Notatki z wykładu

Geometria różniczkowa II

AB-B.

Część I

Wprowadzenie do topologii różniczkowej

1 Definicja rozmaitości różniczkowej

Na wstępie zbierzemy pewne użyteczne definicje i twierdzenia z zakresu Topologii i Analizy matematycznej.

PARĘ TWIERDZEŃ TOPOLOGICZNYCH. Mówimy, że przestrzeń topologiczna jest *rozmaitością (wymiaru n)* gdy

1. jest przestrzenią ośrodkową Hausdorffa oraz
2. jest lokalnie homeomorficzna z rzeczywistą skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną ($A^n(R)$).

To drugie oznacza, że dla każdego punktu x istnieje takie otoczenie (otwarte), które jest homeomorficzne z pewnym podzbiorem otwartym przestrzeni afinicznej $A^n(R)$, lub równoważnie - jest homeomorficzne z cała przestrzenią afiniczną $A^n(R)$.

Wymiar rozmaitości X oznaczamy przez $dimX$.

Fakty. a. Przestrzeń homeomorficzna z rozmaitością wymiaru n jest rozmaitością wymiaru n.

b. Składowe spójne rozmaitości wymiaru n są rozmaitościami wymiaru n.

Będziemy mówić, że przestrzeń topologiczna X jest rozmaitością (topologiczną), jeśli istnieje taka liczba n, że X jest rozmaitością wymiaru n.

Twierdzenie o niezmienniczości obszaru. *Niech X będzie rozmaitością topologiczną wymiaru n i niech $U \subset R^n$ niech będzie obszarem. Jeśli $\phi : Y \to V \subset R^n$ jest homeomorfizmem na V, to V jest też obszarem w przestrzeni R^n.*

Twierdzenie to jest równoważne swemu uogólnieniu : *jeśli X jest rozmaitością wymiaru n oraz podzbiór otwarty $U \subset X$ jest homeomorficzny z podzbiorem $V \subset Y$, gdzie Y jest rozmaitością wymiaru n, to V jest podzbiorem otwartym w Y.* Ponad to można w twierdzeniu o niezmienniczości obszaru słowo "homeomorfizm" zastąpić przez "lokalny homeomorfizm".

Z twierdzenia tego wynika między innymi, że jeśli niepuste podzbiory otwarte $U \subset A^n(R)$, $V \subset A^m(R)$ są homeomorficzne, to $n = m$. Wobec tego *wymiar rozmaitości topologicznej jest przez tę rozmaitość wyznaczony jednoznacznie.*

Mimo tego, że twierdzenie o niezmienniczości obszaru wydaje się intuicyjnie łatwe do zaakceptowania, to jego pełny dowód nie jest prosty i nie jest objęty programem tego wykładu. Jednakże nie będziemy z tego twierdzenia w sposób istotny, w dalszej części wykładu, korzystać, gdyż dla przekształceń gładkich, do których dalej będziemy ograniczać swe rozważania twierdzenie o niezmienniczości obszaru jest wnioskiem z twierdzenia o rzędzie (o którym zaraz będzie mowa).

Z definicji rozmaitości oraz klasycznych twierdzeń Topologii ogólnej (na przykład z twierdzenia mówiącego, że każda przestrzeń ośrodkowa Hausdorffa jest parazwarta) wynika, że *rozmaitości są parazwarte*, a to oznacza, że w każde pokrycie otwarte $\{U_\alpha\}$ rozmaitości można wpisać otwarte, lokalnie skończone pokrycie $\{V_\beta\}$ i to w ten sposób, że każdy ze zbiorów V_β jest zawarty w pewnym zbiorze U_α wraz ze swoim domknięciem. Z tej własności rozmaitości będziemy w przyszłości jeszcze korzystać.

Uwagi i przykłady.

1. Prosta z podwójnym punktem jest lokalnie homeomorficzna z prostą afiniczną $A^1(R)$, ale nie jest rozmaitością, bo nie jest przestrzenią Hausdorffa.

2. Rozłączna suma continuum prostych R^1 jest przestrzenią Hausdorffa lokalnie homeomorficzn]ą z R^1, ale nie jest rozmaitością, bo nie jest przestrzenią ośrodkową.

3. Bardzo długa linia prosta, to znaczy graf (dobrego) porządku na zbiorze wszystkich przeliczalnych liczb porządkowych z naturalną topologią wyznaczoną przez topologię porządku na liczbach porządkowych i zwykłą topologię krawędziach grafu, jest Hausdorffa, lokalnie homeomorficzna z $A^1(R)$, spójna, ale nie jest to rozmaitość wymiaru 1, bo nie jest to przestrzeń ośrodkowa.

4. Skończenie wymiarowe przestrzenie afiniczne rzeczywiste $A^n(R)$ i zespolone $A^n(C)$ są rozmaitościami topologicznymi odpowiednio wymiarów n oraz $2n$.

5. Sfera $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1}; x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ jest rozmaitością wymiaru n.

6. Przestrzenie rzutowe (rzeczywiste $P^n(R)$ i zespolone $P^n(C)$) są rozmaitościami topologicznymi (odpowiednio wymiarów n oraz $2n$).

7. Niepuste podzbiory otwarte rozmaitości wymiaru n są rozmaitościami wymiaru n (np. $Gl(n, R) \subset A^{n^2}(R)$, $Gl(n, C) \subset A^{n^2}(C)$),

8. Produkty skończonej liczby rozmaitości są rozmaitościami, przy tym wymiar produktu rozmaitości wymiarów $n_1, \ldots, n_m$ równy jest sumie $n_1 + \ldots + n_m$.

9. Jedynymi spójnymi rozmaitościami wymiaru 1 są (z dokładnością do homeomorfizmu) rzeczywista prosta $A^1(R)$ i okręg S^1. Jedyną zwartą i spójną jednowymiarową rozmaitością jest zatem S^1. Klasyfikacja dwuwymiarowych zwartych i spójnych rozmaitości jest dobrze znana. Są to rozmaitości otrzymane z dwuwymiarowej sfery S^2 przez doklejanie rączek i wklejanie wstęg Mobiusa. Przeniesienie tych rezultatów na wyższe wymiary było jednym z najważniejszych zadań stawianych przed topologią.

10. Ilorazy X/G rozmaitości X przez ciągłe działania całkowicie dyskretne grupy dyskretnej G są rozmaitościami. Przez działanie całkowicie dyskretne w tej sytuacji rozumiemy działania spełniające następujący warunek:

    dla każdego punktu $x \in X$ istnieje takie otoczenie U_x tego punktu, że, dla każdego $g \in G$, $g \neq 1 \in G$, $U_x \cap gU_x = \emptyset$.

Podstawą i punktem wyjścia naszych dalszych rozważań będą też następujące

FAKTY I DEFINICJE ZNANE Z WYKŁADU ANALIZY. Przekształcenie ϕ podzbioru otwartego $U \subset A^n(R)$ w $A^m(R)$ zadane po wprowadzeniu afinicznych układów współrzędnych w $A^n(R)$ oraz $A^m(R)$ wzorem

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (\phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi_m(x_1, ..., x_n)),$$

gdzie $\phi_1, ..., \phi_m$ są funkcjami rzeczywistymi nazywamy gładkim, gdy te funkcje rzeczywiste są gładkie (to znaczy klasy C^∞ - nieskończenie wiele razy różniczkowalne). Ta własność nie zależy od wyboru współrzędnych. Przekształcenie gładkie podzbioru $U \subset A^n(R)$ na podzbiór otwarty $V \subset A^n(R)$ nazywamy diffeomorfizmem, gdy jest to różnowartościowe przekształcenie gładkie i odwzorowanie odwrotne jest też gładkie. Jeśli $\phi(U) \to V = \phi(U)$ jest diffeomorfizmem, to mówimy też, że ϕ zadaje układ współrzędnych na U oraz, że zadaje parametryzację zbioru V. Współrzędnymi punktu $u \in U$ jest tu układ $\phi(u) = (\phi_1(u), ..., \phi_n(u)) \in R^n \approx A^n(R)$. Często utożsamiamy w takiej sytuacji punkt z jego układem współrzędnych.

Jeśli

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (\phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi_m(x_1, ..., x_n)),$$

jest gładkim przekształceniem podzbioru otwartego $U \subset A^n(R) \approx R^n$ w przestrzeń $A^m(R) \approx R^m$ oraz $(a_1, ..., a_n) \in U$, to macierz $[\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(a_1, ..., a_n)]$ (i jest tu wskaźnikiem wiersza, j wskaźnikiem kolumny) nazywamy *macierzą Jacobiego* przekształcenia ϕ w punkcie $(a_1, ..., a_n)$ i oznaczamy przez $Jac_\phi(a)$.

Warto tu jeszcze przypomnieć, że złożenie przekształceń gładkich jest przekształceniem gładkim oraz, że przy składaniu przekształceń mnoży się macierze Jacobiego, to znaczy

$$Jac_{\phi\circ\psi}(a) = Jac_\phi(\psi(a)) \circ Jac_\psi(a).$$

Ponieważ macierzą Jacobiego przekształcenia tożsamościowego (w jednym układzie współrzędnych) jest macierz jednostkowa, zatem macierze Jacobiego diffeomorfizmów (a zatem układów współrzędnych) są w każdym punkcie odwracalne. Do wyliczenia macierzy Jacobiego przekształcenia

$$\phi : U \to V$$

wystarczy określić na U oraz V układ współrzędnych, ale w różnych układach współrzędnych macierze Jacobiego przekształcenia będą różne. Równe będą jednak ich rzędy (gdyż rząd macierzy nie ulega zmianie przy pomnożeniu macierzy przez macierz odwracalną). Interpretację rzędu macierzy Jacobiego podaje następujące

Twierdzenie o rzędzie. *Niech*

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (\phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi_m(x_1, ..., x_n)),$$

bedzie gładkim przekształceniem podzbioru otwartego $U \subset A^n(R) \approx R^n$ w przestrzeń afiniczną $A^m(R) \approx R^m$ niech $a = (a_1, ..., a_n) \in U$.

