $n_1, \dots, n_k$ jako pierwsze k współrzędnych.

1.20. ♠ Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią z Przykładu 1.2.12. Udowodnić, że domknięcie każdego zbioru nieskończonego w X jest całą przestrzenią.

1.21. ♠ Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Pokazać, że dla $A, B \subset X$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.22. ♠ Niech $Y \subset X$ będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Dla $A \subset Y$ domknięcie A w podprzestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ (w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$) oznaczamy przez $\overline{A}^Y$ ($\overline{A}^X$).

(A) Wykazać, że $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

(B) Wykazać, że jeśli $\overline{A}^Y = Y$, to $\overline{A}^X = \overline{Y}^X$.

1.23. Niech A i B będą zbiorami rozłącznymi w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że jeśli zbiór A jest otwarty w X, to $\overline{A} \cap \mathrm{Int}\overline{B} = \emptyset$.

1.24. Punkt a w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest punktem skupienia zbioru $A \subset X$, jeśli każde otoczenie a zawiera element zbioru A różny od a. Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczamy symbolem A^d i niech

$$A^{(n)} = (\dots (A^d)^d \dots)^d$$

będzie zbiorem otrzymanym z A przez n–krotne powtórzenie operacji przejścia do zbioru punktów skupienia.

(A) Określić dla każdej liczby naturalnej n zbiór $A \subset [0, 1]$ taki, że w metryce euklidesowej na odcinku, $A^{(n)} \neq \emptyset$, ale $A^{(n+1)} = \emptyset$.

(B) Niech F będzie zbiorem domkniętym na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$. Wykazać, że $\mathrm{Int}F = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R} \setminus F$ taki, że $F = A^d$. Udowodnić analogiczny fakt dla przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$.

Wskazówka. Niech $\overline{F} = F$ i $\mathrm{Int}F = \emptyset$. Ustalmy naturalne n i z każdego przedziału $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ przecinającego F, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, wybierzmy punkt spoza F. Niech A_n będzie zbiorem wybranych punktów i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Sprawdzić, że A ma żądane własności.

1.25. (A) Niech $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ będzie strzałką opisaną w Przykładzie 1.2.10. Pokazać, że dla każdego nieprzeliczalnego $A \subset \mathbb{R}$, $A \cap A^d \neq \emptyset$ (czyli A traktowany jako podprzestrzeń strzałki nie jest przestrzenią dyskretną, zob. Zadanie 1.11).

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że A jest sumą zbiorów $A_n = \{a \in A : (a - 1/n, a) \cap A = \emptyset\}$, wybrać zbiór nieprzeliczalny A_n i rozpatrzyć $a, b \in A$, dla których $0 < |a - b| < 1/n$.

(B) Czy prosta $\mathbb{R}$ z topologią euklidesową zawiera nieprzeliczalny podzbiór A taki, że $A \cap A^d = \emptyset$? Czy taki podzbiór można znaleźć w $\mathbb{R}^2$ z topologią generowaną przez metrykę d_k z Zadania 1.1? A w $\mathbb{R}^2$ z topologią generowaną przez metrykę d_r z Zadania 1.2?

1.26. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że ciąg punktów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ w X jest zbieżny do $a \in X$, jeśli każde otoczenie punktu A zawiera prawie wszystkie wyrazy a_n. Wskazać w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ określonej w Zadaniu 1.12, oraz w przestrzeni $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{T}_\infty)$ opisanej w Przykładzie 1.2.2, zbiór A i punkt a takie, że $a \in \overline{A}$, ale żaden ciąg punktów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $a_n \in A$, nie jest zbieżny do a.

Wskazówka. Dla $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ skorzystać z 1.12 (B), a dla $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{T}_\infty)$ rozpatrzyć zbiór $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$, gdzie $A_n = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 = 1/n,\ x_2 = \ldots = x_n = 0 \text{ i } x_{n+1} > 0\}$, oraz punkt $a = (0, 0, \ldots)$.

1.27. ♠ Określmy funkcje z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ formułami: $f_0(x, y) = (x, y)$, $f_1(x, y) = (2x, y)$, $f_2(x, y) = (x + 1, y)$, $f_3(x, y) = (x + y, x + y)$. Znaleźć zbiory punktów ciągłości tych funkcji, rozpatrywanych jako przekształcenia z przestrzeni topologicznej $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ w $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}'')$, gdzie $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ jest jedną z topologii generowanych przez metryki d_k, d_r z Zadań 1.1 i 1.2 (dla każdej funkcji f_i są cztery możliwości do rozpatrzenia).

1.28. Ustawmy liczby wymierne $\mathbb{Q}$ w ciąg $q_1, q_2, \ldots$ i określmy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formułą

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jeśli } t = q_n, \\ 0, & \text{jeśli } t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wykazać, że funkcja f jest ciągła w punkcie t wtedy i tylko wtedy, gdy $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.29. Niech $C[0, 1]$ będzie zbiorem funkcji ciągłych z $[0, 1]$ w $\mathbb{R}$ i niech funkcje $F, G, H : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ będą określone formułami:

$F(f) = \sup\{f(t) : t \in [0, 1]\}$, $G(f) = \int_0^1 f(t)dt$, $H(f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot f(\frac{1}{n})$.

Która z tych funkcji jest ciągła, jeśli topologia w $C[0, 1]$ jest generowana przez metrykę

(A) d_{sup} opisana w Zadaniu 1.6,

(B) τ opisaną w Zadaniu 1.7?

1.30. Niech $f, g : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będą opisane formułami

$f(n_1, n_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{1}{n_i}$,

$g(n_1, n_2, \ldots) = \sup\{\frac{n_i}{1+n_i} : i = 1, 2, \ldots\}$.

Sprawdzić, czy funkcja f lub g jest ciągła, jeśli w $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ rozpatruje się topologię generowaną przez metrykę opisaną w Zadaniu 1.8.

1.31. Niech $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią opisaną w Zadaniu 1.12. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła ze względu na topologię $\mathcal{T}$ w $\mathbb{R}^2$ i topologię euklidesową w $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła ze względu na każdą zmienną osobno (tzn. dla każdego $a \in \mathbb{R}$, funkcje $u_a, w_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $u_a(t) = f(a, t)$ i $w_a(t) = f(t, a)$, są ciągłe na prostej euklidesowej).

1.32. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą z przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$, mającą wszystkie warstwy $f^{-1}(y)$ skończone. Wykazać, że jeśli wszystkie podzbiory jednopunktowe w X są domknięte, to dla $A \subset X$, $f(A^d) \subset (f(A))^d$, gdzie operacja d jest opisana w Zadaniu 1.24.

1.33. ♠ Niech $Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} : i = 1, 2, \ldots\}$, $Z_2 = Z_1 \cup \mathbb{N}$ i $Z_3 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} + \frac{1}{j} : i, j = 2, 3, \ldots,\ \frac{1}{j} < \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\}$. Pokazać, że żadne dwie spośród podprzestrzeni Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 prostej euklidesowej nie są homeomorficzne.

Wskazówka. Sprawdzić, że przy homeomorfiźmie punkty izolowane (zob. Zadanie 1.11) przechodzą na punkty izolowane.

1.34. Niech T będzie sumą trzech odcinków łączących punkt $(0,0)$ z punktami $(1,0)$,$(-1,0)$ i $(0,1)$ na płaszczyźnie, rozpatrywaną z topologią euklidesową.

(A) Pokazać, że nie istnieje ciągła i różnowartościowa funkcja $f : T \to [0,1]$.

Wskazówka. Skorzystać z własności Darboux dla funkcji f obciętej do każdego z trzech wymienionych odcinków w T.

(B) Wskazać trzy kule otwarte w T, z których żadne dwie nie są homeomorficzne.

1.35. Znaleźć zanurzenie homeomorficzne przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(d))$ z Zadania 1.3 w przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$ z Zadania 1.2. Czy można tę przestrzeń zanurzyć w przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_k))$ z Zadania 1.1?

1.36. (A) Wykazać, że $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$ z Zadania 1.2 nie jest homeomorficzna z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_k))$ z Zadania 1.1.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 1.34 (A).

(B) Podać przykład przekształcenia ciągłego z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$ na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_k))$ oraz przykład przekształcenia ciągłego z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_k))$ na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$.

1.37. ♠ Niech $(X_1 \times \ldots \times X_n, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $(X_i, \mathcal{T}_i)$ i niech $p_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ będzie rzutowaniem.

(A) Wykazać, że dla każdego zbioru otwartego U w iloczynie, zbiór $p_i(U)$ jest otwarty w X_i.

(B) Podać przykład zbioru domkniętego na płaszczyźnie euklidesowej, którego rzut na oś x-ów nie jest domknięty.

1.38. ♠ Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Niech $A \subset X$, $B \subset Y$.

(A) Wykazać, że $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(B) Wykazać, że $(A \times B)^d = (A^d \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B^d)$, gdzie operacja d została określona w Zadaniu 1.24.

1.39. (A) Pokazać, że iloczyn topologiczny okręgu i prostej jest homeomorficzny z płaszczyzną bez punktu.

(B) Wykazać, że iloczyn topologiczny dwóch okręgów jest homeomorficzny z torusem, tzn. powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ otrzymaną przez obrót wokół osi z okręgu w płaszczyźnie xz nie przecinającego tej osi.

1.40. Wykazać, że dla przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ następujące warunki są równoważne:

(i) $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią Hausdorffa,

(ii) przekątna $\Delta = \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$ jest zbiorem domkniętym w kwadracie kartezjańskim przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$,

1.41. ♠ Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i rozpatrzmy wykres $W(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ przekształcenia f jako podprzestrzeń iloczynu kartezjańskiego $(X \times Y, \mathcal{T})$ przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(A) Wykazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorficzna z $W(f)$.

(B) Wykazać, że jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa, to $W(f)$ jest domkniętym podzbiorem $(X \times Y, \mathcal{T})$.

1.42. Niech U będzie zbiorem otwartym w przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że zbiór U jest homeomorficzny z domkniętą podprzestrzenią iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ i prostej euklidesowej.

Wskazówka. Rozpatrzyć wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{d_{X \setminus U}(x)}$, dla $x \in U$, zob. formułę (1) w części 1.6.

1.43. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że zbiór $E(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant t\}$ jest domknięty w iloczynie kartezjańskim $(X, \mathcal{T})$ i prostej euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest półciągła z dołu.

1.44. Niech $f : A \to [1,2]$ będzie funkcją ciągłą na domkniętej podprzestrzeni przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że (zob. formułę 1.6 (1))

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \inf_{a\in A} \frac{f(a)\cdot d(x,a)}{d_A(x)}, & \text{jeśli } x \in X \setminus A, \\ f(x), & \text{jeśli } x \in A, \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą $\overline{f} : X \to [1,2]$, przedłużającą funkcję f.

Wskazówka. Niech $h_E(x) = \inf_{a\in E}(f(a)d(x,a))$, $E \subset A$. Dla ustalonego $p \in A$ i $\varepsilon > 0$ wybrać $r > 0$ tak, żeby $|f(a) - f(p)| \leqslant \varepsilon$ jeśli $a \in A \cap B(p,r) = C$. Zauważyć, że dla $x \in B(p, r/4)$, $h_{A\setminus C}(x) \geqslant 3r/4$, oraz $f(p)d(x,p) \leqslant r/2$, a więc $h_A(x) = h_C(x)$. Wywnioskowac stąd, że dla $x \in B(p, r/4) \setminus A$, mamy $(f(p) - \varepsilon)d_A(x) \leqslant h_A(x) = h_C(x) \leqslant (f(p) + \varepsilon)d_A(x)$, a zatem, ponieważ $h_A(x) = \overline{f}(x)d_A(x)$, $|\overline{f}(x) - \overline{f}(p)| \leqslant \varepsilon$. Ciągłość $\overline{f}$ w punktach $X \setminus A$ wyprowadzić z ciągłości h_A na $X \setminus A$. Szczegółowe uzasadnienie można znaleźć w książce J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, dowód Twierdzenia 4.5.1.

1.45. Niech $g : X \to [0,1]$ będzie funkcją półciągłą z dołu na przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że istnieją funkcje ciągłe $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ na X takie, że $g(x) = \lim_n f_n(x)$, dla $x \in X$.

Wskazówka. Zauważyć, że jeśli c_i jest funkcją charakterystyczną zbioru $U_i = \{x : g(x) > \frac{i}{n}\}$, to $g - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}(c_1 + \ldots + c_{n-1}) \leqslant g$ i sprawdzić, że c_i jest punktową granicą niemalejącego ciągu funkcji ciągłych $f_{im}(x) = \min(m \cdot d_{X\setminus U_i}(x), 1)$, zob. formułę (1) w części 1.6.

1.46. Dla funkcji ograniczonej $f : X \to \mathbb{R}$ określonej na przestrzeni metrycznej (X, d) przyjmijmy

$\check{f} = \lim_n \sup\{f(y) : y \in B(x, \frac{1}{n})\}$, $\quad \hat{f} = \lim_n \inf\{f(y) : y \in B(x, \frac{1}{n})\}$.

(A) Pokazać, że funkcja $\check{f}$ jest półciągła z góry, a funkcja $\hat{f}$ jest półciągła z dołu.

(B) Niech $g, h : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi na przestrzeni metrycznej (X, d) takimi, że $g \leqslant h$. Wykazać, że następujace warunki są równoważne:

(i) $\check{g} \leqslant \hat{h}$,

(ii) istnieje funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że $g \leqslant f \leqslant h$,

(iii) dla każdej pary liczb $a < b$, zbiory $\{x : g(x) > b\}$ i $\{x : h(x) < a\}$ mają rozłączne domknięcia.

1.47. W kwadracie leksykograficznym $(I^2, \mathcal{T}(<))$, zob. Przykład 1.2.8, znaleźć domknięcie i wnętrze każdego z następujących zbiorów:

$A = \{(x,0) : x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$, $B = \{(x,1) : x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$,

$C = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q} \cap (0,1), y \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$.

1.48. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(A) Pokazać, że funkcja f jest ciągła jako przekształcenie z $\mathbb{R}$ z topologią strzałki, zob. Przykład 1.2.10, w prostą euklidesową wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, dla $a \in \mathbb{R}$.

(B) Pokazać, że istnieje funkcja $g : I^2 \to \mathbb{R}$ ciągła w topologii kwadratu leksykograficznego taka, że $g(t,0) = f(t)$ dla $t \in (0,1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in (0,1]$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ i dla każdego $a \in [0,1)$ istnieje $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

1.49. Pokazać, że topologia strzałki w $\mathbb{R}$, zob. Przykład 1.2.10, nie ma przeliczalnej bazy. Z Twierdzenia 1.7.2 wywnioskować, że strzałka nie jest metryzowalna.

1.50. (A) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną ośrodkową. Pokazać, że X nie zawiera nieprzeliczalnego podzbioru A takiego, że $A \cap A^d = \emptyset$ (zob. Zadanie 1.25).

(B) Wykazać, że płaszczyzna euklidesowa nie jest homeomorficzna z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$ z Zadania 1.2 ani z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_k))$ z Zadania 1.1.

(C) Pokazać, że w (A) istotne jest założenie, że topologia X jest wyznaczona przez metrykę.

Wskazówka. Rozpatrzyć podzbiór $A = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$ w płaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rozpatrywanej z topologia kwadratu strzałki, zob. Przykład 1.2.10.

1.51. (A) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną ośrodkową. Pokazać, że dla każdej rodziny $\mathcal{U}$ zbiorów otwartych w (X, d) istnieje rodzina przeliczalna $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ taka, że $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.