1. *Jeśli $n = m$ oraz macierz Jacobiego $Jac(\phi)(a)$ ma rząd równy n (to znaczy jest odwracalna), to istnieje takie otoczenie U_1 punktu a, że $\phi(U_1)$ jest zbiorem otwartym i $\phi|U_1$ jest diffeomorfizmem na $\phi(U_1)$. Istnieje zatem taki układ współrzędnych na $\phi(U_1)$, w którym $\phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$, dla wszystkich $(x_1, ..., x_n) \in U_1$.*

2. *Jeśli $n < m$ oraz rząd macierzy $Jac(\phi)(a)$ równa się n to istnieje taki układ współrzę dnych na pewnym otoczeniu V punktu $\phi(a)$, w którym ϕ dane jest wzorem*

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ...0).$$

3. *Jeśli $n > m$ oraz rząd macierzy $Jac(\phi)(a)$równa się m, to istnieje taki układ współrzędnych na pewnym otoczeniu U_1 punktu a, w którym ϕ dane jest wzorem*

$$\phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m).$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli $U \subset R^n$ oraz $\phi : U \to R^n$ jest gładkim przekształceniem, którego macierz Jacobiego w każdym punkcie ma rząd n, to $\phi(U) \subset R^n$ jest podzbiorem otwartym. Wobec tego w sytuacji gdy nasze rozważania ograniczymy do przekształceń gładkich (a zatem gdy homeomorfizmy ograniczamy do diffeomorfizmów), to wówczas twierdzenie o niezmienniczości obszaru jest konselwencją twierdzenia o rzędzie.

Mapy i atlasy oraz rozmaitości różniczkowe. *Mapa* dla przestrzeni X to homeomorfizm $\phi : U \to V$ podzbioru otwartego $U \subset X$ na podzbiór otwarty $V \subset R^n$, gdzie n jest jakąś liczbą naturalną. Często zamiast mówić, że ϕ jest mapą mówimy, że $\phi : U \to R^n$ jest *układem współrzędnych* na U. W tej sytuacji mówimy też, że $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$ jest *parametryzacją* (U przez $\phi(U)$).

Mówimy, że dwie mapy $\phi_1 : U_1 \to V_1$, $\phi_2 : U_2 \to V_2$ są zgodne gdy $\phi_2^\circ \phi_1^{-1}$ rozpatrywane po ograniczeniu do $\phi_1^(U_1 \cap U_2)$ jest diffeomorfizmem na $\phi_2(U_1 \cap U_2)$.

Mówimy, że zbiór map $\{\phi_i\}_{i\in I}$ (gdzie $\phi_i : U_i \to V_i$), jest *atlasem*, gdy $\bigcup U_i = X$. Mówimy, że atlas jest *zgodny*, lub, że jest to *różniczkowy atlas*, gdy każda par map ϕ_i, ϕ_j, $i, j \in I$ jest zgodna, a to znaczy, że dla każdej pary elementów i, j z I, przekształcenie $\phi_i^{-1}|\phi_i(U_i \cap U_j)$ złożone z ϕ_j jest diffeomorfizmem (podzbiorów otwartych przestrzeni afinicznych R^n).

Dwa atlasy różniczkowe uważamy za *równoważne* gdy ich suma (to jest atlas złożony z wszystkich map obu tych atlasów) jest też atlasem różniczkowym. Tak określona relacja równoważności atlasów jest relacją równoważności.

Rozmaitość różniczkowa to z definicji rozmaitość topologiczna z pewną klasą (wszystkich) wzajemnie równoważnych atlasów różniczkowych. Czasami zamiast "rozmaitość różniczkowa" mówimy "rozmaitość gładka".

Uwaga. Rozmaitość różniczkowa jest wyznaczona jednoznacznie przez podanie jednego atlasu różniczkowego na rozmaitości topologicznej. *Strukturą różniczkową* na rozmaitości nazywamy klasę równoważnych atlasów różniczkowych na tej rozmaitości topologicznej. Struktura różniczkowa jest zatem zadana przez wskazanie jednego atlasu.

Przykłady rozmaitości różniczkowych.

1. Wszystkie atlasy wyznaczone przez afiniczne układy współrzędnych na (rzeczywistej) przestrzeni afinicznej są równoważne. Każda przestrzeń afiniczna ma zatem strukturę różniczkową wyznaczoną jednoznacznie przez jej strukturę afiniczną.

2. *Sklejanie struktur różniczkowych.* Niech dana będzie rozmaitość topologiczna X i jej pokrycie zbiorami otwartymi $\{W_j\}$. Załóżmy, że każdy ze zbiorów W_j ma strukturę różniczkową zadaną przez atlas $\mathcal{A}_j$. Wówczas wszystkie mapy ze wszystkich tych atlasów pokrywają przestrzeń X, ale naogół nie tworzą zgodnego atlasu na przestrzeni X. Jeśli jednak są zgodne to atlas $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_j$ określa strukturę rozmaitości różniczkowej na X. Mówimy wtedy, że ta struktura dana jest przez sklejenie (struktur zadanych na podzbiorach otwartych W_j).

3. Każdy podzbiór otwarty rozmaitości różniczkowej ma naturalną (dziedziczoną ze struktury rozmaitości przez ograniczenie map do tego podzbioru) strukturę różniczkową.

4. *Przestrzeń rzutowa* $P^n(R)$. Niech $P^n(R)$ będzie zbiorem wszystkich prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych w R^{n+1}. Proste te są w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej z klasami abstrakcji relacji $\approx$ określonej w $R^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$

   $(x_0, ..., x_n) \approx (y_0, ..., y_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\lambda \in R$, że $x_i = \lambda y_i$ dla $i = 0, ..., n$. Każdemu punktowi $x \in P^n(R)$ odpowiada zatem układ
   $$(x_0, \ldots, x_n) \in R^{n+1}$$
   (nazywany jednorodnym układem współrzędnych punktu x) określony jednoznacznie z dokładnością do proporcjonalności, a cały zbiór $P^n(R)$ może być przedstawiony jako suma $n+1$ podzbiorów otwartych
   $$A_i^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in R^{n+1}; x_i \neq 0\}$$
   Przyporządkowując każdemu punktowi $x \in A_i^n$ taki układ jego współrzędnych jednorodnych, w którym i-ta współrzędna równa jest 1 z pominięciem tej współrzędnej, otrzymamy mapę $A_i^n \to A^n(R)$. Ten układ jest zgodny (sprawdź Czytelniku), a więc wyznacza strukturę różniczkową na przestrzeni rzutowej. Otrzymana tak rozmaitość różniczkowa jest zwarta.

5. Produkty skończonej liczby rozmaitości różniczkowych mają naturalną strukturę różniczkową otrzymaną przez "produktowanie map".

6. Podana wyżej konstrukcja rzeczywistej przestrzeni rzutowej ma swe ważne uogólnienie prowadzące też do (zwartych) rozmaitości nazywanych rozmaitościami Grassmanna lub Grassmannianami. Rozmaitości te są wyznaczone przez dwie liczby naturalne $n > r$, a jako zbiory składają się z podprzestrzeni wektorowych wymiaru r położonych w przestrzeni wektorowej R^n. Zbiór ten oznaczmy przez G_r^n. Topologia i struktura różniczkowa na tym zbiorze wyznaczona jest w następujący sposób. Zauważmy najpierw, że każda macierz rzędu r, o n kolumnach i r wierszach wyznacza r-wymiarową podprzestrzeń w R^n (jako podprzestrzeń rozpiętą na wierszach tej macierzy) i każda podprzestrzeń jest wyznaczona w ten sposób przez pewną macierz. Przy tym permutacje wierszy macierzy, pomnożenie wiersza przez liczbę rzeczywistą różną od zera, dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez

przez liczbę rzeczywistą nie zmienia tej wyznaczonej przez macierz podprzestrzeni. Jeśli dana podprzestrzeń L jest wyznaczona przez taką macierz A, to można wskazać takie jej kolumny $(i_1 < i_2 < ... < i_r)$, które tworzą $(r \times r)$- macierz odwracalną $A(i_1, ..., i_r)$. Zatem w wyniku podanych wyżej operacji na macierzy A można otrzymać taką macierz A', której kolumny o wskaźnikach $i_1, ..., i_r$ tworzą macierz jednostkową I_r. Macierz A' wyznacza też podprzestrzeń L, ale A' jest już jednoznacznie wyznaczona przez L oraz wskaźniki $i_1, ..., i_r$.

Jeśli teraz przez $G^n_r(i_1, ..., i_r)$ oznaczymy zbiór tych podprzestrzeni, które są wyznaczone przez takie macierze A, których kolumny $i_1, ..., i_r$ tworzą macierz odwracalną, to po pierwsze, zbiory tej postaci pokrywają cały zbiór G^n_r, a po drugie, każdy element w $G^n_r(i_1, ..., i_r)$ jest wyznaczony przez jednoznacznie zadaną macierz A', której ograniczenie do kolumn $i_1, ..., i_r$ jest macierzą jednostkową. Przy tym każda macierz odpowiada na tej drodze pewnemu elementowi ze zbioru $G^n_r(i_1, ..., i_r)$. Każda taka macierz jest jednoznacznie wyznaczona przez pozostałe swe kolumny tworzące macierz o $(n - r)$ kolumnach i r-wierszach. Wobec tego każdemu elementowi z $G^n_r(i_1, ..., i_r)$ możemy przyporządkować $(n - r) \times r$- macierz i odwrotnie. Korzystając z możliwości utożsamienia zbiorów $G^n_r(i_1, ..., i_r)$ ze zbiorami macierzy można zadać na zbiorach $G^n_r(i_1, ..., i_r)$ topologię oraz strukturę rozmaitości różniczkowej. Struktury te na częściach wspólnych tych zbiorów w zbiorze G^n_r są zgodne i prowadzą do topologii i struktury różniczkowej na G^n_r. Otrzymana tak rozmaitość różniczkowa jest zwarta.

7. Narzuca się tu pytanie czy na każdej rozmaitości topologicznej można określić zgodny układ map. Odpowiedź jest negatywna (Sibenmann), a jej uzasadnienie nie jest łatwe. Wobec tego nie każda rozmaitość topologiczna dopuszcza strukturę różniczkową.

Podzbiór Y rozmaitości różniczkowej X nazywamy *podrozmaitością* gdy: dla każdego $y \in Y$ istnieje taki układ współrzędnych na $U \subset X$ wokół y, że (po utożsamieniu punktu z układem jego współrzędnych)

$$U \cap Y = \{(x_1, \dots, x_m) \in U;\ x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$$

Zauważmy, że wówczas na $U \cap Y$ mamy mapę (układ współrzędnych):

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Tak otrzymany układ map na Y jest zgodny, a zatem Y jest w naturalny sposób rozmaitością.

Wszystkie podane wyżej definicje dotyczące sytuacji rzeczywistej różniczkowej można przenieść na przypadek analityczny zespolony. Prowadzi to do ważnych pojęć *zespolonej mapy analitycznej*, *zespolonego atlasu analitycznego*, *zespolonej rozmaitości analitycznej*, *zespolonej struktury (analitycznej)* oraz *podrozmaitości analitycznej zespolonej*. Często w tych sytuacjach będziemy pomijać słowo "analityczny" i zamiast pisać "analityczny zespolony" będziemy pisać "zespolony".

Łatwo jest stwierdzić, że każda zespolona rozmaitość analityczna jest jako rozmaitość topologiczna parzysto wymiarowa (i orientowalna, to pojęcie zdefiniujemy na jednym z następnych wykładów) . Okazuje się jednak, że te warunki nie są dosteczne na to by na takiej rozmaitości można było wprowadzić zgodny zespolony analityczny atlas (a zatem strukturę zaspoloną).Na przykład Hopf i Ehresman wykazali, że takiej struktury nie można wprowadzić na sferze S^4. Strukturę zespoloną można natomiast wprowadzić na każdym produkcie $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ nieparzysto wymiarowych sfer (Calabi i Eckmann) oraz na każdej orientowalnej powierzchni.

Każda struktura zespolona określona na rozmaitości wyznacza na niej pewną strukturę różniczkową, gdyż każda mapa $U \to C^n$ wyznacza mapę $U \to R^{2n}$ przy tym mapy zgodne analitycznie wyznaczają mapy zgodne różniczkowo.

2 Przekształcenia gładkie.

Niech X będzie rozmaitością różniczkową, a $U \subset X$ podzbiorem otwartym. Funkcję $f : U \to R$ nazywamy *gładką* (lub klasy C^∞), gdy dla każdej mapy $\phi : U_o \to V \subset R^n$ (z pewnego, lub równoważnie: każdego, atlasu rozmaitości różniczkowej X) złożenie :

$$\phi(U_o \cap U) \overset{\phi^{-1}|\phi(U_o \cap U)}{\longrightarrow} U_o \xrightarrow{f} R$$

jest funkcją gładką (w sensie analizy II) określoną na podzbiorze otwartym w R^n o wartościach w R.

Zanotujmy łatwe do udowodnienia fakty:

1. Funkcje stałe są gładkie.

2. Jeśli $\phi : U \to R^n$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ jest mapą, to każda z funkcji ϕ_i jest gładka.

3. Suma i iloczyn funkcji gładkich są gładkie.

Funkcje gładkie określone na podzbiorze U rozmaitości różniczkowj X tworzą R-algebrę (tj. pierścień z podpierścieniem izomorficznym z ciałem R). Algebrę tę oznaczamy przez $\mathcal{O}_X(U)$.

Przyporządkowanie

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$$

jest *snopem funkcyjnym*. Oznacza to, że:

1. jeśli $V \subset U$ są otwartymi podzbiorami w X oraz $f \in \mathcal{O}_X(U)$, to $f|V \in \mathcal{O}_X(V)$,

2. jeśli U jest podzbiorem otwartym w X, $\{U_j\}_{j \in J}$ jest otwartym pokryciem zbioru U oraz f jest taką funkcją $U \to R$, że $f|U_j \in \mathcal{O}_X(U_j)$, to $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Niech $\rho : X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym rozmaitości różniczkowych. Wtedy następujące dwa warunki są równoważne:

- niech $x \in X$, niech $\phi : U \to R^n$, $\psi : V \to R^m$ będą mapami określonymi na otoczeniach odpowiednio punktów x i $y = \rho(x)$. Niech V_o będzie takim otoczeniem punktu y, że $\rho^{-1}(V_o) \subset U$. Wtedy przekształcenie

$$\phi(\rho^{-1}(V_o)) \to R^m$$

  będące złożeniem kolejno ϕ^{-1}, ρ oraz ψ jest gładkim (różniczkowalnym) przekształceniem otwartego zbioru położonego w R^n w R^m (w sensie analizy II),

- jeśli $f \in \mathcal{O}_Y(V)$, to $f \circ \rho \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Przekształcenie ρ spełniające którykolwiek z tych warunków (a więc oba warunki) nazywamy *gładkim* lub *różniczkowalnym*.

Identyczność jest przekształceniem różniczkowalnym. Złożenie przekształceń różniczkowalnych jest przekształceniem różniczkowalnym. Wobec tego rozmaitości różniczkowe wraz z przekształceniami różniczkowalnymi tworzą kategorię. Izomorfizmy w tej kategorii nazywa się *dyffeomorfizmami*. Wszystkie diffeomorfizmy danej rozmaitości różniczkowej na siebie tworzą grupę przekształceń oznaczaną przez $Diff(X)$.

DYGRESJA. Pojęcie diffeomorfizmu pozwala na następującą konstrukcję rozmaitości różniczkowych. Niech X będzie przestrzenią toplogiczną pokrytą przez zbiory otwarte $\{X_i\}_{i \in T}$. Załóżmy że każdy ze zbiorów X_i ma strukturę rozmaitości różniczkowej oraz, że na przecięciach $X_i \cap X_j$, dla $i, j \in T$, struktury wyznaczone przez struktury X_i oraz X_j są identyczne. Wtedy istnieje dokładnie jedna taka struktura różniczkowa na X, której ograniczenie do podzbiorów otwartch X_i pokrywa się ze strukturą pierwotnie daną na tych zbiorach.

Ilorazy X/G rozmaitości X przez ciągłe działania całkowicie dyskretne grupy dyskretnej G są rozmaitościami różniczkowymi. Istotnie jeśli $x \in X$ oraz U_x jest takim otoczeniem punktu x, że $gU_x \cap U_x = \emptyset$ dla każdego $g \in G \setminus \{1\}$, to to przekształcenie ilorazowe $X \to X/G$ przekształca U_x homeomorficznie na swój obraz. Przy tym ten obraz jest podzbiorem otwartym i na tym podzbiorze możemy wprowadzić strukturę różniczkową korzystając ze struktury różniczkowej na $U_x \subset X$. Poniweaż G działa przez diffeomorfizmy zatem te struktury są zgodne i strukturę różniczkową na X/G możemy teraz wprowadzić sklejając te struktury na wszystkich tak otrzymanych zbiorach.

Od tego momentu strzałki $\to$ oznaczać będą zawsze morfizmy z tej kategorii (t.zn. przekształcenia gładkie).

Niech $\rho : X \to Y$ i niech $x \in X$. *Rzędem przekształcenia ρ w punkcie x* nazywamy rząd macierzy Jacobiego przekształcenia ρ w punkcie x (liczony w dowolnych mapach wokół punktów x i $\rho(x)$; rząd macierzy Jacobiego nie zależy od wyboru map). Rząd ten oznaczamy przez $r(d\rho)_x$. Mówimy, że ρ jest *immersją* w punkcie x, gdy $r(d\rho)_x = dimX$, a *submersją* - gdy $r(d\rho)_x = dimY$.

Z *twierdzenia o rzędzie* (analiza II) wynika, że jeśli :

a. ρ jest immersją w x, to lokalnie ρ jest włożeniem, tzn, w pewnych układach współrzędnych wokół x i $\rho(x)$ mamy

$$x = (x_1, \dots, x_m) \overset{\rho}{\mapsto} (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

b. ρ jest submersją w punkcie x, to lokalnie ρ jest rzutowaniem, tzn, w pewnych układach współrzędnych wokół x i $\rho(x)$ mamy

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) \overset{\rho}{\mapsto} (x_1, \dots, x_n).$$

Mówimy, że ρ jest *immersją (submersją)* gdy przekształcenie ρ jest takie w każdym punkcie $x \in X$.

Zanurzenie podrozmaitości $Y \hookrightarrow X$ jest immersją.

Twierdzenie. *Jeśli $\rho : X \to Z$ jest immersją, to dla każdego $x \in X$ istnieje takie otoczenie U, że $\rho(U) \subset Z$ jest podrozmaitością.*

Jeśli $\rho : X \to Z$ jest submersją, to dla każdego $z \in Z$, $\rho^{-1}(z)$ jest podrozmaitością.