Wskazówka. Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ będzie zbiorem gęstym. Dla każdej pary liczb naturalnych (n, m) wybrać, jeśli to możliwe, zbiór $U(n, m) \in \mathcal{U}$ taki, że $B(a_n, \frac{1}{m}) \subset U(n, m)$, w przeciwnym razie, niech $U(n, m) = \emptyset$. Przyjąć $\mathcal{V} = \{U(n, m) : U(n, m) \neq \emptyset, n, m = 1, 2, \ldots\}$.

(B) Pokazać, że własność z punktu (A) jest mocniejsza niż własność z punktu (A) poprzedniego zadania. Wywnioskować, że w (A) istotne jest założenie, że topologia X jest wyznaczona przez metrykę.

1.52. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną ośrodkową i niech $f : X \to \mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli dla każdego zbioru F domkniętego w (X, d) istnieje zbiór U otwarty w (X, d) taki, że $U \cap F \neq \emptyset$ i obcięcie f do $U \cap F$ jest ciągłe, to X jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych $F_1, F_2, \ldots$ takich, że obcięcie $f|F_n : F_n \to \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $n = 1, 2, \ldots$.

Wskazówka. Rozpatrzyć rodzinę $\mathcal{F}$ zbiorów domkniętych w (X, d) takich, że obcięcie $f|F : F \to \mathbb{R}$ jest ciągłe i rodzinę $\mathcal{U}$ zbiorów otwartych w (X, d), które są sumami przeliczalnie wielu elementów $\mathcal{F}$. Pokazać, że $\bigcup \mathcal{U} = X$ i skorzystać z Zadania 1.51 (A).

1.53. Niech $\mathcal{T}(d_e)$ będzie topologią prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, d_e)$ i niech $\mathcal{T} = \{U \setminus A : U \in \mathcal{T}(d_e), A - \text{przeliczalny}\}$.

(A) Pokazać, że $\mathcal{T}$ jest topologią w $\mathbb{R}$ i przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ jest Hausdorffa.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 1.51 (A).

(B) Pokazać, że jedynymi ciągami zbieżnymi w $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ są ciągi prawie stałe, ale żaden punkt w tej przestrzeni nie jest izolowany, zob. Zadania 1.26 i 1.11.

1.54. Dla przestrzeni metrycznej (X, d), $d \leqslant 1$, niech $(K(X), d_{sup})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji $f : X \to [0, \infty)$ spełniających warunek

$(*)$ $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y) \leqslant f(x) + f(y)$

z metryką supremum $d_{sup}(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$.

(A) Pokazać, że dla każdego $a \in X$, funkcja $f_a(x) = d(a, x)$ należy do $K(X)$ i $d(a, b) = d_{sup}(f_a, f_b)$ dla $a, b \in X$.

(B) Wykazać, że przestrzeń $(K(X), d_{sup})$ ma następującą własność: dla każdego $Y \subset X$ i funkcji $f : Y \to [0, \infty)$ spełniającej warunek $(*)$ istnieje $g \in K(X)$ takie, że $f(a) = d_{sup}(f_a, g)$, dla $a \in Y$.

Wskazówka. Pokazać, że funkcja $g(x) = \inf\{d(x, y) + f(y) : y \in Y\}$ należy do $K(X)$.

2. Zwartość.

2.1. ♠ Niech $I(a, b)$ będzie odcinkiem domkniętym na płaszczyźnie łączącym punkty a, b. Które z następujących zbiorów na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ są zwarte:

a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(a_0, a_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I(b_0, b_n)$, gdzie $a_0 = (0, 1)$, $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$, $b_0 = (0, -1)$ i $b_n = (-\frac{1}{n}, 0)$,

b) $Y = X \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$, c) $Z = X \cup (\{0\} \times [-1, 1])$?

2.2. ♠ (A) Wykazać, że w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$ opisanej w Zadaniu 1.1, zbiór K jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i leży w sumie przeliczalnie wielu odcinków wychodzących z $\mathbf{0}$, których długości dążą do zera.

Wskazówka. Pokazać, że jeśli K jest zbiorem zwartym, to dla $n \geqslant 1$ istnieje skończona rodzina $\mathcal{I}_n$ odcinków wychodzących z $\mathbf{0}$ pokrywająca $K \setminus B(\mathbf{0}, 1/n)$ taka, że $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_{n+1}$ i odcinki z $\mathcal{I}_{n+1} \setminus \mathcal{I}_n$ mają długość nie większą niż $1/n$.

(B) Wykazać, że w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ opisanej w Zadaniu 1.2, zbiór K jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i leży w pewnym zbiorze $[a, b] \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \times [-t_n, t_n]$, gdzie $s_n \in [a, b]$, oraz $t_n \to 0$.

Wskazówka. We wskazówce do (A) zastąpić kulę $B(\mathbf{0}, 1/n)$ przez prostokąt $P_n = [a, b] \times (-1/n, 1/n)$. Dowodząc zwartości K wykazać najpierw, że każdy zbiór otwarty w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ zawierający odcinek $[a, b] \times \{0\}$ zawiera pewien prostokąt P_n.

2.3. ♠ Dla $A \subset (0, +\infty)$, niech $X(A)$ będzie sumą odcinków domkniętych na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ łączących punkt $(-1, 0)$ z punktami $(a, \frac{1}{a})$, $a \in A$. Wykazać, że domkniętość zbioru $X(A)$ na płaszczyźnie jest równoważna zwartości zbioru A i jest równoważna zwartości zbioru $X(A)$.

2.4. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $T \subset [0, 1]$ będą zbiorami zwartymi na prostej euklidesowej. Pokazać, że zbiór $C = \{ta + (1 - t)b : \ a, b \in A, \ t \in T\}$ jest zwarty.

2.5. ♠ Niech $O(a, b)$ będzie okręgiem na płaszczyźnie, którego średnicą jest odcinek o końcach $a, b \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Dla $A \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ przyjmijmy $O(A) = A \cup \bigcup \{O(a, b) : a, b \in A, a \neq b\}$. Wykazać, że $O(A)$ jest zbiorem zwartym na płaszczyźnie euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zwarte.

2.6. ♠ Niech $S(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_e(a, x) = t\}$ będzie sferą w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ o środku w a i promieniu t. Dla $A \subset \mathbb{R}^n$ i $r : A \to (0, +\infty)$, przyjmijmy $S(A) = \bigcup \{S(a, r(a)) : a \in A\}$. Wykazać, że jeśli A jest zbiorem zwartym i r jest funkcją ciągłą, to $S(A)$ jest zbiorem zwartym w $(\mathbb{R}^n, d_e)$.

2.7. (A) Wykazać, że w przestrzeni funkcyjnej $(C[0, 1], d_{sup})$ opisanej w Zadaniu 1.6, każda kula o promieniu r zawiera zbiór nieskończony, którego każde dwa punkty są odległe o $\frac{r}{2}$.

(B) Wykazać, że w przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ zbiory zwarte mają puste wnętrze.

2.8. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zwartą. Wykazać, że każde przekształcenie $T : X \to X$ zachowujące odległość między punktami przeprowadza X na siebie.

Wskazówka. Założyć, że istnieje $a \notin T(X)$ i rozpatrzyć ciąg $a, T(a), T^2(a), \ldots$.

2.9. ♠ Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Odstęp między rozłącznymi zbiorami $A, B \subset X$ określamy formułą $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

(A) Pokazać, że jeśli A jest domknięty w X, a B zwarty i rozłączny z A, to $\mathrm{dist}(A, B) > 0$.

(B) Znaleźć dwa rozłączne domknięte podzbiory A, B płaszczyzny euklidesowej takie, że $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

2.10. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych. Wykazać równoważność następujących warunków:

(i) (X, d) jest przestrzenią zwartą,

(ii) dla każdego pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi w (X, d) istnieje $\delta > 0$ takie, że każda kula $B(a, \delta)$ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$,

(iii) każda funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na (X, d),

(iv) odstęp między każdą parą rozłącznych zbiorów domkniętych A, B w (X, d) jest dodatni, zob. Zadanie 2.9.

2.11. Niech $\mathcal{H}$ będzie rodziną wszystkich niepustych zbiorów domkniętych w odcinku $[0, 1]$ z metryką euklidesową. Odległość między $A, B \in \mathcal{H}$ określamy formułą (zob. (1) w 1.6)

$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\ \sup\{d_A(x) : x \in B\},\ \sup\{d_B(x) : x \in A\}\}$.

(A) Sprawdzić, że $d_{\mathcal{H}}$ jest metryką na $\mathcal{H}$.

(B) Pokazać, że przestrzeń $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ jest zwarta.

<u>Wskazówka.</u> Niech $A_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2, \ldots$ Dla każdego j oraz n, niech $F(j, n)$ będzie sumą przedziałów $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ przecinających A_j. Wybrać indukcyjnie zbiory $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ tak, żeby $F_n = F(j, n)$ dla nieskończenie wielu j i pokazać, że $\bigcap_n F_n$ jest punktem skupienia ciągu $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ w $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$.

2.12. ♠ Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$ będą przekształceniami ciągłymi zwartej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w prostą euklidesową. Wykazać, że suma odcinków domkniętych I_x w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, d_e)$ o końcach w punktach $(\cos(f(x)), \sin(f(x)), 0)$ i $(0, 0, g(x))$, $x \in X$, jest zbiorem zwartym.

2.13. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym i $f : U \to [0, 1]$ funkcją ciągłą. Pokazać, że zbiór $\{(x, t) : x \in U \text{ i } t \leqslant f(x)\} \cup (X \setminus U) \times [0, 1]$ jest zwarty w iloczynie kartezjańskim przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ i odcinka euklidesowego.

2.14. ♠ Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ i przestrzeni zwartej $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wykazać, że rzut zbioru domkniętego w iloczynie $X \times Y$ na X jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$ (twierdzenie Kuratowskiego).

2.15. ♠ Niech $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ będzie ciągiem funkcji ciągłych $f_i : X \to [0, +\infty)$ na przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T})$, zbieżnym punktowo do zera, $f_i(x) \to 0$, dla $x \in X$. Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje k takie, że $f_k(x) < \varepsilon$, dla $x \in X$ (twierdzenie Diniego).

<u>Wskazówka.</u> Zauważyć, że zbiory $f_i^{-1}([0, \varepsilon))$, $i = 1, 2, \ldots$, pokrywają X.

2.16. ♠ Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią Hausdorffa.

(A) Wykazać, że suma skończenie wielu zbiorów zwartych w $(X, \mathcal{T})$ jest zbiorem zwartym.

(B) Niech $K_0, K_1, K_2, \ldots$ będą zbiorami zwartymi w $(X, \mathcal{T})$ takimi, że każdy zbiór otwarty zawierający K_0 zawiera prawie wszystkie zbiory K_n. Wykazać, że suma $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ jest zbiorem zwartym.

2.17. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją z przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i niech $W(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ będzie wykresem funkcji f.

(A) ♠ Wykazać, że jeśli przestrzeń X jest zwarta, to funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $W(f)$ jest zbiorem zwartym w iloczynie kartezjańskim $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 1.41.

(B) Wykazać, że jeśli przestrzeń Y jest zwarta, to funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $W(f)$ jest zbiorem domkniętym w iloczynie kartezjańskim $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 2.14.

2.18. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią Hausdorffa, a A i B jej zwartymi podzbiorami rozłącznymi. Wykazać, że istnieją rozłączne zbiory V i W otwarte w X takie, że $A \subset V$ i $B \subset W$.

Wskazówka. Dla jednopunktowego B zob. dowód 2.1.13. W ogólnym przypadku powtórzyć rozumowanie z tego dowodu zastępując punkt a zbiorem A.

2.19. Niech $(X, <)$ będzie przestrzenią uporządkowaną i niech $\mathcal{T}(<)$ będzie topologią wyznaczoną przez porządek $<$, zob. Przykład 1.2.8. Wykazać, że jeśli X ma element najmniejszy i największy, oraz każdy niepusty podzbiór X ma kres górny ze względu na $<$, to $(X, \mathcal{T}(<))$ jest przestrzenią zwartą.

Wskazówka. Niech $X(a) = \{x \in X : x \leqslant a\}$. Dla pokrycia $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(<)$ przestrzeni X rozpatrzyć $c = \sup \{a \in X : X(a)$ można pokryć skończenie wieloma elementami $\mathcal{U}\}$.

2.20. Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym, $a \in X$ i niech $\mathcal{T}_X$ będzie rodziną zbiorów $U \subset X$ takich, że $X \setminus U$ jest zbiorem skończonym, lub $a \notin U$.

(A) Wykazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta.

(B) Wykazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest przekształceniem ciągłym przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to istnieje ciągłe $g : Y \to X$ takie, że $f \circ g(y) = y$ dla $y \in Y$.

2.21. (A) Niech $X = [0, 1) \cup \{a_0, a_1\}$, gdzie $a_0 \neq a_1$ są punktami spoza przedziału $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ i niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną zbiorów postaci $(s, t) \cap [0, 1)$ lub $(t, 1) \cup \{a_i\}$, $s < t < 1, i = 0, 1$. Sprawdzić, że $\mathcal{B}$ jest bazą generującą pewną topologię $\mathcal{T}$ w X, z każdego otwartego pokrycia przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ można wybrać pokrycie skończone, ale przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nie jest Hausdorffa.

(B) Określić topologie $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ w X takie, że przestrzenie $(X, \mathcal{T}_i)$ są zwarte i metryzowalne, oraz $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ jest topologią określoną w (A).

2.22. Niech C będzie zbiorem Cantora na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ i niech $F \subset C$ będzie zbiorem domkniętym, $a = \inf F$, $b = \sup F$.

(A) Pokazać, że istnieją parami rozłączne nietrywialne przedziały $(a_i, b_i) \subset (a, b)$ takie, że $F = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i)$.

Wskazówka. Dla $x \in [a, b] \setminus F$, przyjąć $a_x = \inf\{r < x : [r, x] \cap F = \emptyset\}$, $b_x = \sup\{r > x : [x, r] \cap F = \emptyset\}$ i pokazać, że przedziały (a_x, b_x), (a_y, b_y) są albo identyczne, albo rozłączne.

(B) Pokazać, że istnieje ciągłe przekształcenie $r : C \to F$ takie, że $r(x) = x$ dla $x \in F$.

Wskazówka. Niech (a_i, b_i) będą przedziałami z (A), wybrać $c_i \in (a_i, b_i) \setminus C$ i dla $x \in (a_i, b_i) \cap C$ przyjąć $r(x) = a_i$, jeśli $x < c_i$, oraz $r(x) = b_i$, jeśli $x > c_i$.

2.23. Pokazać, że jeśli K jest zwartym podzbiorem prostej euklidesowej takim, że dla każdego przedziału otwartego (a,b), $(a,b) \setminus K \neq \emptyset$ i przecięcie $(a,b) \cap K$ jest albo puste, albo nieskończone, to zbiór K jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

2.24. Niech $(I^{\mathbb{N}}, d)$ będzie przestrzenią ciągów liczb z przedziału $[0,1]$ z metryką $d(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|t_i - s_i|$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, $s = (s_1, s_2, \ldots) \in I^{\mathbb{N}}$, zob. formułę (7) w części 2.3 i 1.5.2.

(A) Pokazać, że istnieje ciągłe przekształcenie zbioru Cantora na $I^{\mathbb{N}}$.

Wskazówka. Ustalić bijekcję $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i przyjąć $f(s_1, s_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots)$, gdzie $(s_1, s_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $u_i = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} s_{\varphi(i,j)}$.

(B) Pokazać, że dla każdego zbioru domkniętego X w $I^{\mathbb{N}}$, istnieje ciągłe przekształcenie zbioru Cantora na X.

Wskazówka. Skorzystać z (A) i Zadania 2.22 (B).

2.25. Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną.