Uwaga ! Z tego, że $\rho : X \to Z$ jest immersją nie wynika, że $\rho(X)$ jest podrozmaitością.

Przykłady. 1. Niech X będzie dwuwymiarowym torusem $S^1 \times S^1$. Wtedy X można przedstawić jako $(R \times R)/(Z \times Z)$ i przekształcenie $\rho : R \to R \times R/Z \times Z = X$ dane jako złożenie:

- przekształcenia $\rho_a; R \to R \times R$, gdzie $a \in R$ jest ustaloną, różną od zera, liczbą rzeczywistą i $\rho_a(x) = (x, ax) \in R \times R$, dla każdego $x \in R$ oraz

- kanonicznego przekształcenia $R \times R \to R \times R/Z \times Z$

jest immersją. Natomiast obraz $\rho(R) \subset X$ jest podrozmaitością wtedy i tylko wtedy gdy a jest liczbą wymierną

2. Niech $U \subset R^n$ będzie podzbiorem otwartym. Niech $f \in \mathcal{O}_{R^n}(U),$. Jeśli w każdym punkcie $x \in U$ nie wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są równe zero (tj. gdy $grad(f)(x) \neq 0$, dla każdego $x \in U$), to F jest submersją. Wobec tego, w tej sytuacji, dla każdego $r \in R$ równanie

$$f(x) = r$$

określa podrozmaitość w U. Warunki te są na przykład spełnione gdy $U = R^n - \{0\}, f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots, x_n^2$.

Wszystkie podane wyżej definicje łatwo przenoszą się na przypadek analityczny zespolony. Przekształcenia, które w sytuacji rzeczywistej nazywają się różniczkowymi, w sytuacji zespolonej nazywają się *holomorficznymi.* Izomorfizmy w kategorii rozmaitości zespolonych analitycznych nazywają się *przekształceniami biholomorficznymi* lub brzydziej, ale krócej, *biholomorfizmami.*

Wiemy już, że każdą rozmaitość analityczną można traktować jak różnicz- kową rzeczywistą. Dodajmy tu, że każde przekształcenie holomorficzne można traktować jako przekształcenie różniczkowe, a każdy biholomorfizm jako dyffeomorfizm. Nie należy jednak sądzić, że dwie dyffeomorficzne rozmaitości zespolone muszą być biholomorficzne.

Przykład. Rozpatrzmy w przestrzeni R^2 kratę $\Gamma(\alpha, \beta)$ generowaną przez dwa liniowo niezależne wektory α, β. Krata ta jest grupą izomorficzną z Z^2. Działa ona na R^2 w sposób wolny i wyznacza iloraz $R^2/\Gamma(\alpha, \beta)$ dyffeomorficzny z torusem $S^1 \times S^1$. Z drugiej strony na rozmaitości R^2 można wprowadzić strukturę zespoloną utożsamiając R^2 z płaszczyzną zespoloną C. Wówczas działanie kraty $\Gamma(\alpha, \beta)$ jest holomorficzne, a zatem otrzymamy ilorazową strukturę zespoloną na torusie $C/\Gamma(\alpha, \beta)$. Okazuje się, że tak otrzymane struktury naogół nie są biholomorficzne (np. dla pary $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$ oraz dla drugiej pary $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (cos\frac{\pi}{3}, sin\frac{\pi}{3})$), chociaż łatwo widzieć, że są zawsze dyffeomorficzne.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że na dowolnej rzeczywistej rozmaitości różniczkowej można określić pojęcie *zespolonej funkcji gładkiej*, jako takiej funkcji o wartościach zespolonych, której części rzeczywista i urojona są gładkie. Funkcje takie podobnie jak funkcje gładkie rzeczywiste tworzą pierścień (zawierający ciało C złożone z funkcji stałych).

Uwagi

1. Niech $\rho : X \to Z$. Mówimy, że $x \in X$ jest *punktem krytycznym*, a $\rho(x)$ jest *wartością krytyczną* przekształcenia ρ, gdy ρ nie jest submersją w punkcie x.

   Twierdzenie Sarda. *Niech $\rho : X \to Z$. Zbiór wartości krytycznych przekształcenia ρ ma miarę zero w Z.*

2. Niech x będzie punktem rozmaitości różniczkowej X. *Pierścieniem lokalnym* punktu x na X nazywa się pierścień funkcji gładkich określonych na pewnym (zależnym od funkcji) otoczeniu punktu x. Przy tym dwie takie funkcje uważamy za równe gdy są identyczne na jakimś otoczeniu tego punktu. Pierścień lokalny punktu x na X oznaczamy przez $\mathcal{O}_{x,X}$. Struktura tego pierścienia i jego własności algebraiczne, w przypadku rzeczywistym gładkim, są bardzo złożone.

   W przypadku zespolonym analitycznym pierścień ten jest izomorficzny z podpierścieniem pierścienia szeregów formalnych $C[[z_1, \ldots, z_n]]$ i podobnie jak ten pierścień jest noetherowski i ma np. własność UFD.

3. Konstrukcje globalnych (tj. określonych na całej rozmaitości X) funkcji gładkich są uproszczone dzięki następującemu **twierdzeniu o podziale jedynki**: Niech $\{U_j\}_{j \in J}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości X. Wtedy istnieje pokrycie lokalnie skończone $\{V_i\}_{i \in I}$ wpisane w pokrycie $\{U_j\}_{j \in J}$ oraz taki układ funkcji gładkich $\{f_i\}_{i \in I}$, że:

   a. $\overline{supp(f_i)} \subset V_i$,

   b. $\sum\limits_{i \in I} f_i = 1$.

   Jego dowód opiera na parazwartości przestrzeni X oraz na istnieniu funkcji gładkiej określonej na linii prostej R^1 dodatniej we wszystkich punktach odcinka $(0, 1)$ i równej zero poza nim wszystkie pochodne w 0 oraz 1 są równe 0 (funkcją taką jest na przykład $exp(\frac{-1}{x(x-1)})$). Z istnienia podziałów jedynki przyjdzie nam korzystać na następnych wykładach. Twierdzenie to jest z gruntu fałszywe w przypadku zespolonym analitycznym.

4. Interesującym jest pytanie czy na danej rozmaitości topologicznej można określić atlasy wyznaczające niediffeomorficzne rozmaitości różniczkowe. Olbrzymim zaskoczeniem był wynik Milnora, że takie niediffeomorficzne struktury istnieją na sferze S^7. Był to pierwszy wynik

tego rodzaju. Potem podano inne przykłady takich sytuacji i udowodniono, że na rozmaitościach zwartych liczba niediffeomorficznych struktur różniczkowych jest skończona (na powierzchniach zwartych taka struktura jest jedna). Zapewne jeszcze większym zaskoczeniem niż wynik Milnora było twierdzenie (Friedman) o continuum niediffeomorficznych struktur różniczkowych na cztero-wymiarowej przestrzeni afinicznej $A^4(R)$.

5. Z twierdzenia o rzędzie wynika, że jeśli $grad(f)(x) \neq 0$, to funkcja f w pewnym otoczeniu punktu x może być przyjęta za współrzędną. Jeśli $grad(f)(x) = 0$, to osobliwość funkcji f w punkcie x jest możliwie najmniejsza, gdy rząd Pfafianu $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial X_j}]$ jest równy $dim(X)$. W tej sytuacji można udowodnić, że istnieje taki układ współrzędnych wokół x, w którym funkcja f wyraża się wzorem

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 \ldots - x_n^2$$

   Wynik ten nazywa się **Lematem Morse'a**. Liczba $2k-n$ nie zależy od przyjętego do jego obliczenia układu współrzędnych i nazywa się *indeksem funkcji f w punkcie x*. Funkcję nazywa się *funkcją Morse'a* gdy dopuszcza tylko takie najsłabsze osobliwości i to tylko w skończonej liczbie punktów. Indeksy przyjmowane przez dowolną funkcję Morse'a na zwartej rozmaitości X wyznaczają typ homotopijny tej rozmaitości.

   Twierdzenie Morse'a podaje dokładniejsze sformułowanie tego faktu. Już na tym przykładzie widać, że globalne własności topologiczne rozmaitości wyrażane są przez własności różniczkowe.

W historycznym rozwoju geometrii różniczkowej najpierw zajmowano się jedynie podrozmaitościami przestrzeni afinicznych $A^n(R)$. Okazje się, że nie ma innych rozmaitości: *każda rozmaitość różniczkowa jest (diffeomorficzna z) podrozmaitością (w tej sytuacji mówimy też, że rozmaitość daje się zanurzyć w) przestrzeni afinicznej odpowiedniego wymiaru.*

Rezultat ten uzyskuje się rozważając dla dowolnej rozmaitości X i liczby naturalnej n przestrzeń $C(X, R^n)$ wszystkich różniczkowych przekształceń $X \to R^n$. Po wprowadzeniu w niej topologi zwarto-otwartej wyróżnia się podprzestrzeń $Im(X; R^n)$ złożoną z immersji oraz podprzestrzeń $E(X; R^n)$ złożoną z diffeomorfizmów na swój obraz. Okazuje się (Whitney), że jeśli $n >$

$2\,dim(X)$, to $E(X; R^n) \neq \emptyset$, a zatem każda rozmaitość X jest diffeomorficzna z podrozmaitością przestrzeni afinicznej wymiaru $2\,dim(X)+1$. Okazuje się dalej, że dla rozmaitości zwartych ten wymiar można zawsze zmniejszyć o jeden, tj każda zwarta rozmaitość X jest diffeomorficzna z podrozmaitością przestrzeni afinicznej wymiaru $2\,dim(X)$. Określenie dla rozmaitości minimalnego wymiaru przestrzeni zawierającą ją jako podrozmaitość jest pytaniem ciekawym i często trudnym. Okazuje się, że każdą trójwymiarową rozmaitość zwartą można zanurzyć w R^5, a ogólna hipoteza mówi, że: *każdą zwartą rozmaitość X wymiaru n można zanurzyć w przestrzeni R^m, o ile tylko $m > 2n - l(n)$, gdzie $l(n)$ jest liczbą jedynek w zapisie dwójkowym liczby n.*

Na przykład $l(5) = 2$.