(A) Pokazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}(d))$ jest ośrodkowa.

Wskazówka. Dla $n = 1, 2, \ldots$, niech $X = \bigcup\{B(a_{ni}, \frac{1}{n}) : i = 1, \ldots, i_n\}$. Wówczas $\{a_{ni} : n = 1, 2, \ldots,\ i \leqslant i_n\}$ jest zbiorem gęstym w X.

(B) Pokazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}(d))$ zanurza się w przestrzeń $(I^{\mathbb{N}}, d)$ opisaną w Zadaniu 2.24.

Wskazówka. Niech $\{a_1, a_2, \ldots\}$ będzie zbiorem gęstym w X. Przyjąć, że $\operatorname{diam} X \leqslant 1$ i sprawdzić, że $f(x) = (d(x, a_1), d(x, a_2), \ldots)$ jest zanurzeniem w $I^{\mathbb{N}}$.

(C) Pokazać, że istnieje ciągłe przekształcenie zbioru Cantora na X.

Wskazówka. Skorzystać z (B) i Zadania 2.24 (B).

2.26. Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Wykazać, że rodzina wszystkich podzbiorów X, które są jednocześnie otwarte i domknięte w X jest przeliczalna.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 2.25 (A) i z Przykładu 1.2.5.

2.27. (A) Wykazać, że dla każdej zwartej przestrzeni metrycznej (X, d), przestrzeń funkcji ciągłych $(C(X), d_{sup})$ zanurza się izometrycznie w przestrzeń funkcji ciągłych na zbiorze Cantora z metryką supremum.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 2.25 (C).

(B) Wykazać, że dla zwartej przestrzeni metrycznej (X, d), przestrzeń funkcji ciągłych $(C(X), d_{sup})$ jest ośrodkowa.

Wskazówka. Podać najpierw uzasadnienie w przypadku gdy X jest zbiorem Cantora, a następnie skorzystać z (A).

2.28. (A) Niech $F : K \to C(X)$ będzie ciągłym przekształceniem zwartej przestrzeni metryzowalnej K w przestrzeń funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej X z metryką supremum $d_{sup}(u, v) = ||u - v||_\infty$ i niech $\varepsilon > 0$. Wykazać, że istnieją $u_1, \ldots, u_m \in C(X)$ i ciągłe funkcje λ_j z K w $I = [0,1]$, $j = 1, \ldots, m$, takie, że $||F(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) u_j||_\infty < \varepsilon$ dla $x \in K$.

Wskazówka. Pokryć $F(K)$ kulami $B(u_j, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, m$, i rozpatrzyć rozkład jedynki $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ wpisany w pokrycie K zbiorami $F^{-1}(B(u_j, \varepsilon))$.

(B) Korzystając z (A) i twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłych na I wielomianami pokazać, że dla każdej funkcji ciągłej $\phi : I^n \to \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian rzeczywisty $w(t_1, \ldots, t_n)$ taki, że $||\phi - w||_\infty < \varepsilon$.

Wskazówka. Dowodzić przez indukcję. Dla $\phi : I^{n+1} \to \mathbb{R}$ rozpatrzyć funkcję $F : I^n \to C(I)$ określoną formułą $F(t_1, \ldots, t_n)(t_{n+1}) = \phi(t_1, \ldots, t_{n+1})$.

(C) Niech Z będzie zwartą przestrzenią metryzowalną i niech $f : Z \to I^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że dla funkcji ciągłej $\psi : Z \to \mathbb{R}$ postaci $\psi = \varphi \circ f$ i $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian rzeczywisty $w(t_1, \ldots, t_n)$ taki, że $||\psi - w(f_1, \ldots, f_n)||_\infty < \varepsilon$.

Wskazówka. Pokazać, że obcięcie $\varphi|f(Z) : f(Z) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, przedłużyć $\varphi|f(Z)$ do funkcji ciągłej $\phi : I^n \to \mathbb{R}$ i skorzystać z (B).

(D) Korzystając z (C) dla $Z = [0, 2\pi]$ i $f = (\cos\theta, \sin\theta) : Z \to S^1 \subset I^2$ pokazać, że każdą funkcję ciągłą na $\mathbb{R}$ o okresie 2π można przybliżać jednostajnie wielomianami trygonometrycznymi $w(\cos\theta, \sin\theta)$, gdzie $w(t_1, t_2)$ jest wielomianem rzeczywistym.

(E) Niech Z będzie zwartą przestrzenią metryzowalną i niech $f : Z \to I^{\mathbb{N}}$, $f = (f_1, f_2, \ldots)$, będzie funkcją ciągłą w przestrzeń $I^{\mathbb{N}}$ określoną w Zadaniu 2.24. Pokazać, że dla funkcji ciągłej $\psi : Z \to \mathbb{R}$ postaci $\psi = \varphi \circ f$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $n > 0$ i wielomian rzeczywisty $w(t_1, \ldots, t_n)$ taki, że $||\psi - w(f_1, \ldots, f_n)||_\infty < \varepsilon$.

Wskazówka. Z 1.5.2 $I^{\mathbb{N}} = I_1 \times I_2 \times, \ldots$ jest iloczynem przeliczalnie wielu odcinków. Zauważyć, że w otwarte w pokrycie zbioru $f(Z)$ można wpisać skończone pokrycie $f(Z)$ zbiorami z bazy $I^{\mathbb{N}}$ opisanej w 1.5.1, a następnie, postępując podobnie jak w (A), skonstruować funkcję ciągłą $\phi : I^n \to \mathbb{R}$ taką, że $||\psi - \phi(f_1, \ldots, f_n)||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Zupełność.

3.1. Zbadać, które z podzbiorów płaszczyzny opisanych w Zadaniu 2.1 są zupełne w metryce euklidesowej.

3.2. ♠ Wykazać, że przestrzenie metryczne opisane z Zadaniach 1.1 i 1.2 są zupełne.

3.3. Pokazać, że przestrzeń metryczna opisana w Przykładzie 1.1.7 (A) jest zupełna, a przestrzenie metryczne opisane w 1.1.7 (B) nie są zupełne.

3.4. Pokazać, że przestrzeń metryczna opisana w Zadaniu 1.8 jest zupełna, a przestrzenie metryczne opisane w Zadaniach 1.7 i 1.9 nie są zupełne.

3.5. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $A \subset X$, niech (A, d) będzie przestrzenią A z metryką d obciętą do A. Wykazać, że jeśli $Y_i \subset X$, $\operatorname{diam} Y_i \to 0$, $Y_i \cap Y_0 \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$, oraz przestrzenie (Y_i, d), $i = 0, 1, 2, \ldots$ są zupełne, to przestrzeń $(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i, d)$ też jest zupełna.

3.6. ♠ Wykazać, że każda niepusta, przeliczalna, zupełna przestrzeń metryczna ma punkt izolowany (zob. Zadanie 1.11).

3.7. Wykazać, że jeśli domknięcie niepustego zbioru A w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) jest przeliczalne, to $A \setminus A^d \neq \emptyset$ (zob. Zadanie 1.24).

3.8. ♠ Wykazać, że zbiór liczb niewymiernych nie jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych na prostej euklidesowej.

3.9. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, $f : Y \to \mathbb{R}$ funkcją określoną na podprzestrzeni $Y \subset X$ i $d_f(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$. Pokazać, że przestrzeń metryczna (Y, d_f) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy wykres f jest domknięty w iloczynie kartezjańskim $X \times \mathbb{R}$ przestrzeni X i prostej euklidesowej.

3.10. ♠ Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny, jeśli istnieje metryka d generująca topologię $\mathcal{T}$ taka, że przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna.

(A) Zauważyć, że przestrzeń X jest metryzowalna w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z przestrzenią metryczną zupełną.

(B) Wykazać, że przestrzeń liczb wymiernych z topologią euklidesową nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

(C) Wykazać, że jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny i A jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T})$, to podprzestrzeń $(A, \mathcal{T}_A)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny.

(D) Które z następujących podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej są metryzowalne w sposób zupełny?

a) $X_1 = Q \times R$, gdzie Q oznacza zbiór liczb wymiernych,
b) $X_2 = Q \times (R \setminus Q)$,
c) $X_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{1/n\} \times [0, 1/n])$,
d) $X_4 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \neq 0\}$,
e) $X_5 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,
f) $X_6 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in Q\}$.

3.11. (A) Wykazać, że jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny i U jest zbiorem otwartym w $(X, \mathcal{T})$, to podprzestrzeń $(U, \mathcal{T}_U)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny.

<u>Wskazówka.</u> Zob. Zadanie 1.42.

(B) Niech $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ będą zbiorami otwartymi w przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że dla $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ podprzestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna w sposób zupełny (zob. Zadanie 3.12).

Wskazówka. Dla każdego n ustalić, korzystając z (A), metrykę zupełną d_n na U_n generującą topologię w U_n i rozpatrzyć na Y metrykę
$d_Y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(d_n(x, y), 1)$.

3.12. Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że jeśli Y jest metryzowalna w sposób zupełny, to istnieją zbiory $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ otwarte w X takie, że $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Wskazówka. Ustalić metrykę d_Y generującą topologię Y i taką, że (Y, d_Y) jest przestrzenią zupełną. Dla $n \geqslant 1$ przyjąć jako U_n sumę wszystkich otwartych w X zbiorów U takich, że $\operatorname{diam} U < \frac{1}{n}$ w (X, d) i $\operatorname{diam}(U \cap Y) < \frac{1}{n}$ w (Y, d_Y).

3.13. ♠ Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem przeliczalnym w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ i niech $F_k \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami domkniętymi, brzegowymi na prostej euklidesowej. Wykazać, że istnieje punkt $c \in \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego $a \in A$, $d_e(c, a) \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

3.14. ♠ Niech $F \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym, brzegowym na prostej euklidesowej. Pokazać, że istnieje punkt (a, b) na okręgu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ taki, że dla każdej liczby wymiernej q i $c \in F$, $b \neq qa + c$.

3.15. (A) Niech K będzie podzbiorem domkniętym o pustym wnętrzu na prostej euklidesowej. Wykazać, że istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że zbiór $\{t + x : x \in K\}$ jest zawarty w zbiorze liczb niewymiernych.

(B) Niech $\{F_1, F_2, \dots\}$ będą zbiorami domkniętymi o pustym wnętrzu na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ i niech zbiór $A \subset \mathbb{R}$ będzie przeliczalny. Wykazać, że istnieje liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że zbiór $\bigcup_i F_i$ jest rozłączny ze zbiorem $\{t + a : a \in A\}$

3.16. Wykazać, że dla przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) następujące warunki są równoważne:

(i) X jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych w (X, d),

(ii) przestrzeń (X, d) jest ośrodkowa i każdy zbiór F domknięty w (X, d) zawiera podzbiór zwarty, mający w przestrzeni (F, d) niepuste wnętrze.

Wskazówka. Skorzystać z Zadań 2.25 (A) i 1.51 (A) (zob. wskazówka do Zadania 1.52).

3.17. Niech $A \subset (0, 1)$ będzie zbiorem takim, że zarówno A jak i $[0, 1] \setminus A$ są przeliczalnymi sumami zbiorów domkniętych w $[0, 1]$ i dla każdego $a \in A$ oraz $\varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a) \cap A \neq \emptyset \neq (a, a + \varepsilon) \cap A$. Wykazać, że A ma niepuste wnętrze.

Wskazówka. Korzystając z twierdzenia Baire'a dla podprzestrzeni $X = \overline{A}$ odcinka $[0, 1]$ znaleźć $c < d$ w $(0, 1)$ takie, że $\emptyset \neq (c, d) \cap \overline{A} \subset A$, a następnie pokazać, że $(c, d) \subset A$.

3.18. Niech F będzie zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$. Wykazać, że istnieją zbiory gęste A, B na prostej euklidesowej takie, że $(A \times B) \cap F = \emptyset$.

Wskazówka. Dla każdej pary liczb wymiernych $a < b$ wykazać, że zbiór $K(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \{x\} \times [a, b] \subset F\}$ jest domknięty, brzegowy i wybrać przeliczalny zbiór A gęsty w $\mathbb{R}$, rozłączny z każdym takim zbiorem $K(a, b)$. Następnie wybrać przeliczalny zbiór B gęsty w $\mathbb{R}$, rozłączny z każdym zbiorem $\{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in F\}$, gdzie $a \in A$.

3.19. Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych określonych na zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) zbieżnym punktowo do $f : X \to \mathbb{R}$, tzn. $f_n(x) \to f(x)$ dla $x \in X$.

(A) Wykazać, że dla $a < b$ zbiór $f^{-1}((a,b)) \setminus \mathrm{Int} f^{-1}((a,b))$ jest sumą przeliczalnie wielu domkniętych zbiorów brzegowych.

Wskazówka. Sprawdzić, że $f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n,m} \bigcap_{k \geqslant m} f_k^{-1}([a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}])$, a więc $f^{-1}((a,b))$jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych.

(B) Wykazać, że zbiór punktów ciągłości funkcji f jest gęsty w przestrzeni (X,d) (twierdzenie Baire'a).

Wskazówka. Wyrzucić z X, dla wszystkich par liczb wymiernych $a < b$, zbiory brzegowe opisane w (A).

(C) Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n i niepusty zbiór otwarty V w X taki, że $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ dla $x \in V$ i $m > n$.

Wskazówka. Korzystając z (B) wybrać $a \in X$ i $r > 0$ takie, że $|f(a) - f(x)| < \varepsilon/3$ dla $x \in B(a,r)$. Założyć, że teza nie jest prawdziwa i wybrać ciąg kul $B(a, r/2) \supset B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2) \supset \ldots$, oraz indeksów $n_1 < n_2 < \ldots$ takich, że $|f(a_i) - f_{n_i}(a_i)| \geqslant \varepsilon$, $|f_{n_i}(a_i) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon/3$ dla $x \in B(a_i, r_i)$, oraz $r_i \to 0$.

3.20. Pokazać, że w Zadaniu 3.19 (B) i (C) założenie zupełności (X,d) jest istotne.

Wskazówka. Przyjąć jako (X,d) przestrzeń liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z metryką euklidesową. Rozpatrując (C), ustawić liczby wymierne w ciąg $q_1, q_2, \ldots$, ustalić bazę $B_1, B_2, \ldots$ w przestrzeni $\mathbb{Q}$ i określić funkcje ciągłe $f_n : \mathbb{Q} \to \{0,1\}$ tak, aby $f_n(q_i) = 0$ oraz $f_n^{-1}(1) \cap B_i \neq \emptyset$ dla $i \leqslant n$.

3.21. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą ze względu na każdą zmienną osobno, zob. Zadanie 1.31. Wykazać, że istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $b \in \mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła w punkcie (a,b) ze względu na obie zmienne jednocześnie (twierdzenie Baire'a).

Wskazówka. Ustawić w ciąg $I_1, I_2, \ldots$ przedziały otwarte w $\mathbb{R}$ o końcach wymiernych i zauważyć, że zbiory $E(i,j) = \{x \in \mathbb{R} : \ |f(x,u) - f(x,w)| \leqslant \frac{1}{j}$, dla $u, w \in I_i\}$ są domknięte, oraz $\bigcup_i E(i,j) \times I_i = \mathbb{R}^2$, dla $j = 1, 2, \ldots$. Pokazać, że każdy punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i,j}(E(i,j) \setminus \mathrm{Int}E(i,j))$ ma żądane własności.

3.22. (A) Niech $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną określoną w Zadaniu 1.12. Wykazać, że domknięcie $\overline{U}$ dowolnego niepustego zbioru $U \in \mathcal{T}$ zawiera pewną kulę euklidesową.

(B) Wywnioskować z (A), że jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ciągła ze względu na każdą zmienną osobno jest stała na gęstym podzbiorze płaszczyzny euklidesowej, to f jest funkcją stałą, zob. Zadanie 1.31.

3.23. W przestrzeni Hilberta (l_2, d_h), niech $A_n = \{(x_1, x_2, \ldots) : |x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+l}| \leqslant 1$ dla $k \geqslant n,\ l = 1, 2, \ldots\}$. Pokazać, że zbiory A_n są domknięte i brzegowe w przestrzeni Hilberta i wykazać, że dla każdego ciągu U_n zbiorów otwartych, gęstych w przestrzeni Hilberta istnieje punkt $(x_1, x_2, \ldots) \in \bigcap_n U_n$ taki, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest rozbieżny.

3.24. Wykazać, że zbiór funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, które nie są monotoniczne na żadnym nietrywialnym przedziale jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych $(C[0,1], d_{sup})$.

Wskazówka. Ustawić wszystkie nietrywialne przedziały w $\mathbb{R}$ o końcach wymiernych w ciąg $I_1, I_2, \ldots$ i wykazać, że zbiór M_n funkcji ciągłych na $[0,1]$, które są albo niemalejące, albo nierosnące na I_n, jest domknięty i ma puste wnętrze w przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$.

3.25. ♠ Wykazać, że przekształcenie $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prostej euklidesowej w siebie określone formułą $T(x) = \ln(1 + e^x)$ spełnia warunek $|T(x) - T(y)| < |x - y|$, dla $x \neq y$, ale nie ma punktu stałego.

3.26. Niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem zwężającym przestrzeni metrycznej (X, d) i niech $A_n = \{x \in X : d(x, T(x)) \leqslant 1/n\}$, dla $n \geqslant 1$.

(A) Wykazać, ze zbiory A_n są niepuste i ich średnice dążą do zera.

Wskazówka. Pokazać najpierw, że $\inf\{d(x, T(x)) : x \in X\} = 0$.

(B) Wyprowadzić z (A) twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Wskazówka. Dla $n \geqslant 1$ wybrać $y_n \in A_n$ i pokazać, że jeśli (X, d) jest zupełna, to ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega zbiega do punktu stałego przekształcenia T.

3.27. ♠ Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną, $B = B(x_0, r)$ kulą w X i niech $T : B \to B$ spełnia warunek $d(T(x), T(y)) \leqslant \frac{1}{2} d(x, y)$, dla $x, y \in B$. Pokazać, że jeśli $d(T(x_0), x_0) < \frac{r}{2}$, to istnieje $u \in B$ takie, że $T(u) = u$.

Wskazówka. Dla $D = \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant 2d(T(x_0), x_0)\} \subset B$ pokazać, że $T(D) \subset D$.

3.28. ♠ Niech (X, d) będzie przestrzenią zupełną i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem rozszerzającym, tzn. dla pewnego $e > 1$, $d(T(x), T(y)) \geqslant e \cdot d(x, y)$. Wykazać, że jeśli $T(X) = X$, to T ma dokładnie jeden punkt stały.

3.29. Wykazać, że jeśli w układzie równań

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik} x_k) + b_i, \qquad\qquad i = 1, \dots, n$$

stałe c_{ik} spełniają warunek $\sum_{i,k} c_{ik}^2 < 1$, to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Wskazówka. Niech $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie określone formułą $T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik} x_k) + b_i$. Sprawdzić, że przekształcenie T przestrzeni euklidesowej w siebie spełnia założenia twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym.

3.30. Niech $(C[0,1], d_{sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z metryką supremum, niech $M = \{f \in C[0,1] : 0 = f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1) = 1, \text{ dla } t \in [0,1]\}$. Pokazać, że przestrzeń (M, d_{sup}), z metryką d_{sup} obciętą do M, jest zupełna, oraz przekształcenie $T : M \to M$ określone formułą $T(f)(t) = t \cdot f(t)$ spełnia warunek $d_{sup}(T(f), T(g)) < d_{sup}(f, g)$, dla $f \neq g$, ale T nie ma punktów stałych.

3.31. Niech K będzie domkniętym, wypukłym i ograniczonym zbiorem w przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$ zawierającym funkcję tożsamościowo równą zeru. Wykazać, że jeśli $T : K \to K$ spełnia warunek $d_{sup}(T(f), T(g)) < d_{sup}(f, g)$, dla $f \neq g$, to $\inf\{d_{sup}(f, T(f)) : f \in K\} = 0$.

Wskazówka. Zauważyć, że dla $c \in (0,1)$ przekształcenie $T_c : K \to K$ określone formułą $T_c(f) = c\, T(f)$ jest zwężające i punkt stały f_c dla T_c spełnia warunek $d_{sup}(f_c, T(f_c)) \leqslant (1 - c)\mathrm{diam} K$.

3.32. Niech $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ będzie przestrzenią niepustych domkniętych podzbiorów odcinka $[0,1]$ z metryką euklidesową, określoną w Zadaniu 2.11. Niech $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ i niech $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie określone formułą $T(A) = f(A) \cup g(A)$.

(A) Wykazać, że $d_{\mathcal{H}}(T(A), T(B)) \leqslant \frac{1}{3} d_{\mathcal{H}}(A, B)$, dla $A, B \in \mathcal{H}$.

(B) Wykazać, że punkt stały C przekształcenia T jest zbiorem Cantora złożonym z liczb postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{3^n}$, gdzie $u_n \in \{0, 2\}$.

3.33. Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną. Wykazać, że jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ są niepustymi zbiorami domkniętymi i A_n jest sumą skończenie wielu zbiorów o średnicach $\leqslant \frac{1}{n}$, to przecięcie $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ jest niepuste i zwarte.

<u>Wskazówka.</u> Dowodząc, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, określić ciąg zbiorów domkniętych $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ taki, że $F_n \subset A_n$, $\operatorname{diam} F_n \leqslant \frac{1}{n}$ i F_n przecina każdy zbiór A_i, $i = 1, 2, \ldots$

3.34. (A) Wykazać, że w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$ opisanej w Zadaniu 1.1, zbiór K jest całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy leży w sumie przeliczalnie wielu odcinków wychodzących z $\mathbf{0}$, których długości dążą do zera (zob. Zadania 2.2 i 3.2).

(B) Wykazać, że w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ opisanej w Zadaniu 1.2, zbiór K jest całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy leży w pewnym zbiorze $[a,b] \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \times [-t_n, t_n]$, gdzie $s_n \in [a,b]$, oraz $t_n \to 0$.

3.35. Wykazać, że zbiory zwarte w przestrzeni Hilberta (l_2, d_h) mają puste wnętrze (zob. Zadanie 2.7).

3.36. (A) Wykazać, że kostka Hilberta $H = \{(x_1, x_2, \ldots) \in l_2 : x_i \in [-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}]\}$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni Hilberta (l_2, d_h).

(B) Wykazać, że kostka Hilberta H jest homeomorficzna z przestrzenią $I^{\mathbb{N}}$ opisaną w Zadaniu 2.24.

3.37. (A) Pokazać, że każda przestrzeń metryczna całkowicie ograniczona jest ośrodkowa.

<u>Wskazówka.</u> Skorzystać ze wskazówki do Zadania 2.25 (A)

(B) Pokazać, że każda ośrodkowa przestrzeń metryzowalna X ma metrykę d generującą topologię w X i taką, że przestrzeń (X,d) jest całkowicie ograniczona oraz $\operatorname{diam} X \leqslant 1$.

<u>Wskazówka.</u> Korzystając ze wskazówki do Zadania 2.25 (B) skonstruować zanurzenie X w przestrzeń $(I^{\mathbb{N}}, d)$ opisaną w Zadaniu 2.24.

3.38. Niech $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ będzie iloczynem kartezjańskim przeliczalnie wielu prostych z metryką $d(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min(|t_i - s_i|, 1)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, $s = (s_1, s_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, zob. 1.5.2 i Zadanie 2.24. Pokazać, że każda ośrodkowa przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny jest homeomorficzna z domkniętą podprzestrzenią $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$.

<u>Wskazówka.</u> Korzystając ze wskazówki do Zadania 3.37 (B) założyć, że przestrzeń jest homeomorficzna z podprzestrzenią Y iloczynu $I^{\mathbb{N}}$. Z Zadania 3.12 wywnioskować, że Y jest przecięciem przeliczalnie wielu zbiorów U_i otwartych w $I^{\mathbb{N}}$ i rozważyć wykres funkcji $f : Y \to I^{\mathbb{N}}$ określonej wzorem $f = (f_1, f_2, \ldots)$, gdzie $f_i(y)$ jest odwrotnością odległości punktu y od zbioru domkniętego $I^{\mathbb{N}} \setminus U_i$, zob. wskazówka do Zadania 1.42.

3.39. Niech A będzie domkniętym podzbiorem ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej X i niech $f : A \to E$ będzie przekształceniem ciągłym, gdzie E jest przestrzenią funkcyjną $(C(I), d_{sup})$ lub przestrzenią Hilberta (l_2, d_h). Pokazać, że istnieje przedłużenie ciągłe $\overline{f} : X \to E$ funkcji f.

<u>Wskazówka.</u> Ustalić metrykę d na X taką jak w Zadaniu 3.37 (B). Dla $n \geqslant 0$ wybrać skończone pokrycie $\mathcal{U}_n$ pierścienia $P_n = \left\{x \in X : d_A(x) \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}})\right\}$ zbiorami otwartymi o średnicy $< \frac{1}{2^{n+1}}$ i dla każdego $U \in \mathcal{U}_n$, punkt $a_{n,U} \in A$ taki, że $d_U(a_{n,U}) < \frac{1}{2^{n-1}}$. Zauważyć, że każdy punkt $x \notin A$ ma otoczenie przecinające tylko skończenie wiele pierścieni P_n, więc funkcja $\sigma = \sum_n \sum_{U \in \mathcal{U}_n} d_{X \setminus U}$ jest ciągła na $X \setminus A$. Przedłużyć f na X przyjmując dla $x \notin A$, $\lambda_{n,U}(x) = \frac{d_{X \setminus U}(x)}{\sigma(x)}$ oraz $\overline{f}(x) = \sum_n \sum_{U \in \mathcal{U}_n} \lambda_{n,U}(x) f(a_{n,U}) \in E$ i udowodnić ciągłość $\overline{f}$ w punktach $x \in A$.

3.40. Niech $f : A \to Y$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą, określoną na podzbiorze A przestrzeni metrycznej (X, d_X) i przyjmującą wartości w zupełnej przestrzeni metrycznej (Y, d_Y). Wykazać, że funkcję f można przedłużyć do funkcji jednostajnie ciągłej $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ na domknięcie zbioru A.

3.41. Niech $U \subset \mathbb{R}$ będzie sumą skończenie wielu przedziałów otwartych i ograniczonych na prostej euklidesowej. Wykazać, że zbiór $\mathcal{F}$ funkcji różniczkowalnych $f : U \to [-1, 1]$ takich, że $|f'(t)| \leqslant 1$ dla $t \in U$, ma domknięcie zwarte w przestrzeni funkcyjnej $(C_b(U, \mathbb{R}), d_{sup})$ z metryką supremum.

Wskazówka. W przestrzeni $(C(\overline{U}, \mathbb{R}), d_{sup})$ rozpatrzyć zbiór przedłużeń funkcji $f \in \mathcal{F}$ na domknięcie zbioru U (zob. Zadanie 3.40).

3.42. Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwartym podzbiorem przestrzeni euklidesowej i niech $(\Gamma(X), d_{sup})$ będzie przestrzenią przekształceń $T : X \to X$ zachowujących odległość między punktami, z metryką supremum. Pokazać, że przestrzeń $(\Gamma(X), d_{sup})$ jest zwarta.

3.43. (A) Pokazać, że jeśli w przestrzeni metrycznej $(C_b(X, \mathbb{R}), d_{sup})$, zbiór $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczony, to rodzina funkcji $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła.

Wskazówka. Zauważyć, że jeśli $\mathrm{diam} f(V) \leqslant \varepsilon$, to dla każdego $g \in B(f, \varepsilon)$, $\mathrm{diam} g(V) \leqslant 3\varepsilon$.

(B) Pokazać, że warunek sformułowany w Twierdzeniu Ascoliego - Arzeli jest warunkiem koniecznym do zwartości domknięcia rodziny $\mathcal{F}$.

4. Spójność.

4.1. ♠ Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i niech, dla $A\subset X$, d_A będzie funkcją określoną formułą (1) z części 1.6.

(A) Wykazać, że jeśli $A,B\subset X$ i $\overline{A}\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}$, to zbiór otwarty $U=\{x : d_A(x)<d_B(x)\}$ zawiera A i $\overline{U}\cap B=\emptyset$.

(B) Wykazać, że zbiór $S\subset X$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego $U\subset X$, jeśli S przecina U i $X\setminus U$, to S przecina też brzeg $\mathrm{bd}U=\overline{U}\setminus U$ zbioru U.

4.2. Wykazać, że przestrzenie metryczne opisane z Zadaniach 1.1 i 1.2 są spójne.

4.3. ♠ Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą funkcjami prostej euklidesowej w siebie, spełniającymi nierówność $f(x)\leqslant g(x)$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$ i niech $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$. Wykazać, że jeśli f jest funkcją ciągłą, to zbiór S jest spójny na płaszczyźnie euklidesowej.

4.4. ♠ Niech

$$A_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=(\tfrac{1}{n})^2, x\leqslant 0 \text{ lub } y\leqslant 0\}\cup$$
$$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\tfrac{1}{n} \text{ oraz } 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Wykazać, że $X=A_1\cup A_2\cup\ldots$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej.

4.5. Podać przykład domkniętego, spójnego zbioru w $\mathbb{R}^3$, który jest sumą przeliczalnie wielu parami rozłącznych niepustych zbiorów domkniętych (taki zbiór nie może być jednocześnie ograniczony, zob. Zadanie 4.29).

Wskazówka. Niech $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną następująco: jeśli x należy do $[\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]$ i $m\leqslant n$, to $f_n(x)=n(x-\frac{1}{m+1})(\frac{1}{m}-x)$, dla pozostałych x, $f_n(x)=0$. Zdefiniować $A_n=\{(x,y,0) : x^2+y^2=1/n^2, x\leqslant 0 \text{ lub } y\leqslant 0\}\cup(\{(0,1/n)\}\times\mathbb{R})\cup(\{(1/n,y,f_n(y)) : 0\leqslant y\leqslant 1\})$ i rozpatrzyć $X=(\{(0,0)\}\times\mathbb{R})\cup\bigcup_n A_n$.

4.6. Wykazać, że w przestrzeni zwartej $(X,\mathcal{T})$, zstępujący ciąg domknietych zbiorów spójnych ma spójne przecięcie. Pokazać, że założenie zwartości jest istotne.

Wskazówka. Założyć, że przecięcie C ma rozkład $C=A\cup B$, gdzie A, B są domknięte, rozłączne i skorzystać z Zadania 2.18. W drugiej części rozpatrzyć $X=[0,1]\times[0,1]\setminus\{(1/2,0)\}$.

4.7. Wykazać, że zwarta przestrzeń metryczna (X,d) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary punktów $a,b\in X$ i $\varepsilon>0$ istnieją punkty $a_1,\ldots a_n\in X$ takie, że $a_1=a$, $a_n=b$ i $d(a_i,a_{i+1})<\varepsilon$ dla $i=1,2,\ldots n-1$.

4.8. Niech $(X,\mathcal{T}_X)$ i $(Y,\mathcal{T}_Y)$ będą spójnymi przestrzeniami topologicznymi, niech $A\subset X$ i niech $f:X\setminus A\to Y$ (funkcja f nie musi być ciągła). Wykazać, że jeśli $\overline{A}=X$, to $S=A\times Y\cup\{(b,f(b)) : b\in(X\setminus A)\}$ jest spójnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X\times Y$.