3 Wiązki wektorowe

Niech X będzie rozmaitością różniczkową, a V rzeczywistą przestrzenią wektorową. *Trywialną wiązką wektorową* (o bazie X i włóknach V) nazywamy produkt $X \times V$ wraz z rzutowaniem na pierwszy czynnik $\pi : X \times V \to X$.

Wiązką wektorową (o bazie X i włóknach V) nazywamy rozmaitość różniczkową. B wraz z przekształceniem $\pi : B \to X$ oraz ze strukturą przestrzeni wektorowej w każdym włóknie $\pi^{-1}(x)$, o następujących własnościach:

dla każdego $x \in X$ istnieje otoczenie U oraz taki dyffeomorfizm $\rho : \pi^{-1}(U) \to U \times V$, który odwzorowuje każdą przestrzeń wektorową $\pi^{-1}(x)$, gdzie $x \in U$, izomorficznie na przestrzeń $\{x\} \times V$.

Wiązka trywialna, oczywiście, jest wiązką.

Przekształcenie $\rho : B_1 \to B_2$ przestrzeni dwóch wiązek $\pi_1 : B_1 \to X, \pi_2 : B_2 \to X$ nazywamy izomorfizmem, gdy jest dyffeomorfizmem oraz, dla każdego $x \in X$, ρ przekształca włókno $\pi_1^{-1}(x)$ izomorficznie (w sensie teorii przestrzeni wektorowych) na włókno $\pi_2^{-1}(x)$.

Jeśli $\mathcal{B} = \{\pi : B \to X\}$ jest wiązką wektorową i dla podzbioru otwartego $U \subset X$, wiązka $\pi^{-1}(U) \to U$ jest trywialna, to mówimy, że zbiór U *trywializuje* wiązkę $\mathcal{B}$, a każdy izomorfizm $\pi^{-1}(U) \to U \times V$ nazywamy *trywializującym.* Mówimy, że pokrycie $\{U_i\}$ *trywializuje* wiązkę, gdy każdy ze zbiorów U_i ma tę własność.

Niech $\mathcal{B}$ będzie wiązką nad X i niech $U \subset X$ będzie podzbiorem otwartym. *Przekrojem* (albo *polem*) wiązki $\mathcal{B}$ nad U nazywamy takie przekształcenie różniczkowalne $s : U \to \pi^{-1}(U)$, że $\pi \circ s = id_U$.

Zbiór $\mathcal{B}(U)$ wszystkich przekrojów wiązki $\mathcal{B}$ nad U jest zamkniety ze względu na dodawamie oraz ze względu na mnożenie przez funkcje z $\mathcal{O}(U)$ i z tą strukturą jest $\mathcal{O}(U)$-modułem.

Przyporządkowanie $U \mapsto \mathcal{B}(U)$ wraz z przekształceniami $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(V)$ dla $V \subset U$, określonymi jako ograniczenie pola danego na U do pola na V wyznacza snop $\mathcal{O}_X$-modułów. Snop ten oznaczamy tym samym symbolem $\mathcal{B}$ jak wiązkę, która ten snop wyznacza.

Uwaga. Stwierdzenie, że $\mathcal{B}$ jest snopem oznacza w tym przypadku, że struktury $\mathcal{O}(U)$-modułów są zgodne z ograniczeniami do podzbiorów otwartych $V \subset U$ oraz że : jeśli $\{U_i\}$ jest pokryciem otwartym podzbioru U, a odwzorowanie (z założenia niekoniecznie różniczkowalne) $s : U \to \pi^{-1}(U)$ po obcięciu do każdego U_i należy do $\mathcal{B}(U_i)$, to $s \in \mathcal{B}(U)$ (a zatem s jest różniczkowalne).

Uwaga. Jeśli U trywializuje $\mathcal{B}$, to $\mathcal{O}(U)$-moduł $\mathcal{B}(U)$ jest wolny i odwrotnie. Trudniej jest udowodnić, że $\mathcal{O}(X)$-moduł $\mathcal{B}(X)$ jest zawsze projektywny.

Niech $\{U_i\}_{i\in I}$ bedzie pokryciem trywializującym i niech $\pi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times V$ będą izomorfizmami trywializującymi. Wtedy, dla każdego $x \in U_i \cap U_j$ (dla $i, j \in I$), złożenie $\pi_j \circ \pi_i^{-1}$ wyznacza przekształcenie różniczkowalne $\gamma_{i,j} : U_i \cap U_j \to Gl(V)$. Rodzina tak otrzymanych przekształceń $\{\gamma_{i,j}\}_{(i,j)\in I\times I}$ spełnia następujący warunek zwany *warunkiem 1-kocyklu*:

$$\gamma_{i,j}(x)\gamma_{j,k}(x) = \gamma_{i,k}(x),$$

dla $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Odwrotnie, jeśli dane jest pokrycie $\{U_i\}$ rozmaitości X oraz 1-kocykl $\{\gamma_{i,j}\}$ (to jest rodzina spełniająca warunek 1-kocyklu) o wartościach w $Gl(V)$, to możemy skonstruować wiązkę (która jest trywializowana przez $\{U_i\}$ i wyznacza 1-kocykl $\{\gamma_{i,j}\}$). W tym celu rozpatrujemy rozłączne zbiory $U_i \times V$, następnie identyfikujemy (”sklejamy”) punkt $(x, v) \in (U_i \cap U_j) \times V \subset U_i \times V$ z punktem $(x, \gamma_{i,j}(x)v)) \in U_j \times V$. Dzięki warunkowi 1-kocyklu identyfikacje te są zgodne i prowadzą do szukanej wiązki $\mathcal{B}$.

Dwa 1-kocykle $\{\gamma_{i,j}\}$ oraz $\{\delta_{i,j}\}$ o wartościach w $Gl(V)$ wyznaczają izomorficzne wiązki nad X wtedy i tylko wtedy gdy są *kobrzegowe* tzn. gdy istnieje taka rodzina przekształceń przekształcenia $\tau_i : U_i \to GL(V)$, gdzie $i \in I$, że $|\tau_i(x)\delta_{i,j}\tau_j(x)^{-1} = \gamma_{i,j}(x)$, dla $x \in U_i \cap U_j$.

Wobec tego zbiór klas izomorfizmów wiązek na X o włóknach V, a trywializowanych przez pokrycie $\{U_i\}$, jest we wzajemnie jednoznacznej odpowiedności ze zbiorem 1-kocykli na $\{U_i\}$ o wartościach w V modulo relacja kobrzegowości. Przechodząc do granicy z pokryciami można tak opisać wszystkie wiązki na X.

Biorąc produkty $\times$, iloczyny tensorowe $\otimes$ lub m-te potęgi zewnętrzne 1-kocykli otrzymujemy operacje produktowania $\times$, iloczynów tensorowych $\otimes$ i potęg zewnętrznych Λ^m wiązek. Biorąc dla danego 1-kocyklu $\{\gamma_{i,j}\}$, 1-kocykl sprzężony $\{(\gamma^*_{i,j})^{-1}\}$, otrzymujemy wiązkę sprzężoną $\mathcal{B}^*$ z włóknem V^*. Pozwala to dla dowolnej wiązki konstruować jej *wiązki tensorowe* dowolnego typu (k, r).

Uwaga. Wiązki wektorowe o włóknach jednowymiarowych (dokładniej ich klasy izomorfizmów) tworzą grupę abelową, jeśli za działanie przyjąć iloczyn tensorowy. Elementem neutralnym w tej grupie jest wiązka trywialna, a elementem przeciwnym do danej wiązki jest jej wiązka sprzężona.

Wszystko o czym była mowa wyżej można łatwo przenieść na przypadek analityczny zespolony określając najpierw pojęcie trywialnej zespolonej wiązki holomorficznej (będzie to $X \times V \to X$, gdzie X jest rozmaitością zespoloną, a V zespoloną przestrzenią liniową), następnie definiując ogólne pojęcie holomorficznej wiązki zespolonej (jako takiej, która , mówiąc w skrócie, jest lokalnie trywialna). Miejsce gładkich 1-kocykli grają w tej zespolonej teorii holomorficzne 1-kocykle (grupa $Gl(n, C)$ ma strukturę rozmaitości zespolonej !). Miejsce gładkich pól wektorowych zajmują tu holomorficzne pola wektorowe.

Oczywiście każdą wiązkę zespoloną holomorficzną (o włóknach wymiaru n) można traktować jako wiązkę różniczkową rzeczywistą (o włóknach wymiaru $2n$). Wiązki analityczne zespolone, które są izomorficzne prowadzą do izomorficznych wiązek różniczkowych, ale nie odwrotnie. Nieizomorficzne wiązki analityczne zespolone mogą prowadzić do izomorficznych różniczkowych. W związku z tym teoria wiązek analitycznych zespolonych jest znacznie bardziej subtelna i złożona niż ich rzeczywistych krewnych.