4.9. Niech $(X,\mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią spójną, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ – zwartą przestrzenią spójną i $f:U\to Y$ ciągłym przekształceniem określonym na otwartej podprzestrzeni przestrzeni X. Pokazać, że $S=(X\setminus U)\times Y\cup\{(u,f(u)) : u\in U\}$ jest spójnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X\times Y$. Pokazać, że zarówno założenie zwartości Y, jak i ciągłości f jest istotne.

Wskazówka. Sprawdzić, że S jest zbiorem domkniętym w $X\times Y$ i dowodząc spójności S skorzystać z Zadania 2.14.

4.10. Wykazać, że w spójnej przestrzeni metryzowalnej, mającej co najmniej dwa punkty, każda kula jest nieprzeliczalna.

4.11. Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim spójnych przestrzeni metryzowalnych, z których każda ma co najmniej dwa punkty. Wykazać, że dopełnienie $(X \times Y) \setminus A$ dowolnego zbioru przeliczalnego jest spójne.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 4.10.

4.12. ♠ Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux, jeśli dla każdej pary punktów $s < t$ i liczby r leżącej między $f(s)$ i $f(t)$ istnieje $u \in [s, t]$ takie, że $f(u) = r$. Wykazać, że jeśli wykres $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny, to f ma własność Darboux.

4.13. (A) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją z własnością Darboux (zob. Zadanie 4.12). Wykazać, że jeśli dla każdego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}$ obcięcie $f \mid F : F \to \mathbb{R}$ jest ciągłe w pewnym punkcie, to wykres funkcji f jest spójny.

(B) Wykazać, że wykres pochodnej f' funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest spójny.

Wskazówka. Skorzystać z faktu, że pochodna f' ma własność Darboux, $f'(t) = \lim_n \frac{f(t+\frac{1}{n})-f(t)}{\frac{1}{n}}$, oraz z Zadania 3.19 (B).

4.14. Ustawić wszystkie nietrywialne przedziały otwarte o końcach wymiernych na prostej $\mathbb{R}$ w ciąg $J_1, J_2, \ldots$, wybrać indukcyjnie zbiory Cantora $C_n \subset J_n \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1})$ i określić $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, żeby $f(t) \neq t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, oraz $f(C_n) = \mathbb{R}$. Pokazać, że f ma własność Darboux, ale nie ma spójnego wykresu.

4.15. Niech $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_{nm} = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{nm})$, $n, m = 1, 2, \ldots$ i niech

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup \{I(a_n, b_{nm}) : n, m = 1, 2, \ldots\},$$

gdzie $I(a, b)$ jest odcinkiem o końcach a, b na płaszczyźnie.

(A) Wykazać, że jeśli $U \subset X$ jest zbiorem spójnym, otwartym w podprzestrzeni X płaszczyzny i $(0, 0) \in U$, to $(1, 0) \in U$.

(B) Wykazać, że dla każdego otoczenia V punktu $(0, 0)$ w przestrzeni X istnieje spójne otoczenie tego punktu w X zawarte w V.

4.16. ♠ Znaleźć maksymalną liczbę parami niehomeomorficznych przestrzeni spójnych, z których każda jest podzbiorem płaszczyzny euklidesowej, będącym sumą nie więcej niż trzech domkniętych odcinków euklidesowych.

4.17. Dla każdej liczby całkowitej j, niech S_j będzie okręgiem na płaszczyźnie o środku w punkcie $(j, \frac{1}{3})$ i promieniu $\frac{1}{3}$, oraz $I_j = \{j\} \times [0, 1)$. Niech

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \bigcup_{j<0} S_j \cup \bigcup_{j \geqslant 0} I_j,$$

$$Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \bigcup_{j<0} S_j \cup I_o \cup S_1 \cup \bigcup_{j>1} I_j,$$

będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej. Wykazać, że istnieje ciągłe i róznowartościowe przekształcenie X na Y, istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie Y na X, ale przestrzenie X i Y nie są homeomorficzne.

4.18. ♠ Niech $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ będą ciągłymi przekształceniami przestrzeni spójnej $(X, \mathcal{T})$ w prostą rzeczywistą i $S_x = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : (s - f(x))^2 + (t - g(x))^2 = h(x)^2\}$. Wykazać, że $S = \bigcup_{x \in X} S_x$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny.

4.19. ♠ Pokazać, że zbiór

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{1/n\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}([-1,0] \times \{1/n\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{-1/n\} \times [-1,0]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}([0,1] \times \{-1/n\})$

jest spójny, ale nie jest łukowo spójny.

4.20. ♠ Wykazać, że przestrzeń $X = \mathbb{R}^2 \setminus A$ powstała z usunięcia z płaszczyzny euklidesowej zbioru przeliczalnego A jest łukowo spójna.

4.21. Niech A i B będą podzbiorami przedziału $[0,1]$ i niech X będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej otrzymaną jako suma odcinków domkniętych łączących punkt $(0,1)$ z punktami zbioru $A \times \{0\}$, oraz odcinków domkniętych łączących punkt $(0,-1)$ z punktami zbioru $B \times \{0\}$.

(A) Pokazać, że X jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ lub $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

(B) Pokazać, że X jest łukowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a \in A$, $b \in B$ takie, że przedział o końcach a, b zawiera się w $A \cup B$.

4.22. Niech $I = [0,1]$, $a_n \in I$, $n = 1, 2, \ldots$ i niech X będzie zbiorem na płaszczyźnie euklidesowej opisanym formułą

$$X = I \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I \times \{\frac{1}{n}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \times [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}].$$

(A) Wykazać, że zbiór X jest spójny.

(B) Wykazać, że zbiór X jest łukowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny.

4.23. Niech $X = \{(x_i) \in l_2 : \ 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}$ i dla co najwyżej jednej współrzędnej $i, \ \ x_i \in (0, \frac{1}{i})\}$. Czy zbiór X w przestrzeni Hilberta (l_2, d_h) jest

(A) zwarty,

(B) spójny,

(C) łukowo spójny?

4.24. ♠ Niech $a = \{(0,0)\}$, $b = \{(1,0)\}$ i niech $X = \{a, b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej.

(A) Wyznaczyć składowe przestrzeni X.

(B) Wykazać, że X nie jest homeomorficzna z $Y = X \setminus \{a\}$. Czy X jest homeomorficzna z przestrzenią $Z = Y \cup \{(1/2, 0)\}$ rozpatrywaną jako podprzestrzeń płaszczyzny euklidesowej?

4.25. ♠ Niech S będzie podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ przestrzeni topologicznych X i Y.

(A) Wykazać, że S jest składową $X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest iloczynem kartezjańskim składowych w przestrzeniach X i Y.

(B) Wykazać, że S jest składową łukowej spójności $X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest iloczynem kartezjańskim składowych łukowej spójności w przestrzeniach X i Y.

4.26. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, $a \in X$ i niech C będzie przecięciem wszystkich zbiorów zawierających a, które są jednocześnie otwarte i domknięte w X. Wykazać, że C jest składową przestrzeni X.

Wskazówka. Założyć, że $C = A \cup B$, gdzie A, B są domknięte, rozłączne i niepuste, $a \in A$. Znaleźć rozłączne zbiory V i W otwarte w X, takie że $A \subset V$ i $B \subset W$, zob. Zadanie 2.18. Korzystając ze zwartości $F = X \setminus (V \cup W)$ wybrać skończoną rodzinę $\mathcal{U}$ zbiorów jednocześnie otwartych i domkniętych w X, rozłącznych z C i pokrywających F. Sprawdzić, że $V \setminus \bigcup \mathcal{U}$ jest zbiorem otwartym i domkniętym w X, zawierającym A i rozłącznym z B. Wyprowadzić stąd sprzeczność.

4.27. Niech X będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej opisaną w Zadaniu 4.24. Pokazać, że $\{a\}$ jest składową przestrzeni X, ale przecięcie wszystkich podzbiorów X zawierających a, które są jednocześnie otwarte i domknięte w X, jest równe $\{a, b\}$.

4.28. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie zwartą przestrzenią spójną i $V \subset X$ niepustym zbiorem otwartym o niepustym dopełnieniu. Pokazać, że dla każdego punktu $a \in V$ istnieje zbiór spójny $S \subset \overline{V}$ taki, że $a \in S$ i $S \setminus V \neq \emptyset$.

Wskazówka. Rozpatrzyć składową S punktu a w podprzestrzeni $\overline{V}$ i skorzystać z Zadania 4.26.

4.29. Udowodnić twierdzenie Sierpińskiego: jeśli przestrzeń zwarta X jest przeliczalną sumą rozłącznych zbiorów domkniętych $F_1, F_2, \ldots$, to każdy spójny podzbiór X zawiera się w jednym ze zbiorów F_i.

Wskazówka. Założyć, że tak nie jest i określić indukcyjnie, korzystając z Zadań 2.18 i 4.28, zwarte zbiory spójne $X_0 \supset X_1 \supset \ldots$ nie zawierające się w żadnym ze zbiorów F_i i takie, że $X_n \cap F_n = \emptyset$ dla $n > 0$.

4.30. Niech X będzie przestrzenią opisaną w Zadaniu 4.24. Wykazać, że nie istnieje przekształcenie ciągłe i wzajemnie jednoznaczne przestrzeni X na żadną przestrzeń zwartą.

Wskazówka. Założyć, że takie f istnieje i korzystając z Zadania 4.29 zauważyć, że składowa $f((0,0))$ jest zbiorem jednopunktowym. Wyprowadzić sprzeczność z Zadań 4.26 i 4.27.

4.31. Niech $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ i niech $X = \{\varphi(t) : t \in [0, 2\pi)\} \cup \{(1 - e^{-t})\varphi(t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(1 + e^{-t})\varphi(t) : t \in [0, \infty)\}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej. Pokazać, że X jest zwarta i spójna oraz wskazać składowe łukowej spójności X.

5. Przestrzenie ilorazowe.

5.1. ♠ Niech $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$, zaś $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$.

(A) Wskazać homeomorfizm $D^2/S^1 \simeq S^2$.

(B) Wykazać, że D^n/S^{n-1} jest przestrzenią homeomorficzną z S^n.

5.2. Niech $I = [0, 1]$. Wykazać, że przestrzeń I/A, gdzie $A \subset I$ jest zbiorem dwuelementowym, jest homeomorficzna z jedną z przestrzeni $I/\{0, 1\}$, $I/\{0, \frac{1}{2}\}$, $I/\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ i żadne dwie z tych przestrzeni nie są homeomorficzne.

5.3. Niech C będzie zbiorem Cantora opisanym w 2.3 (10) i $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Pokazać, że przestrzenie $[0, 1]/C$ i $[0, 1]/A$ są homeomorficzne.

5.4. (A) Pokazać, że w przestrzeni $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych, każdy niepusty zbiór otwarty zawiera klasę abstrakcji zera.

(B) Pokazać, że przestrzeń $\mathbb{R}/A$ jest Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest domknięty.

5.5. ♠ (A) Określić relację równoważności na $S^1 \times S^1$ tak, by przestrzeń ilorazowa była homeomorficzna z S^2.

(B) Określić relację równoważności na $S^1 \times S^2$ tak, by przestrzeń ilorazowa była homeomorficzna z S^3.

5.6. ♠ Niech $A = [0, 1] \cup [2, 3]$, $B = [4, 5] \cup [6, 7]$. Niech $f : A \to B$ będzie homeomorfizmem zadanym wzorem $(f \mid [0, 1])(t) = 5 - t$, $(f \mid [2, 3])(t) = 9 - t$. Wykazać, że przestrzeń $[0, 3] \cup_f [4, 7]$ jest homeomorficzna z okręgiem.

5.7. Niech $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/A$ będzie przekształceniem ilorazowym sklejającym domknięty właściwy zbiór $A \subset \mathbb{R}$ do punktu.

(A) Pokazać, że jeśli A nie jest zbiorem jednopunktowym, to istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}$ taki, że $\pi(U)$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}/A$.

(B) Pokazać, że jeśli $\mathbb{R}/A$ jest przestrzenią metryzowalną, to zbiór $A \setminus \mathrm{Int}A$ jest zwarty.

Wskazówka. Zob. Przykład 5.1.4.

5.8. Butelką Kleina nazywa się przestrzeń $[-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$, gdzie różne punkty (x, y), (x', y') są w relacji $\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| = 1$ i $(x', y') = -(x, y)$, lub $|y| = 1$ i $x = x'$.

Pokazać, że butelka Kleina jest homeomorficzna z podprzestrzenią $u([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, d_e)$, gdzie $u(x, y) = ((2 + \cos y) \cos x, (2 + \cos y) \sin x, \cos \frac{x}{2} \sin y, \sin \frac{x}{2} \sin y)$.

Wskazówka. Zauważyć, że funkcja u utożsamia w kwadracie $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ każdy punkt $(0, t)$ z punktem $(2\pi, 2\pi - t)$, oraz każdy punkt $(t, 0)$ z punktem $(t, 2\pi)$, nie utożsamiając innych punktów, zob. Uwaga 5.1.1 (B).

5.9. Wstęgą Möbiusa nazywa się przestrzeń $M = [-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$, gdzie różne punkty (x, y), (x', y') są w relacji $\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| = 1$ i $(x', y') = -(x, y)$. Relacja $\sim$ na sumie $[-1, 1] \times \{-1\} \cup [-1, 1] \times \{1\}$ skleja te dwa odcinki w okrąg, który oznaczamy przez ∂M i nazywamy brzegiem M.

(A) Pokazać, że przestrzeń ilorazowa $M/\partial M$ otrzymana z M przez sklejenie ∂M do punktu jest homeomorficzna z płaszczyzną rzutową.

Wskazówka. Rozważyć przekształcenie $u : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem $u(x, y) = ((1 - |y|)x, y)$, przeprowadzające kwadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ na romb $\{(s, t) : |s| + |t| \leqslant 1\}$.

(B) Przedstawić butelkę Kleina jako przestrzeń ilorazową otrzymaną w wyniku sklejenia dwóch wstęg Möbiusa wzdłuż ich brzegów.

Wskazówka. Wyciąć z kwadratu $[-1,1]\times[-1,1]$ prostokąt $\left\{(x,y) : |y| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

5.10. ♠ Niech X będzie przestrzenią opisaną w Zadaniu 4.24 i niech $\sim$ będzie relacją należenia do tej samej składowej przestrzeni X, zob. 4.3.1. Pokazać, że przestrzeń ilorazowa $X/\!\sim$ nie jest przestrzenią Hausdorffa.

5.11. Niech T będzie przestrzenią opisaną w 4.1.9 i niech $\sim$ będzie relacją należenia do tej samej składowej łukowej spójności w T, zob. 4.3.2.

(A) Opisać topologię ilorazową w $T/\!\sim$.

(B) Pokazać, że przestrzeń $T/\!\sim$ nie jest homeomorficzna z żadną przestrzenią ilorazową $X/\sim_X$, gdzie $\sim_X$ jest relacją należenia do tej samej składowej przestrzeni topologicznej X.

5.12. Niech (X,d) będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech $\sim$ będzie relacją należenia do tej samej składowej przestrzeni X, zob. 4.3.1.

(A) Pokazać, że każdy punkt przestrzeni ilorazowej $X/\!\sim$ jest przecięciem zbiorów, które są jednocześnie otwarte i domknięte w $X/\!\sim$. Wywnioskować stąd, że $X/\!\sim$ jest przestrzenią Hausdorffa.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 4.26.

(B) Wykazać, że przestrzeń $X/\!\sim$ zanurza się w zbiór Cantora.

Wskazówka. Niech $\{B_i : i \geqslant 1\}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów $X/\!\sim$, które są jednocześnie otwarte i domknięte w $X/\!\sim$, zob. Zadanie 2.26. Pokazać, że funkcja $f = \sum_i \frac{2}{3^i}\chi_{B_i}$, gdzie χ_{B_i} jest funkcją charakterystyczną zbioru B_i, zanurza X w zbiór Cantora opisany w 2.3 (10).

6. Homotopie.

6.1. ♠ Pokazać, że jeśli $f, g : X \to S^n$ są dwoma przekształceniami ciągłymi takimi, że dla dowolnego $x \in X$, $d_e(f(x), g(x)) < 2$, to f i g są homotopijne.

6.2. ♠ Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : X \to S^n$ takie, że $f(X) \neq S^n$ jest homotopijne z funkcją stałą.

6.3. ♠ Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ określone na przestrzeni ściągalnej X jest homotopijne z funkcją stałą.

6.4. ♠ Niech $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ i niech $X = A \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej.

(A) Pokazać, że X jest ściągalna.

(B) Pokazać, że nie istnieje homotopia $H : X \times I \to X$ łącząca id_X z przekształceniem stałym o jednopunktowym obrazie $\{(0,0)\}$, taka, żeby dla dowolnego $t \in I$ zachodziło $H((0,0),t) = (0,0)$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozważyć drogę $H|(\left\{(\frac{1}{n},0)\right\} \times I)$ dla n takiego, że $\frac{1}{n} < \operatorname{dist}(\{0\} \times I, H^{-1}((0,1)))$ (zob. Zadanie 2.9 (A)).

6.5. Niech $I(x,y)$ oznacza odcinek na płaszczyźnie łączący x z y. W $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową dane są podprzestrzenie $X = I(x_0,p) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I(x_n,p)$ i $Y = X \cup -X$, gdzie $x_0 = (0,0)$, $p = (0,1)$, $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$, a $-X$ oznacza zbiór symetryczny do X względem punktu $(0,0)$.

(A) ♠ Pokazać, że X jest przestrzenią ściągalną, ale przestrzeń Y nie jest ściągalna.

Wskazówka. W dowodzie nieściągalności Y założyć przeciwnie, że istnieje homotopia $H : Y \times I \to Y$, $H(y,0) = y$, $H(y,1) = x_0$ dla $y \in Y$. Korzystając ze wskazówki do Zadania 6.4 (B) zauważyć, że $D = \{x_0\} \times I \cap H^{-1}(\{p,-p\}) \neq \emptyset$ i rozważyć obcięcie H do $Y \times [0,t]$, gdzie $t = \inf\{s \in I : (x_0,s) \in D\}$.

(B) Niech $Y_2 = j(X) \cup -X \subset \mathbb{R}^2$, gdzie j jest jednokładnością o środku w p i współczynniku 2. Pokazać, że przestrzeń Y_2 jest ściągalna.

6.6. Niech $n \geqslant 2$.

(A) Wykazać, że dla każdej pętli $\alpha \in \Omega(S^n, a)$ istnieje homotopijna z nią pętla $\beta \in \Omega(S^n, a)$ taka, że $\beta(I)$ jest zbiorem brzegowym w S^n.

Wskazówka. Wybrać m takie, że każdy zbiór $\alpha([\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}])$, $i = 0, \ldots, m-1$, leży w pewnej otwartej półprzestrzeni wyznaczonej przez hiperpłaszczyznę przechodzącą przez $\mathbf{0}$ i przyjąć $\beta(t) = \frac{u(t)}{||u(t)||}$, gdzie $u(t) = (1-(mt-i))\alpha(\frac{i}{m}) + (mt-i)\alpha(\frac{i+1}{m})$, dla $t \in [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}]$, $i = 1, \ldots, m-1$. Sprawdzić, że $d_e(\alpha(t), \beta(t)) < 2$, dla $t \in I$, zob. Zadanie 6.1.

(B) Wykazać, że każda pętla $\alpha \in \Omega(S^n, a)$ jest homotopijna z pętlą stałą ε_a.

Wskazówka. Sprawdzić, że dla pętli $\beta \in \Omega(S^n, a)$ opisanej w (A), $\beta \sim \varepsilon_a$, zob. część 6.1.

6.7. Niech Y będzie przestrzenią ściągalną. Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : S^n \to Y$ można przedłużyć do przekształcenia ciągłego $\overline{f} : D^{n+1} \to Y$.

6.8. Niech $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 1 \leqslant d_e(x,0) \leqslant 2\}$, $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : d_e(x,0) = 1$, lub $d_e(x,0) = 2\}$. Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : \partial E \to Y$ w przestrzeń ściągalną Y można przedłużyć do przekształcenia ciągłego $\overline{f} : E \to Y$.

6.9. (A) Niech $S \subset I^n$ będzie zwartym zbiorem spójnym i niech $X = I^n/S$ powstaje z I^n przez sklejenie S do punktu. Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : X \to S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Wskazówka. Niech $\pi : I^n \to X$ będzie przekształceniem ilorazowym i $F = f \circ \pi$. Zauważyć, że przekształcenie $\widetilde{F} : I^n \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \widetilde{F} = F$, zob. 6.2.1, jest stałe na S i określić ciągłe $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \widetilde{f} = f$.

(B) Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe sfery S^n w okrąg S^1, $n \geqslant 2$, jest homotopijne z przekształceniem stałym (zob. także Zadanie 7.30 (C)).

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 5.1.

6.10. Niech $u : I^2 \to S^1 \times S^1 = T$ będzie przekształceniem kwadratu na torus określonym wzorem $u(s,t) = (E(s), E(t))$ i niech $C = u(\partial I^2) \subset T$ będzie obrazem brzegu kwadratu. Pokazać, że jeśli obcięcie $f|C$ funkcji ciągłej $f : T \to S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, to funkcja f jest homotopijna z przekształceniem stałym.

Wskazówka. Niech $H : C \times I \to S^1$ będzie homotopią łączącą $f|C$ z przekształceniem stałym. Określić funkcję ciągłą $g : \partial I^3 \to S^1$ na brzegu kostki I^3 taką, że dla $p : I^3 \to T \times I$ danej wzorem $p(s_1, s_2, t) = (u(s_1, s_2), t)$, g pokrywa się z $f \circ p$ na dolnej podstawie kostki, z $H \circ p$ na $\partial I^2 \times I$ i g jest stała na górnej podstawie, a następnie, korzystając z Zadania 6.9 (B), przedłużyć g na I^3.

6.11. (A) Niech $f : M \to S^1$ będzie ciągłym przekształceniem wstęgi Möbiusa w okrąg. Pokazać, że jeśli $f|\partial M$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, to istnieje ciągłe $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \widetilde{f} = f$.

Wskazówka. Niech $\pi : I^2 \to M$ będzie przekształceniem ilorazowym sklejającym jedynie punkty $(0,t)$ z $(1, 1-t)$, $F = f \circ \pi$ i niech $\widetilde{F} : I^2 \to \mathbb{R}$ będzie takie, że $E \circ \widetilde{F} = F$. Zauważyć, że różnica $\widetilde{F}(1, 1-t) - \widetilde{F}(0,t) \in \mathbb{Z}$ jest stała dla $t \in I$. Korzystając z faktu, że $f|\partial M$ jest homotopijne z przekształceniem stałym udowodnić równość $\widetilde{F}(1,1) = \widetilde{F}(0,0) + (\widetilde{F}(0,1) - \widetilde{F}(1,0))$ i wyprowadzić stąd istnienie funkcji $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$ spełniającej $\widetilde{f} \circ \pi = \widetilde{F}$.

(B) Wyprowadzić z (A), że każde ciągłe przekształcenie płaszczyzny rzutowej w okrąg jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 5.9 (A).

6.12. (A) Wykazać, że istnieje ciągłe przekształcenie $f : K \to S^1$ butelki Kleina w okrąg, które nie jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Wskazówka. Niech $\pi : I^2 \to K$ będzie przekształceniem ilorazowym sklejającym ze sobą punkty $(0,t)$ i $(1, 1-t)$ oraz punkty $(s, 0)$ i $(s, 1)$. Sprawdzić, że dla $F : I^2 \to S^1$ zadanego wzorem $F(s,t) = E(s)$ istnieje $f : K \to S^1$ spełniające $f \circ \pi = F$, zauważyć, że pętla $\alpha : I \to S^1$ zdefiniowana wzorem $\alpha(s) = f(\pi(s, \frac{1}{2}))$ ma stopień 1 i wyprowadzić stąd tezę.

(B) Wyprowadzić z (A) i z Zadania 6.11 (B), że płaszczyzna rzutowa nie jest homotopijnie równoważna z butelką Kleina.

6.13. (A) Niech $f : M \to S^1$ będzie ciągłym przekształceniem wstęgi Möbiusa w okrąg. Pokazać, że pętla generowana przez obcięcie $f|\partial M : \partial M \to S^1$ ma stopień parzysty.

Wskazówka. Niech $\pi : I^2 \to M$, $F = f \circ \pi$ i $\widetilde{F} : I^2 \to \mathbb{R}$ będą takie, jak we wskazówce do Zadania 6.11 (A) i niech $\widetilde{F}(1, 1-t) - \widetilde{F}(0,t) = k \in \mathbb{Z}$ dla $t \in I$. Pokazać, że $\widetilde{F}(1,1) = \widetilde{F}(0,0) + (\widetilde{F}(0,1) - \widetilde{F}(1,0)) + 2k$.

(B) Wywnioskować z (A), że istnieje ciągłe przekształcenie $f : \partial M \to S^1$, którego nie można przedłużyć do ciągłego przekształcenia $\overline{f} : M \to S^1$, w szczególności nie istnieje ciągła retrakcja wstęgi Möbiusa na jej brzeg.

6.14. (A) Niech $f, g : X \to S^1$ będą ciągłymi przekształceniami przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w okrąg. Pokazać, że f i g są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{f}{g} : X \to S^1$ jest homotopijny z przekształceniem stałym.

(B) Pokazać, że jeśli $f, g : K \to S^1$ są ciągłymi przekształceniami butelki Kleina w okrąg, to istnieją liczby całkowite m i n takie, że , $(m, n) \neq (0, 0)$ i $f^m \sim g^n$.

Wskazówka. Zgodnie z Zadaniem 5.9 (B), $K = M_1 \cup M_2$, gdzie M_1, M_2 są wstęgami Möbiusa, a $C = M_1 \cap M_2$ jest ich wspólnym brzegiem. Dobrać m i n tak, by $f^m|C \sim g^n|C$, zob. 6.3.7 i skorzystać z (A) oraz z Zadania 6.11 (A).

6.15. Niech $T = S^1 \times S^1$ będzie torusem, i niech $p_i : T \to S^1$ będzie rzutowaniem T na i-tą współrzędną. Pokazać, że jeśli $p_1^m \sim p_2^n$ dla $m, n \in \mathbb{Z}$, to $m = n = 0$ i wywnioskować z Zadania 6.14, że torus nie jest homotopijnie równoważny z butelką Kleina.

6.16. Niech $f : S^1 \to S^1$ będzie funkcją ciągłą.

(A) Wykazać, że jeśli f jest homotopijna z funkcją stałą, to istnieje funkcja ciągła $g : S^1 \to S^1$ taka, że $g^2 = f$ (gdzie $g^2(z) = g(z)g(z)$ dla $z \in S^1$).

Wskazówka. Powtarzając rozumowanie z uzasadnienia 6.2.6 pokazać, że pętla $\alpha = (f \circ \omega_1)/f(1)$ jest homotopijna z pętlą stałą. Z 6.2.4 wywnioskować, że $\deg\alpha = 0$, więc droga $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki $E \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ i $\tilde{\alpha}(0) = 0$ jest pętlą. Określić ciągłe $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ takie, że $f = E \circ \varphi$ i rozważyć $g = E \circ \frac{1}{2}\varphi$.

(B) Wykazać, że jeśli f spełnia warunek $f(-z) = -f(z)$ dla $z \in S^1$, to f nie jest homotopijna z funkcją stałą.

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozpatrzyć funkcje ciągłe $g, h : S^1 \to S^1$ takie, że $g^2 = f$, a $h(z) = \frac{g(-z)}{g(z)}$ dla $z \in S^1$. Z $h^2(z) = \frac{f(-z)}{f(z)} = -1$ wywnioskować, że h jest funkcją stałą i $h(1)h(-1) = h(1)h(1) = -1$. Obliczyć $h(1)h(-1)$ korzystając z definicji funkcji h.

6.17. (A) Niech $F : S^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x \in S^2$ takie, że $F(x) = F(-x)$ (twierdzenie Borsuka–Ulama dla sfery S^2).

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozważyć funkcję $h : S^2_+ \to S^1$ określoną wzorem $h(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{||F(x)-F(-x)||}$, gdzie S^2_+ oznacza górną domkniętą połową sfery S^2 ograniczoną okręgiem jednostkowym $\partial S^2_+ = S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. Sprawdzić, że obcięcie $f = h|\partial S^2_+$ spełnia warunek $f(-x) = -f(x)$ i jest homotopijne z funkcją stałą. Wyprowadzić sprzeczność z poprzedniego zadania.

(B) Nech A_1, A_2, A_3 będą domkniętymi podzbiorami sfery S^2. Wykazać, ze jeśli S^2 jest sumą tych zbiorów, to istnieje $x \in S^2$ takie, że jeden z tych zbiorów zawiera x i $-x$.

Wskazówka. Założyć, że A_j jest rozłączny z $B_j = \{-x : x \in A_j\}$ dla $j = 1, 2$ i rozważyć funkcje $f_1, f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f_j(x) = \frac{d_{A_j}(x)-d_{B_j}(x)}{d_{A_j}(x)+d_{B_j}(x)}$. Korzystając z (A) znaleźć $x \in S^2$ takie, że $f_j(x) = f_j(-x)$ dla $j = 1, 2$ i pokazać, że $x \notin A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$.

6.18. Niech A_{-1}, A_1, B_{-1}, B_1 będą zbiorami domkniętymi w kwadracie $[-1, 1]^2$ takimi, że suma tych zbiorów pokrywa $[-1, 1]^2$. Wykazać, ze jeśli $\{k\} \times [-1, 1] \subset A_k$ i $[-1, 1] \times \{k\} \subset B_k$, dla $k \in \{-1, 1\}$, to jedno z przecięć $A_{-1} \cap A_1$ lub $B_{-1} \cap B_1$ jest niepuste.

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozpatrzyć funkcje ciągłe $\varphi, \psi : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]$ takie, że $\varphi(x) = -k$ dla $x \in A_k$, $\psi(x) = -k$ dla $x \in B_k$. Pokazać, że $f = (\varphi, \psi) : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]^2$ nie ma punktu stałego.

6.19. Niech $u, v : [-1,1] \to [-1,1]$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $u^{-1}(k) = v^{-1}(k) = \{k\}$ dla $k \in \{-1,1\}$. Wykazać, że zbioru $T = \{(s,t) \in [-1,1]^2 : u(s) = v(t)\}$ nie można rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych, z których jeden zawiera punkt $(-1,-1)$, a drugi punkt $(1,1)$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że T rozkłada się na rozłączne zbiory domknięte C_{-1} i C_1, $(k,k) \in C_k$. Określić zbiory otwarte U_k w kwadracie $[-1,1]^2$ takie, że $C_k \subset U_k$, $\overline{U_{-1}} \cap \overline{U_1} = \emptyset$ i $\overline{U_k}$ nie przecina boków kwadratu nie zawierających punktu (k,k). Przyjąć $A_k = \overline{U_k} \cup (\{k\} \times [-1,1])$, $B_k = \{(s,t) : ku(s) \leqslant kv(t)\} \setminus U_{-k}$ i pokazać sprzeczność z Zadaniem 6.18.