Wiązki gładkie (nie holomorficzne !) zespolone rozpatruje sę też nad rzeczywistymi rozmaitościami różniczkowymi. Ich definicja jest taka sama jak definicja wiązek rzeczywistych z tym tylko, że wszędzie słowo "rzeczywisty" należy zastąpić przez słowo "zespolony", a literę R przez C. Oznacza to między innymi, że 1-kocykle są gładkimi (a nie holomorficznymi, bo to na rozmaitości rzeczywistej nie ma sensu) funkcjami o wartościach w $Gl(n, C)$. Takie zespolone wiązki nad rozmaitościami rzeczywistymi można uzyskać przez *"kompleksyfikację"* (tj. domnażanie tensorowe $\otimes_R$ przez C) wiązek rzeczywistych.

Korzystając z gładkich podziałów jedynki, łatwo jest dowolne pole danej wiązki wektorowej zadane na jakimś zbiorze otwartym $U \subset X$ rozszerzyć "przez zero" na całą rozmaitość X nie zmieniając jego wartości w pewnym otoczeniu dowolnego ustalonego punktu $x \in U$. Ponieważ na podzbiorze otwartym U trywializującym wiązkę możemy łatwo określić niezerowe (to znaczy przyjmujące w pewnych punktach wartości różne od zera) pola, zatem niezerowe pola możemy określić na całej rozmaitości. W przypadku holomorficznym postępowanie takie nie jest możliwe.

4 Wiązka styczna i jej wiązki tensorowe

Niech X będzie rozmaitością różniczkową wymiaru n, a $\{\phi_i : U_i \to R^n\}_{i \in I}$ jej atlasem. Przyporządkujmy każdej parze $(i, j) \in I \times I$ 1-kocykl $\gamma_{i,j} : U_i \cap U_j \to Gl(n, R)$ określony jako macierz Jacobianu przekształcenia $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ w punkcie $x \in U_i \cap U_j$. Wiązka wyznaczona przez ten 1-kocykl nie zależy od wyboru atlasu i nazywa się *wiązką styczną* rozmaitości X. Jej włókno nad punktem $x \in X$ jest przestrzenią wektorową wymiaru $n = dim(X)$ i nazywa się *przestrzenią styczną do* X *w punkcie* x. Wektory przestrzeni stycznej w punkcie x nazywamy *wektorami stycznymi w punkcie* x. Wiązkę styczną do X oznaczać będziemy przez $\mathcal{T}_X$, a przestrzeń styczną do X w punkcie x przez $T_{x,X}$ lub krócej przez T_x, gdy jest jasne o jaką rozmaitość chodzi. Jej wiązkę sprzężoną $\mathcal{T}^*$ nazywamy *wiązką kostyczną*. m-tą potęgę zewnętrzną wiązki kostycznej oznaczamy zwykle przez Ω_X^m i nazywamy wiązką m-form różniczkowych. Przy tym 0-formy utożsamiane są z funkcjami skalarnymi tj. z funkcjami o wartościach w R, a wiązka Ω_X^0 utożsamiana jest z trywialną R-wiązką tj, $\Omega_X^0(U) = \mathcal{O}_X(U)$. Przekroje wiązki stycznej nazywa się *polami stycznymi*, a przekroje wiązki kostycznej - *formami różniczkowymi stopnia*. Ogólniej: przekroje m-tej potęgi zewnętrznej wiązki kostycznej Ω_X^m nazywamy *formami różniczkowymi stopnia* m.

Wektorom stycznym można nadać następującą interpretację. Niech $x \in X$ i niech $v \in T_{x,X}$. Niech $\phi : U \to R^n$ będzie układem współrzędnych na pewnym otoczeniu U punktu x. Wówczas wektorowi v odpowiada pewien punkt postaci $(x, (y_1, \ldots, y_n))$ zgodnie z definicją wiązki stycznej. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą współrzędnymi punktu x (tj. niech $\phi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$). Przyporządkujmy wektorowi v pochodną funkcji określoną, w terminach współrzędnych zadanych przez ϕ, wzorem

$$f \mapsto \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) y_i$$

dla dowolnej gładkiej funkcji określonej w pewnym otoczeniu punktu x.

Łatwo sprawdzić, że pochodna ta nie zależy od wybranego układu współrzędnych, a jest jednoznacznie wyznaczona przez wektor styczny v. Przy tym wektory bazy naturalnej wyznaczonej przez układ współrzędnych ϕ odpowiadają pochodnym $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Pochodna ∂ wyznaczona tak przez wektor styczny $v \in T_x$ jest operatorem $\mathcal{O}_{x,X} \to R$ o następujących własnościach:

- $\partial(f+g) = \partial(f) + \partial(g)$,
- $\partial(fg) = f(x)\partial(g) + \partial(f)g(x)$,
- $\partial(c) = 0$, gdy c jest funkcją stałą.

Twierdzenie *Każdy operator $\mathcal{O}_{x,X} \to R$ o powyższych własnościach jest wyznaczony przez pewien wektor styczny.*

Ponadto, jeśli $\phi : U \to R^n$ jest mapą, to w każdym punkcie $x \in U$ wektory $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ tworzą bazę przestrzeni stycznej $T_{x,X}$.

Bazę, o której wyżej mowa nazywamy *bazą kanoniczną wyznaczoną przez mapę ϕ*. Z powyższego twierdzenia wynika, że każde pole styczne określone na U można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Pole to jest gładkie wtedy i tylko wtedy gdy funkcje f_i są gładkie.

Dowody tych faktów są bardzo proste, jeśli skorzystamy z następującego **Lematu**.

Niech f będzie rzeczywistą funkcją gładką określoną na wypukłym podzbiorze otwartym $U \subset R^n$. Niech $0 = (0, ..., 0) \in U$ i $f(0) = 0$. Wtedy istnieją takie gładkie rzeczywiste funkcje $g_i, i = 1, ..., n$ określone na U, że $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ oraz

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, ..., x_n).$$

Dowód.

$$f(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, ..., tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) x_i \, dt.$$

Wystarczy zatem wziąć

$$g_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_i, ..., x_n).$$

Z tego Lematu wynika natychmiast, że

$$f(x_1,...,x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + g(x_1,...,x_n),$$

gdzie $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0), i = 1,...,a$ oraz $g \in m_0^2$, gdzie przez m_0 oznaczamy ideał maksymalny pirerścienia lokalnego $\mathcal{O}_{0,R^n}$.

Niech $\psi : X \to Y$ bedzie przekształceniem różniczkowym, niech $x \in X$. Wówczas ψ wyznacza homomorfizm pierścieni lokalnych $\mathcal{O}_{\psi(x),Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$, a więc również przekształcenie liniowe przestrzeni stycznych $T_{x,X} \to T_{\psi(x),Y}$. Przekształcenie to oznacza się przez $d\psi_x$. Jeśli ustalimy w otoczeniach punktów x oraz $\psi(x)$ układy współrzędnych, to przekształcenie ψ można w tych otoczeniach zapisać w postaci

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = (\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_m(x_1,\ldots,x_n))$$

gdzie przyjęliśmy $dim(X) = n$, $dim(Y) = m$. Korzystając z kanonicznych baz w przestrzeniach stycznych wyznaczonych przez układy współrzędnych przekształceniu $d\psi_x$ odpowiada pewna macierz. Łatwo sprawdzić, że jest to macierz Jacobiego $[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}]$.

Wszystko o czym była mowa wyżej przenosi się na przypadek holomorficzny. Można zatem określić pojęcie stycznej wiązki zespolonej rozmaitości. Wiązka na każdym zbiorze otwartym, na którym można wprowadzić układ współrzędnych jest trywialna. Każdy układ współrzędnych $x \to (z_1,\ldots,z_n)$ określony na zbiorze $U \subset X$ wyznacza styczne pola holomorficzne $\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n}$ i każde pole holomorficzne określone na U daje się zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial z_1}$$

gdzie f_i są funkcjami holomorficznymi na U. Podobnie $dz_1,\ldots,dz_n$ są holomorficznymi polami kostycznymi (holomorficznymi 1-formami) i każda holomorficzna 1-forma daje się na U zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} f_i dz_i$$

gdzie f_i są funkcjami holomorficznymi na U.

5 Pola styczne.

Pola (gładkie) wiązki stycznej nazwaliśmy *polami stycznymi*. Jeśli pole s należy do $\mathcal{T}_X(U)$, to w każdym punkcie $x \in U$ wyznacza ono operator różniczkowy

$$\partial_{s(x)} : \mathcal{O}_{x,X} \to R$$

Pole styczne s określone na podzbiorze otwartym $U \subset X$ można więc interpretować jako operator różniczkowy $\partial_s : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$ spełniający następujące warunki:

1. $\partial_s(f+g) = \partial_s(f) + \partial_s(g)$,
2. $\partial_s(fg) = f\partial_s(g) + \partial_s(f)g$
3. $\partial_s(c) = 0.$ gdy c jest funkcją stałą.

Każdy operator ∂ o tych własnościach jest wyznaczony przez pewne (gładkie) pole styczne.

Dla dowodu tego faktu trzeba wykazać, że każde przekształcenie ∂ o powyższych własnościach 1 i 2 pochodzi od pewnego pola. Dowód tego rezultatu pozostawiamy czytelnikowi, po zaopatrzeniu go w następującą wskazówkę:

A) jeśli $x \in V$ oraz $f \in \mathcal{O}_X(V)$, gdzie V jest podzbiorem otwartym w U, to istnieje takie otoczenie otwarte $x \in V_1 \subset V$ oraz $\overline{f} \in \mathcal{O}_X(U)$, że $\overline{f}|V_1 = f|V_1$,

B) jeśli dwie funkcje $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ pokrywają się na pewnym podzbiorze otwartym $V \subset U$, a ∂ spełnia powyższe warunki, to również $\partial(f)$ i $\partial(g)$ pokrywają się na V. Dla dowoduwystarczy wykazać, że jeśli $f|V = 0$, to $\partial(f)|V = 0$. W tym celu należy rozważyć dowolny punkt $y \in V$ i znaleźć funkcję $h \in \mathcal{O}_X(U)$ taką, że $h = 0$ na pewnym otoczeniu punktu y, ale $h = 1$ na $U \setminus V$. Wówczas $f = fh$ i wobec tego

$$\partial(f) = \partial(f)h + f\partial(h),$$

a prawa strona jest równa zero na pewnym otoczeniu punktu y.

C) Z A) i B) wynika, że różniczkowanie $\partial : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ prowadzi do przyporządkowania każdemu punktowi $x \in U$ wektora stycznego w tym punkcie. Należy jeszcze wykazać, że to przyporządkowanie jest (gładkim) polem stycznym. Możemy założyć, że na U istnieje układ współrzędnych (zastanów się dlaczego?). Wobec tego możemy to przyporządkowanie zapisać w postaci

$$x \mapsto \sum f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Trzeba wykazać, że funkcje f_i są gładkie, a to wynika stąd, że $f_i = \partial(x_i)$.

Pozwala to na określenie na $\mathcal{O}_X(U)$-module stycznych pól następującej operacji dwuargumentowej nazywanej *nawiasem Liego*:

niech σ_1, σ_2 będą dwoma polami, a ∂_{σ_1}, ∂_{σ_1} przyporządkowanymi im różniczkowaniami $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$. Wówczas łatwo jest sprawdzić, że komutator $\partial_{\sigma_1}\partial_{\sigma_2} - \partial_{\sigma_2}\partial_{\sigma_1}$ jest też różniczkowaniem, tj spełnia powyższe warunki 1-3, a więc istnieje wyznaczające go pole styczne. Oznaczamy je przez $[\sigma_1, \sigma_2]$ i przyjmujemy jako szukaną wartość nawiasu Liego na polach σ_1 oraz σ_2.

Wszystkie pola styczne określone i gładkie na $U \subset X$ ze strukturą R-przestrzeni liniowej i nawiasem Liego tworzą algebrę Liego. Oznacza to, że nawias Liego jest operacją dwuliniową, a ponadto

- $[\sigma, \sigma] = 0$
- $[\sigma, [\tau, \mu] + [\mu, [\sigma, \tau]] + [\tau, [\mu, \sigma]] = 0$

dla każdych pól σ, τ, μ.

Pola nazywamy *przemiennymi* gdy ich nawias Liego równy jest zero, tj gdy wyznaczone przez nie operatory są przemienne.

Nawias Liego jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia pochodnej Liego, które pokrótce teraz przedstawimy. Każde pole styczne σ wyznacza w odpowiednim otoczeniu U dowolnie wybranego punktu u_0 na rozmaitości, swe krzywe całkowe, to znaczy krzywe parametryczne $\phi_u : [-a, a] \to X$ spełniające następujące warunki $\phi_u(0) = u$, $\frac{d\phi_u}{dt}(t) = \sigma(\phi_u(t))$, gdzie a jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą, natomiast u przebiega wszystkie punkty należące do U. Przy tym ϕ traktowana jako funkcja określona na $U \times [-a, a]$ jest gładka oraz dla odpowiednio małych liczb t_1, t_2

$$\phi_u(t_1 + t_2) = \phi_{\phi_u(t_1)}(t_2)).$$

Wynika stąd, że dla $t \in [-a, a]$ możemy określić diffeomorfizm otoczenia U w X przyporządkowując każdemu $u \in U$ punkt $\phi_u(t)$. Przy tym złożeniem takich dwóch diffeomorfizmów odpowiadających liczbom $t_1, t_2 \in [-a/2, a/2]$ jest diffeomorfizm odpowiadający sumie $t_1 + t_2$. W tej sytuacji możemy różniczkować funkcje rzeczywiste,pola styczne, formy różniczkowe i ogólniej pola tensorowe określone w otoczeniach punktu u_0 zgodnie z następującym schematem postępowania. Jeśli τ jest takim polem to jego wartość w punkcie $\phi_{u_0}(t)$ możemy przesunąć do odpowiedniej przestrzeni tensorowej odpowiadającej punktowi u_0 korzystając z diffeomorfizmów $d\phi_u(-t)$ (dla przestrzeni stycznych) lub ich odwrotności (dla przestrzeni kostycznych). Dla funkcji rzeczywistych nie ma potrzeby by cokolwiek przesuwać. Otrzymamy w ten sposób pewną krzywą sparametryzowaną przez t w przestrzeni tensorowej nad (już tym samym) punktem u_0. Weźmy wektor styczny tej krzywej dla $t = 0$. Nazywamy go **pochodną Liego** pola τ w kierunku pola σ w punkcie u_0. W przypadku gdy τ jest funkcją rzeczywistą, otrzymamy pochodną tej funkcji w kierunku σ, a w przypadku gdy τ jest polem stycznym dostaniemy nawias Liego $[\sigma, \tau]$. Sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi jako zadanie.

Nawiasowi Liego pól stycznych można nadać jeszcze inną następującą interpretację. Niech σ, τ będą takimi polami. Ustalmy punkt u_0 i rozpatrzmy w jego otoczeniu krzywe całkowe tychże pól. Weźmy małą liczbę rzeczywistą t, tak mała by to, o czym dalej będzie mowa, było wykonalne. Najpierw poruszamy się wzdłuż krzywej całkowej ϕ_{u_0} pola σ startując z punktu u_0 przez czas t to znaczy do punktu $\phi_{u_0}(t)$. Następnie startując z tego ostatniego punktu poruszamy się też o parametr t wzdłuż krzywej całkowej pola τ, a dalej usiłujemy wrócić poruszając się kolejno wzdłuż krzywych całkowych pól $-\sigma$ oraz $-\tau$ znowu za każdym razem o parametr t. Punkt w którym ostatecznie się znajdziemy oznaczmy przez $\psi(t^2)$. Wektor styczny do krzywej ψ w punkcie u_0 pokrywa się z $[\sigma, \tau](u_0)$.

Pojęcie nawiasu Liego użyteczne jest np. przy wysławianiu warunku na całkowalność następującego zagadnienia:

niech X będzie rozmaitością, a β gładką funkcją, która każdemu punktowi $x \in X$ przyporządkowuje k-wymiarową podprzestrzeń $\beta(x) \subset T_{X,x}$ (k jest tu ustaloną liczbą niewiększą niż $dim(X)$). Gładkość β można określić na wiele równoważnych sposobów, np. β jest gładkim przyporządkowaniem gdy, dla każdego $x \in X$, istnieje otoczenie U oraz na nim k takie gładkie styczne pola $\tau_1, \ldots, \tau_k$, że w każdym punkcie $y \in U$ wektory $\tau_1(y), \ldots, \tau_k(y)$ stanowią bazę przestrzeni $\beta(y)$. Przyporządkowanie β spełniające ten warunek nazywamy (gładką, k-wymiarową) *dystrybucją*.

Mówimy, że k-wymiarowa dystrybucja β jest *całkowalna* gdy istnieje taka k-wymiarowa *foliacja*, której liście mają, w każdym punkcie $x \in X$, $\beta(x)$ jako swą przestrzeń styczną.

Uwaga. k-wymiarowa foliacja rozmaitości X, to taki jej podział na podzbiory $\{A_t\}$, że dla każdego $x \in X$ istnieje takie otoczenie V, a na nim układ współrzędnych, o następującej własności:

składowe spójne zbiorów $V \cap A_t$ mają równania postaci: $x_i = c_i$, dla $i = k+1, \ldots, dim(X)$ oraz $c_i \in R$.

W przypadku gdy $k = 1$, z podstawowych twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności równań różniczkowych wynika, że każda taka dystrybucja jest całkowalna. Istotnie, lokalnie dystrybucja taka jest wyznaczona przez pewne niezerowe pole styczne i krzywe całkowe tego pola wyznaczają szukaną foliację.

W ogólnym przypadku mamy następujące :

Twierdzenie Frobeniusa. *Dystrybucja β jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych pól stycznych, które w każdym punkcie x jako swe wartości przyjmują wektory z $\beta(x)$, ich nawias Liego też ma tę własność.*

Dowód tego twierdzenia należy do teorii równań różniczkowych i nie będzie tu podany.

Uwaga. Okazuje się, że nie na każdej rozmaitości różniczkowej można znaleźć pole styczne przyjmujące wszędzie wartości różne od zera. Można je oczywiście zdefiniować gdy wiązka styczna jest trywialna. Twierdzenie, które mówi, że takiego pola stycznego nie ma na sferze $S^2 \subset E^3$ nazywa się *twierdzeniem o zaczesaniu*. Pola takie można natomiast określić na S^1 (łatwe) i na S^3 (nieco trudniejsze). Istnienie pola stycznego wszędzie różnego od zera związane jest z topologicznymi własnościami rozmaitości X.

W przypadku rozmaitości zespolonych może się zdarzyć, że jedynym holomorficznym polem stycznym jest pole zerowe.

6 Formy różniczkowe

Bazę dualną (sprzężoną) do bazy

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$$

w punkcie $x \in X$ oznaczamy przez

$$\{dx_1(x), \ldots, dx_n(x)\}$$

Wobec tego $dx_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)) = \delta^i_j$.

Każda funkcja $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ wyznacza element $df(x) \in T^*_x$ określony wzorem

$$df(x)(v) = \partial_v(f)$$

i nazywany *różniczką funkcji f*. Definicja ta i oznaczenie jest zgodne z definicją formy $dx_i(x)$ podaną poprzednio, gdyż różniczki dx_i funkcji współrzędnościowych x_i tworzą bazę dualną do bazy $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$.