6.20. Niech X i Y będą przestrzeniami łukowo spójnymi, $a \in X$ i $b \in Y$. Pokazać, że grupa $\pi_1(X \times Y, (a,b))$ jest izomorficzna z grupą $\pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b)$.

6.21. Niech Y będzie domkniętą podprzestrzenią łukowo spójnej przestrzeni X i niech $H : X \times I \to X$ będzie homotopią łączącą id_X z przekształceniem $r : X \to Y$ taką, że $H(y,t) = y$, dla $y \in Y$ i $t \in I$. Pokazać, że grupy podstawowe $\pi_1(X)$ i $\pi_1(Y)$ są izomorficzne.

6.22. Znaleźć grupę podstawową sfery z wyrzuconymi dwoma punktami i płaszczyzny rzutowej z wyrzuconym jednym punktem.

Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego zadania.

7. Zadania dodatkowe.

7.1. Niech S będzie zbiorem nieskończonym, niech $l_f(S)$ będzie przestrzenią liniową funkcji $v : S \to \mathbb{R}$ o skończonym nośniku supp$v = \{s : v(s) \neq 0\}$ i niech $||v|| = \sum_{s\in S} |v(s)|$, dla $v \in l_f(S)$.

(A) Pokazać, że $d(u, v) = ||u-v||$ jest metryką na $l_f(S)$ i w przestrzeni $(l_f(S), d)$ znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru $A = \{v \in l_f(S) : \max_{s\in S} |v(s)| \leqslant |\mathrm{supp} v|\}$.

(B) Niech S będzie zbiorem mocy continuum. Znaleźć zanurzenie izometryczne przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$ z Zadania 1.1 w przestrzeń $(l_f(S), d)$.

(C) Niech S będzie zbiorem mocy continuum. Znaleźć zanurzenie izometryczne przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ z Zadania 1.2 w przestrzeń $(l_f(S), d)$.

7.2. Niech $X = \{(t, 4t(1-t)) : t \in [0, 1]\}$ i niech $(X, \mathcal{T}(<)_X)$ będzie podprzestrzenią kwadratu leksykograficznego $(I^2, \mathcal{T}(<))$ opisanego w Przykładzie 1.2.8. Znaleźć podprzestrzeń $(Y, \mathcal{T}(d_r)_Y)$ przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ opisanej w Zadaniu 1.2 homeomorficzną z $(X, \mathcal{T}(<)_X)$. Czy istnieje taka podprzestrzeń w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$ opisanej w Zadaniu 1.1?

7.3. Niech
$X_1 = \{(0, 0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m = 1, 2, \ldots\}$,
$X_2 = \{(0, 0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m = 1, 2, \ldots, n \leqslant m\}$ i
$X_3 = \{(0, 0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n = 1, 2, \ldots\} \cup \Big\{(\frac{1}{n}, 1) : n = 1, 2, \ldots\Big\}$
będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Które z tych trzech przestrzeni są ze sobą homeomorficzne?

7.4. Niech $F \subset \mathbb{R}^2$ będzie niepustym zbiorem domkniętym takim, że dla każdego zbioru otwartego U w $\mathbb{R}^2$ zawierającego F i dowolnych zbiorów otwartych W_1, W_2 w $\mathbb{R}^2$ przecinających F istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której wykres jest zawarty w U i przecina oba zbiory W_1, W_2.

(A) Pokazać, ze dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $F(x) = \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in F\}$ jest niepustym przedziałem w $\mathbb{R}$.

(B) Pokazać, ze dla każdego zbioru otwartego $J \subset \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset J\}$ jest otwarty w $\mathbb{R}$.

7.5. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Pokazać, że jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $U(x) = \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in U\}$ jest niepustym przedziałem w $\mathbb{R}$, to istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której wykres jest zawarty w U.

7.6. Niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem zwartej przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie takim, że $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ dla różnych $x, y \in X$. Wykazać, że T ma dokładnie jeden punkt stały.

7.7. Niech $(2^{\mathbb{N}}, <)$ będzie zbiorem ciągów zero-jedynkowych z porządkiem leksykograficznym $<$ (zob. Zadanie 1.8 (D)) i niech $\mathcal{T}$ będzie topologia porządkową wyznaczoną przez $<$. Wykazać, ze przestrzeń $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{T})$ jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora.

7.8. Niech $H \subset C[0, 1]$ będzie zbiorem rosnących homeomorfizmów odcinka na siebie i $d = d_{sup}|H \times H$ (zob. Zadanie 1.6). Pokazać, że metryka d na H jest prawostronnie niezmiennicza (tzn. $d(f, g) = d(f \circ h, g \circ h)$), metryka $\tilde{d}(f, g) = d_{sup}(f^{-1}, g^{-1})$ jest lewostronnie niezmiennicza i generuje w H topologię $\mathcal{T}(d)$, ale żadna metryka dwustronnie niezmiennicza na H nie generuje tej topologii.

<u>Wskazówka.</u> Określić ciągi $f_n, g_n \in H$ takie, że $g_n \to id$, ale $f_n^{-1} \circ g_n \circ f_n \not\to id$.

7.9. Przyjmijmy oznaczenia z Zadania 7.8, ustawmy liczby wymierne z $[0, 1]$ w ciąg $q_1, q_2, \ldots$ i niech, dla $f, g \in C[0, 1]$, $d_s(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f(q_n) - g(q_n)|$.

(A) Pokazać, że metryki d_s i d_{sup} generują w $C[0,1]$ różne topologie.

(B) Pokazać, że metryka $d_s|H \times H$ generuje w zbiorze H topologię $\mathcal{T}(d)$.

7.10. Przyjmijmy oznaczenia z Zadania 7.8.

(A) Pokazać, że przestrzeń (H,d) nie jest zupełna.

(B) Niech $d_+(f,g) = d(f,g) + \tilde{d}(f,g)$. Pokazać, że metryka d_+ generuje na H topologię $\mathcal{T}(d)$ i przestrzeń (H, d_+) jest zupełna.

(C) Pokazać, że jeśli d_- jest prawostronnie niezmienniczą metryką na H generująca topologię $\mathcal{T}(d)$, to przestrzeń (H, d_-) nie jest zupełna.

Wskazówka. Sprawdzić, że $id : (H,d) \to (H,d_-)$ jest jednostajnie ciągła i skorzystać z (A).

7.11. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy $p \in X$ i niech dla $a \in X$ funkcja $f_a : X \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f_a(x) = d(x,a) - d(x,p)$. Pokazać, że $f_a \in C_b(X,\mathbb{R})$ oraz $d(a,b) = d_{sup}(f_a, f_b)$, zob. Przykład 1.7.4.

7.12. Uzupełnieniem przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy przestrzeń metryczną zupełną (Z, d_Z) wraz z zanurzeniem izometrycznym $\psi : X \to Z$ przestrzeni X na gęsty podzbiór Z.

(A) Pokazać, że każda przestrzeń metryczna ma uzupełnienie.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 7.11.

(B) Pokazać, że jeśli (Z_i, d_i), $\psi_i : X \to Z_i$, $i = 1,2$, są uzupełnieniami przestrzeni metrycznej (X,d), to istnieje izometria $\psi : Z_1 \to Z_2$ taka, że $\psi \circ \psi_1 = \psi_2$.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 3.40.

(C) Niech (Z, d_Z), $\psi : C[0,1] \to Z$ będzie uzupełnieniem przestrzeni metrycznej $(C[0,1], \tau)$ opisanej w Zadaniu 1.7. Pokazać, że istnieje funkcja ciągła $\Psi : Z \to \mathbb{R}$ taka, że $\Psi(\psi(f)) = \int_0^1 f(t)dt$, dla $f \in C[0,1]$.

Wskazówka. Skorzystać z nierówności $|\int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt| \leqslant \tau(f,g)$.

7.13. (A) Zauważyć, że dla każdego ciągu $(r_i)_{i=1}^\infty$ dodatnich liczb rzeczywistych podprzestrzeń $\left\{(t_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : |t_i| \leqslant r_i\right\}$ iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ przeliczalnie wielu prostych, jest homeomorficzna z kostką Hilberta, zob. Zadania 3.38 i 3.36.

(B) Niech (A,d) będzie niepustą przeliczalną przestrzenią metryczną z ustaloną różnowartościową numeracją $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Pokazać, że $K = \{(t_i)_i : |t_i| \leqslant d(a_1, a_i) \text{ i } |t_i - t_j| \leqslant d(a_i, a_j)\}$ jest zwartą podprzestrzenią iloczynu kartezjańskiego prostych oraz dla rzutowań $p_n : K \to \mathbb{R}$ $(p_n(t_1, t_2, \ldots) = t_n)$, $d_{sup}(p_n, p_m) = d(a_n, a_m)$.

Wskazówka. Dla ustalonych n, m, przyjąć $t_i = d(a_i, a_m) - d(a_1, a_m)$ i sprawdzić, że $(t_1, t_2, \ldots) \in K$ oraz $|t_n - t_m| = d(a_n, a_m)$.

(C) Pokazać, że dla każdej przestrzeni metrycznej ośrodkowej (X,d) istnieje zwarta przestrzeń metryzowalna K i izometryczne zanurzenie przestrzeni (X,d) w przestrzeń $(C(K), d_{sup})$, zob. Zadanie 2.27 (A).

Wskazówka. Ustalić różnowartościową numerację $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ przeliczalnego zbioru A gęstego w przestrzeni X i korzystając z zupełności przestrzeni $(C(K), d_{sup})$, przedłużyć na X izometryczne zanurzenie $T : A \to C(K)$ dane wzorem $T(a_n) = p_n$, $n = 1, 2, \ldots$, gdzie K oraz p_n są określone w (B).

7.14. Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie przecięciem przeliczalnie wielu zbiorów otwartych, gęstych w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że $\{x + y : x, y \in G\} = \mathbb{R}^n$.

7.15. Wykazać, że dla przestrzeni metrycznej zupełnej (X,d) następujące warunki są równoważne:

(i) X jest zbiorem przeliczalnym,

(ii) przestrzeń (X,d) jest ośrodkowa i każdy zbiór F domknięty w (X,d) zawiera punkt izolowany w przestrzeni (F,d).

7.16. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą ze względu na każdą zmienną osobno, zob. Zadanie 1.31. Wykazać, że jeśli zbiór $f^{-1}(0)$ jest gęsty w $\mathbb{R}^2$, to funkcja f jest stała.

Wskazówka. Założyć, że $|f(a,b)| = r > 0$, wybrać $\varepsilon > 0$ takie, że $|f(x,b)| \geqslant r/2$ dla $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, rozpatrzyć zbiory $A_n = \{x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) : |f(x,y)| > r/4 \text{ dla } y \in (b-1/n, b+1/n)\}$ i skorzystać z twierdzenia Baire'a, aby uzyskać sprzeczność z założeniem o gęstości $f^{-1}(0)$.

7.17. Niech U będzie zbiorem otwartym i spójnym w $\mathbb{R}^n$ i niech $F \subset U$ będzie zbiorem zwartym. Wykazać, ze istnieje otwarty zbiór spójny V w $\mathbb{R}^n$ taki, ze $F \subset V$ i $\overline{V} \subset U$.

7.18. Niech ograniczony zbiór domknięty A w $\mathbb{R}^n$ będzie sumą n zbiorów wypukłych. Pokazać, że zbiór $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest spójny dla $n \geqslant 2$.

7.19. Niech G będzie zbiorem otwartym w kwadracie I^2 takim, że $I \times \{0\} \subset G \subset I \times [0,1)$ i niech $J(G) = \{(x,t) \in G : \{x\} \times [0,t] \subset G\}$.

(A) Pokazać, że zbiór $J(G)$ jest otwarty w I^2.

(B) Pokazać, że zbiór $\overline{J(G)} \setminus J(G)$ jest spójny.

7.20. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie zwartym podzbiorem prostej euklidesowej i niech $\mathcal{J}$ będzie rodziną parami rozłącznych przedziałów $[a,b]$ w $\mathbb{R}$. Relację równoważności $\sim$ w K określamy formułą: $x \sim y$ jeśli $x = y$ lub x, y należą do tego samego przedziału z rodziny $\mathcal{J}$.

Pokazać, że przestrzeń ilorazowa $K/\sim$ jest przestrzenią Hausdorffa i istnieje zanurzenie homeomorficzne $h : K/\sim \to \mathbb{R}$ takie, że $h \circ \pi : K \to \mathbb{R}$ jest niemalejące, gdzie $\pi : K \to K/\sim$ jest przekształceniem ilorazowym.

7.21. Niech $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ będzie przestrzenią otrzymaną z prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ przez sklejenie zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ do punktu, zob. Przykład 5.1.4 i połóżmy $X = \mathbb{R}/\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych w $\mathbb{R}$. Pokazać, że przestrzeń X nie jest homeomorficzna z przestrzenią ilorazową $Y = (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})/\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją równoważności w iloczynie $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$, której jedynymi niejednopunktowymi klasami abstrakcji są zbiory postaci $\mathbb{N} \times \{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$.

Wskazówka. Założyć, że $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem i pokazać, że $h([1], 0) = [1, q]_\sim$ dla pewnego $q \in \mathbb{Q}$, a następnie wyprowadzić stąd sprzeczność z ciągłością h w $([1], 0)$.

7.22. Niech $f : X \to D^n$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w kulę $D^n \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A = f^{-1}(S^{n-1})$.

(A) Pokazać, że następujące dwa warunki są równoważne:

(i) istnieje przekształcenie ciągłe $\overline{f} : X \to S^{n-1}$ takie, że $\overline{f}|A = f|A$,

(ii) istnieje przekształcenie ciągłe $g : X \to D^n$ takie, że $f(x) \neq g(x)$ dla $x \in X$.

(B) Niech $f : D^n \to D^n$ będzie przekształceniem ciągłym takim, że $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ i obcięcie $f|S^{n-1} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ nie jest homotopijne z przekształceniem stałym. Pokazać, że dla każdego przekształcenia ciągłego $g : D^n \to D^n$ istnieje $x \in D^n$ takie, że $f(x) = g(x)$.

7.23. (A) Pokazać, że jeśli topologia $\mathcal{T}_i$ przestrzeni X_i ma przeliczalną bazę dla $i = 1, 2, \ldots$, to topologia $\mathcal{T}$ iloczynu kartezjańskiego $\Pi_{i \geqslant 1} X_i$ określona w 1.5.1 też ma przeliczalną bazę.

(B) Pokazać, że jeśli (X_i, d_i) jest przestrzenią metryczną zupełną dla $i = 1, 2, \ldots$, to iloczyn $(\Pi_{i\geqslant 1} X_i, d)$ z metryką $d = \max\{\min(d_i, 2^{-i}) : i = 1, 2, \ldots\}$, zob. 1.5.3, też jest przestrzenią zupełną.

Wskazówka. Zauważyć, że jeśli ciąg $(x_n)_n$ punktów jest ciągiem Cauchy'ego w iloczynie $(\Pi_{i\geqslant 1} X_i, d)$, to dla każdej współrzędnej i, ciąg $(x_n(i))_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni (X_i, d_i).

7.24. Pokazać, że iloczyn kartezjański $\Pi_{s\in S} X_s$ przestrzeni spójnych $(X_s, \mathcal{T}_s)$ z topologią określoną w Uzupełnieniu 7.3 jest przestrzenią spójną.

Wskazówka. Skorzystać z 4.1.7 i 4.1.8.

7.25. (A) Niech A będzie gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) z metryką d ograniczoną przez 1. Pokazać, że przekształcenie $f : X \to I^A$ określone wzorem $f(x) = (f_a(x) : a \in A)$, gdzie $f_a(x) = d(a, x)$, jest zanurzeniem homeomorficznym X w przestrzeń I^A będącą iloczynem kartezjańskim $(\Pi_{a\in A} I_a, \mathcal{T})$ odcinków z topologią określoną w Uzupełnieniu 7.3.

(B) Wywnioskować z (A), że przestrzeń metryzowalną X można zanurzyć w zwartą przestrzeń metryczną wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią ośrodkową, zob. Zadania 2.25 i 3.37 (B).

7.26. Niech $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{T}_\beta)$ będzie przestrzenią ultrafiltrów w zbiorze liczb naturalnych zdefiniowaną w części 7.4. Oznaczmy przez $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ rodzinę wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ i przez $(D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}, \mathcal{T})$ iloczyn kartezjański $(\Pi_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})} D_A, \mathcal{T})$, gdzie $(D_A, \mathcal{T}_A)$ jest dwupunktową przestrzenią dyskretną $(\{0, 1\}, \mathcal{T}_d)$, a topologia $\mathcal{T}$ jest określona w Uzupełnieniu 7.3.

(A) Pokazać, że jeśli $x_i \to x$ w przestrzeni $\beta\mathbb{N}$ (tzn. każde otoczenie x zawiera prawie wszystkie x_i), to $x_i = x$ dla prawie wszystkich i.

Wskazówka. Założyć, że ciąg $(x_i)_i$ jest różnowartościowy, korzystając z własności Hausdorffa przestrzeni $\beta\mathbb{N}$ określić ciąg parami rozłącznych bazowych zbiorów otwartych $O(A_1), O(A_2), \ldots$ taki, że $x_{i_j} \in O(A_j)$ dla $i_1 < i_2 < \ldots$ i sprawdzić, że $x \in O(A) \cap O(\mathbb{N} \setminus A)$ dla $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$.

(B) Pokazać, że przekształcenie $f : \beta\mathbb{N} \to D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ przyporządkowujące ultrafiltrowi $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jego funkcję charakterystyczną ($f(\mathfrak{Z})(A) = 1 \iff A \in \mathfrak{Z}$) jest zanurzeniem homeomorficznym $\beta\mathbb{N}$ w $D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$.

(C) Niech X będzie podprzestrzenią iloczynu $(D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}, \mathcal{T})$ złożoną z punktów $x \in D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$, których nośnik $\{A \subset \mathbb{N} : x(A) \neq 0\}$ jest przeliczalny. Pokazać, że w przestrzeni $(X, \mathcal{T}|X)$ z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny, ale przestrzeń X nie jest zwarta.

7.27. Przyjmijmy oznaczenia z Zadania 7.26.

(A) Wykazać, że przestrzeń $D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ jest ośrodkowa.

Wskazówka. Zbadać domknięcie zbioru $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, gdzie F_n jest skończonym zbiorem wszystkich $x \in D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ takich, że $x(A) = x(A \cap \{1, \ldots, n\})$ dla $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(B) Wywnioskować z (A), że istnieje funkcja ciągła z $\beta\mathbb{N}$ na $D^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ (w szczególności $\beta\mathbb{N}$ ma moc $2^{\mathfrak{c}}$).

Wskazówka. Skorzystać z Twierdzenia 7.4.3.

(C) Pokazać, że przestrzeń $I^{\mathfrak{c}}$ będąca iloczynem kartezjańskim $\mathfrak{c}$ odcinków z topologią określoną w Uzupełnieniu 7.3 jest ośrodkowa.

Wskazówka. Skorzystać z (A) i z Zadania 2.24 (A) (można też skorzystać z Przykładu 7.3.2).

7.28. Niech e_i będzie punktem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, którego wszystkie współrzędne, poza i−tą równą 1, są zerami, $e_0 = (0, \ldots, 0)$ i niech $\Delta(i_0, \ldots, i_m) =$

$\{\sum_{k=0}^{m} \lambda_k e_{i_k} : \sum_{k=0}^{m} \lambda_k = 1, \lambda_k \geqslant 0\}$ będzie sympleksem o wierzchołkach $e_{i_0}, \dots, e_{i_m}$ oraz $\Delta = \Delta(0, \dots, n)$.

(A) Wyprowadzić z 7.6.5 twierdzenie Knastera-Kuratowskiego-Mazurkiewicza: jeśli $F_0, \dots, F_n$ są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $\Delta(i_0, \dots, i_m) \subset \bigcup_{k=0}^{m} F_{i_k}$ dla każdego układu indeksów $0 \leqslant i_0 < \dots < i_m \leqslant n$, to $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że $\{\Delta \setminus F_0, \dots, \Delta \setminus F_n\}$ jest pokryciem sympleksu Δ i rozważyć przekształcenie $f : \Delta \to \Delta$ określone formułą $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) e_i$, gdzie $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ jest rozkładem jedynki wpisanym w to pokrycie.

(B) Niech $A_0, \dots, A_n$ będą zbiorami domkniętymi w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $\Delta \subset \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ i A_i jest rozłączne ze ścianą Δ_i sympleksu Δ przeciwległą do wierzchołka e_i ($\Delta_i = \Delta(e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$). Wykazać, że $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \neq \emptyset$.

(C) Wykazać, że istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\mathcal{F}$ jest skończoną rodziną zbiorów domkniętych w Δ o średnicach mniejszych niż δ i $\Delta = \bigcup \mathcal{F}$, to pewien punkt Δ należy do co najmniej $n+1$ elementów rodziny $\mathcal{F}$.

Wskazówka. Dobrać $\delta > 0$ takie, że każdy zbiór o średnicy mniejszej niż δ zawiera się w dopełnieniu pewnej ściany Δ_i sympleksu Δ i podzielić $\mathcal{F}$ na $n+1$ rozłącznych rodzin $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n$ tak, by zbiory $A_i = \bigcup \mathcal{F}_i$ spełniały założenia (B).

7.29. Niech $F_k^+ = \{(x_i) \in [-1,1]^n : x_k = 1\}$, $F_k^- = \{(x_i) \in [-1,1]^n : x_k = -1\}$ będą przeciwległymi ścianami kostki $[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$.

(A) Pokazać, że jeśli przekształcenie ciągłe $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunki $f(F_k^+) \subset \{(x_i) \in \mathbb{R}^n : x_k \leqslant 0\}$ oraz $f(F_k^-) \subset \{(x_i) \in \mathbb{R}^n : x_k \geqslant 0\}$ dla $k = 1, \dots, n$, to $(0, \dots, 0) \in f([-1,1]^n)$.

Wskazówka. Zasosować rozumowanie z dowodu Lematu 7.5.3 (A).

(B) Pokazać, że jeśli A_k^+, A_k^- są domknięte w $\mathbb{R}^n$, $F_k^+ \subset A_k^+$, $F_k^- \subset A_k^-$ oraz $[-1,1]^n \subset \bigcup_{k=1}^{n} (A_k^+ \cup A_k^-)$, to istnieje k takie, że $A_k^+ \cap A_k^- \neq \emptyset$.

Wskazówka. Skorzystać ze wskazówki do Zadania 6.18.

7.30. (A) Wyprowadzić z 7.7.1 i 6.2.1, że jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym i $f : K \to S^1$ jest przekształceniem ciągłym homotopijnym z przekształceniem stałym, to istnieje przekształcenie ciągłe $\widetilde{f} : K \to \mathbb{R}$ takie, że (w oznaczeniach z części 6.2) $f = E \circ \widetilde{f}$.

(B) Korzystając z (A) pokazać, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^n$ są zwarte, przecięcie $A \cap B$ jest spójne i $f : A \cup B \to S^1$ jest przekształceniem ciągłym takim, że oba obcięcia $f|A$ i $f|B$ są homotopijne z przekształceniem stałym, to f też jest homotopijne z przekształceniem stałym.

(C) Wyprowadzić z (B), że dla $n \geqslant 2$ każde przekształcenie ciągłe $f : S^n \to S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym (zob. też Zadanie 6.9 (B)).

(D) Udowodnić, że dla $n \geqslant 2$ sfera S^n jest jednosprzęgła: jeśli $S^n = A \cup B$, A, B są domknięte i spójne, to przecięcie $A \cap B$ jest spójne.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że $A \cap B = C \cup D$ gdzie $C, D \neq \emptyset$ są rozłącznymi zbiorami domkniętymi, określić przekształcenie ciągłe $f : S^n \to S^1$ takie, że $f|C \equiv 1$, $f|D \equiv -1$, $f(A) \subset \{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $f(B) \subset \{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ i korzystając z (A) pokazać, że f nie jest homotopijne z przekształceniem stałym.

7.31. Mówimy, że zbiór zwarty $C \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$ między punktami $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus C$ jeśli p i q leżą w różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^n \setminus C$.

(A) Sprawdzić, że dla zbioru zwartego $C \subset \mathbb{R}^n$ i drogi $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus C$ przekształcenie $H : C \times I \to S^{n-1}$ określone wzorem $H(x,t) = \pi_{\gamma(t)}(x)$ jest homotopią łączącą $\pi_{\gamma(0)}|C$ z $\pi_{\gamma(1)}|C$, gdzie $\pi_a : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to S^{n-1}$ jest określone formułą $\pi_a(x) = \frac{x-a}{||x-a||}$, zob. Uwaga 7.7.5.

(B) Wykazać, że zbiór zwarty $C \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$ między $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi_p|C$ i $\pi_q|C$ nie są homotopijne.

Wskazówka. Założyć, że p leży w składowej ograniczonej U zbioru $\mathbb{R}^n \setminus C$ nie zawierającej q i wywnioskować z twierdzenia Borsuka o kapeluszu 7.7.1, że warunek $\pi_p|C \sim \pi_q|C$ pociągałby istnienie ciągłego przedłużenia π_p na $\overline{U}$.

7.32. Udowodnić twierdzenie Janiszewskiego: jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^2$ są zbiorami zwartymi o spójnym przecięciu, $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$ i żaden ze zbiorów A, B nie rozcina $\mathbb{R}^2$ między p, q (zob. Zadanie 7.31), to także $A \cup B$ nie rozcina $\mathbb{R}^2$ między p, q.

Wskazówka. Dla $C = A, B$ oraz $A \cup B$ i $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ rozpatrzyć ilorazy $\frac{\pi_p|C}{\pi_q|C} : C \to S^1$ i skorzystać z Zadań 6.14 (A), 7.31 (B) oraz 7.30 (B).

7.33. Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem homeomorficznym z S^1.

(A) Wykazać, że jeśli V jest składową $\mathbb{R}^2 \setminus C$, to $\overline{V} \setminus V = C$ i wywnioskować stąd, że jeśli V, W są składowymi $\mathbb{R}^2 \setminus C$ oraz $c \in C$, to zbiór $V \cup \{c\} \cup W$ jest spójny.

Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia Borsuka o rozcinaniu 7.7.8.

(B) Udowodnić twierdzenie Jordana: dopełnienie C w $\mathbb{R}^2$ ma dokładnie dwie składowe U i V, przy czym $\overline{U} \setminus U = C = \overline{V} \setminus V$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ma trzy różne składowe U, V, W, przy czym składowa U jest ograniczona, wybrać punkt $x \in U$ i sprawdzić, że pozioma prosta przechodząca przez x zawiera odcinek $I = I(c, d) \in \mathbb{R}^2$ o końcach $c, d \in C$ taki, że $I \setminus \{c, d\} \subset U$. Rozważyć zbiory $A = K \cup I$, $B = L \cup I$, gdzie K, L są dwiema składowymi zbioru $C \setminus \{c, d\}$ i ustalić punkty $c_K \in K$, $c_L \in L$ oraz $p \in V$, $q \in W$. Rozpatrując zbiory $V \cup \{c_L\} \cup W$, $V \cup \{c_K\} \cup W$ wywnioskować z (A), że ani A, ani B nie rozcina $\mathbb{R}^2$ między punktami p, q, co jest sprzeczne z twierdzeniem Janiszewskiego, zob. Zadanie 7.32.

7.34. Niech $p : E \to B$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni Hausdorffa E na przestrzeń Hausdorffa B takim, że dla każdego punktu z B istnieje jego otoczenie U i homeomorfizm $h : p^{-1}(U) \to U \times S^1$ spełniający warunek $h(p^{-1}(u)) = \{u\} \times S^1$, dla $u \in U$.

(A) Niech $h : p^{-1}(U) \to U \times S^1$ będzie takie, jak wyżej i niech A będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej K takim, że każde przekształcenie ciągłe z A w S^1 jest homotopijne z przekształceniem stałym. Pokazać, że jeśli $g : A \to E$ oraz $f : K \to U$ są przekształceniami ciągłymi takimi, że $p \circ g = f|A$, to istnieje ciągłe przedłużenie $\tilde{g} : K \to E$ przekształcenia g takie, że $p \circ \tilde{g} = f$.

Wskazówka. Niech $\varphi = \pi \circ h \circ g : A \to S^1$, gdzie $\pi : U \times S^1 \to S^1$ jest rzutem. Korzystając z 7.7.1 przedłużyć φ do przekształcenia ciągłego $\tilde{\varphi} : K \to S^1$ i rozważyć $\tilde{g} = h^{-1} \circ (f, \tilde{\varphi})$.

(B) Niech $n \geqslant 3$. Wykazać, że jeśli $g : \partial I^n \to E$ oraz $f : I^n \to B$ są przekształceniami ciągłymi takimi, że $p \circ g = f|\partial I^n$, to istnieje ciągłe przedłużenie $\tilde{g} : I^n \to E$ przekształcenia g takie, że $p \circ \tilde{g} = f$.

Wskazówka. Pokazać, że dla każdego $\delta > 0$ kostkę I^n można podzielić hiperpłaszczyznami prostopadłymi do osi współrzędnych na domknięte kostki K_i o średnicach $< \delta$ ponumerowane tak, że dla każdego $A_i = K_i \cap (\partial I^n \cup K_1 \cup \ldots \cup K_{i-1})$, przekształcenia ciągłe z A_i w S^1 są homotopijne z przekształceniem stałym, zob. 7.30 (C). Następnie, korzystając z (A), powtórzyć rozumowanie z dowodu 7.10.2.

(C) Pokazać, że dla $n = 2$ teza (B) nie musi być spełniona.

Wskazówka. Dla rzutowania $p : I^2 \times S^1 \to I^2$ i przekształcenia $f = id_{I^2}$ określić $g : \partial I^2 \to E$ tak, żeby $p \circ g = f$ i pętla g była nieściągalna w $I^2 \times S^1$.

7.35. Niech $\mathbb{C}$ będzie płaszczyzną zespoloną i $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Sferę S^2 będziemy utożsamiać (na przykład przy pomocy rzutu stereograficznego) z płaszczyzną zespoloną z dodanym punktem w nieskończoności, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Wykazać, że przekształcenie Hopfa $p : S^3 \to S^2$ określone formułą

$$p(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} \text{ , jeśli } z_2 \neq 0 \\ \infty \text{ , jeśli } z_2 = 0 \end{cases}$$

nie jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Wskazówka. Pokazać, że dla $B = S^2$ i $E = S^3$, przekształcenie Hopfa $p : E \to B$ spełnia warunek opisany w 7.34. Następnie, utożsamiając D^4 z I^4 i S^3 z ∂I^4, wyprowadzić z 7.34 (B), że gdyby p przedłużało się do ciągłego $f : D^4 \to S^2$, to $g = id_{S^3}$ przedłużałoby się do ciągłego $\tilde{g} : D^4 \to S^3$, wbrew nieściągalności S^3.