Zanotujmy jeszcze, że

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Jeśli $f \in \mathcal{O}_X(U)$, to df jest formą stopnia 1. Otrzymujemy więc przekształcenie $d : \mathcal{O}_X(U) \to \Omega^1_X(U)$

1-formy, które są postaci df nazywamy *dokładnymi.*

Po wprowadzeniu układu współrzędnych na podzbiorze otwartym $U \subset X$, każdą formę ω należącą do $\Omega^k_X(U)$ można jednoznacznie zapisać w postaci

$$\sum f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

gdzie sumowanie przebiega ściśle rosnące ciągi $i_1 < \ldots < i_k$ złożone z liczb $1, \ldots, n$.

Okazuje się, że operator różniczki d można przenieść na formy wyższych stopni i określić operator $d : \Omega^k_X(U) \to \Omega^{k+1}_X(U)$ dla dowolnego naturalnego k kładąc

$$d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \ldots \wedge dx_{i_k}$$

a następnie przez addytywność rozszerzając definicję operatora na wszystkie formy. Łatwo sprawdzić, że definicja operatora d nie zależy od wybranego układu współrzędnych.

Uwaga. Dla ścisłości, należałoby operator różniczkowania form stopnia k oznaczać przez d_k, a nie przez d jak to czynimy. Wskaźnik k pomijamy dla prostoty mając nadzieję, że nie doprowadzi to do nieporozumień.

Operator d różniczkowania form można też równoważnie określić w następujący sposób:

niech $\omega \in \Omega^k(X)$. Wówczas forma $d\omega$ jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości jakie przyporządkowuje ona układom $k+1$ pól stycznych (można by się nawet ograniczyć do pól postaci $\frac{\partial}{\partial x_i}$ określonych przez ustalony atlas) i wystarczy przyjąć, że

$$(d\omega)(\psi_1, \ldots, \psi_{k+1}) = \frac{1}{k+1}(\sum_i (-1)^i \psi^i(\omega(\psi_1, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots, \psi_{k+1})) +$$

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\psi_i, \psi_j], \psi_1, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots, \tilde{\psi}_j, \ldots, \psi_{k+1})),$$

gdzie umieszczenie znaku ˜ ponad czymś oznacza, że tego czegoś nie ma. Dodajmy jeszcze, że

$$\psi^i(\omega(\psi_1, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots, \psi_{k+1}))$$

oznacza pochodną funkcji $(\omega(\psi_1, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots, \psi_{k+1}))$ w kierunku pola stycznego ψ^i.

Formę ω nazywamy *dokładną* gdy jest postaci $d\eta$, tj gdy należy do $Im(d)$. Formę ω nazywamy *zamkniętą* gdy $d\omega = 0$, tj. gdy $\omega \in Ker(d)$. Łatwy rachunek wykazuje że $d \circ d = 0$. Wobec tego $Im(d) \subset Ker(d)$.

Lokalnie każda forma zamknięta jest dokładna. tj $Ker(d)/Im(d) = 0$.

Ten bardzo ważny rezultat ten nazywa się **Lematem Poincare'go**. Jego dowód przebiega na następującej drodze: ponieważ mamy udowodnić pewną lokalną własność rozmaitości X, zatem możemy założyć, że $X = U$ jest zbiorem otwartym w R^n, a nawet, że jest to podzbiór otwarty gwiaździsty o centrum w punkcie $0 \in R^n$. Oznacza to, że jest to taki podzbiór otwarty, że jeśli $x \in U$, to cały odcinek $[0, x]$ zawarty jest w U. Następnie zauważmy, że dla dla dowodu tego lematu wystarczy skonstruować takie R-liniowe przekształcenia

$$h_k : \Omega^k(X) \to \Omega^{k-1},$$

że $dh + hd = id$, gdzie dla ułatwienia sobie życia pominęliśmy indeksy. Przekształcenia h_k określamy w podany niżej sposób.

Niech dana będzie forma $\omega \in \Omega^k(X)$. Dla określenia formy $h_k(\omega)$ wystarczy zadać jej wartości na układach $k-1$ pól stycznych $\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}$ określonych na X. Możemy się przy tym ograniczyć do układów pól parami przemiennych, tj o nawiasach Liego równych zero (na przykład postaci $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dla ustalonego układu współrzędnych) i w tej sytuacji niech

$$(h_k(\omega))(\psi_1, \ldots, \psi_{k-1})(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 t^{k-1}\omega(x, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1})(tx_1, ..., tx_n)dt$$

Przez x oznaczyliśmy tu pole, które "w każdym punkcie x jako swoją wartość przyjmuje x". Oznacza to, że: wartością pola x w punkcie $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ jest wektor styczny $x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$. Sprawdzenie, że tak określone przekształcenia h_k spełniają oczekiwane warunki nie jest trudne.

Twierdzenie de Rhama mówi, że dla rozmaitości zwartych ilorazy $Ker(d)/Im(d)$ pokrywają się z grupami kohomologii rozmaitości X (o współczynnikach w R) zdefiniowanymi w topologii na innej drodze. Czytelnik, który nie zetknął się z tymi definicjami może przyjąć, że grupami kohomologii są wyżej określone grupy de Rhama. Jednakże przy takiej definicji grup kohomologii nie jest widoczny ważny fakt mówiący o tym, że grupy de Rhama zależą tylko od typu topologicznego rozmaitości, co oznacza, że homeomorficzne rozmaitości mają takie same grupy kohomologii bez względu na to czy są , czy nie są diffeomorficzne. Rezultaty te wskazują na głębokie związki łączące globalne własności topologiczne i analityczne (różniczkowe). O związkach takich była już mowa poprzednio.

Z algebry liniowej wiadomo że, dla dowolnej n-wyniarowej przestrzeni liniowej V, suma prosta potęg zewnętrznych

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{i=0}^{n} \Lambda^i(V)$$

jest algebrą nazywaną *algebrą zewnętrzną przestrzeni* V. Działanie mnożenia w tej algebrze oznaczamy przez $\wedge$. Dla każdego podzbioru otwartego rozmaitości X, możemy dzięki temu wprowadzić strukturę algebry w sumie prostej $\mathcal{O}(U)$-modułów

$$\Omega(U) = \bigoplus_{i=0}^{n} \Omega^i(U)$$

określając iloczyn form różniczkowych jako formę, której wartością wpunkcie $x \in U$ jest iloczyn wartości tych form w tym punkcie (sprawdzenie, że iloczyn form gładkich jest formą gładką może być przeprowadzone lokalnie przy użyciu układów współrzędnych).

Zanotujmy tu następujące proste własności tej algebry $\Omega(U)$ i operacji różniczkowania d. Niech ω_1, ω_2 będą formami stopni odpowiednio r_1, r_2. Najpierw zbierzemy własności mnożenia $\wedge$,

- iloczyn $\omega_1 \wedge \omega_2$ jest formą stopnia $r_1 + r_2$
- $$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{r_1 r_2} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

Natomiast różniczkowania d charakteryzują się następującymi własnościami:

- dla każdego podzbioru otwartego U rozmaitości X, d jest operatorem liniowym (nad ciałem R), $d : \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$, dla $r = 0, 1, 2, ...,$

- dla funkcji $f \in \Omega(U) = \Omega^0(U)$ wartość różniczkowania df jest identyczna z różniczką funkcji df,

- $$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1} \omega_1 \wedge d(\omega_2),$$

- $d^2 = d \circ d = 0.$

Można łatwo wykazać (zostawiamy to Czytelnikowi), że własności te przyjęte jako aksjomaty wyznaczają jednoznacznie różniczkowania d.

Inną ważną własnością form jest możliwość opisanego niżej "przenoszenia" ich przy pomocy przekształceń różniczkowych.

Niech $\phi : X \to Y$ będzie przekształceniem różniczkowym. W każdym punkcie $x \in X$ mamy

$$(d\phi)_x : T_{x,X} \to T_{\phi(x),Y}$$

Pozwala to na określenia przekształcenia sprzężonego przestrzeni kostycznych

$$(d\phi)_x^* : T^*_{\phi(x),Y} \to T^*_{x,X}$$

i ogólniej przekształceń sprzężonych potęg zewnętrznych

$$\Lambda^k (d\phi)_x^* : \Lambda^k T^*_{\phi(x),Y} \to \Lambda^k T^*_{x,X}$$

Łatwo udowodnić, że przekształcenia te wyznaczaja przekształcenia

$$\Omega^k(U) \to \Omega^k(\phi^{-1}(U))$$

oraz

$$\Omega(U) \to \Omega(\phi^{-1}(U))$$

dla każdego podzbioru otwartego $U \subset Y$.

Twierdzenie. *Określone wyżej przekształcenie*

$$\Omega(U) \to \Omega(\phi^{-1}(U))$$

jest homomorfizmem algebr oraz jest przemienne z różniczkowaniami form.

Dowód jest prostym sprawdzeniem. Można sprowadzić je do przypadku lokalnego i korzystać z układów współrzędnych.

W przypadku rozmaitości gładkich można też rozważać formy gładkie o wartościach zespolonych. Formy takie są gładkimi przekrojami wiązek otrzymanych przez kompleksyfikację potęg zewnętrznych wiązek kostycznych. Lokalnie, w ustalonym układzie współrzędnych, gładkie formy zespolone można zapisać jako formy rzeczywiste w postaci

$$\sum f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

gdzie sumowanie przebiega ściśle rosnące ciągi $i_1 < \ldots < i_k$ i gdzie funkcje $f_{i_1,\ldots,i_k}$ są gładkie zespolone. W powyższym wzorze pola dx_i można zastąpić na przykład przez (tworzące bazę) ich kombinacje liniowe o współczynnikach zespolonych. Na przykład, jeśli wymiar rozmaitości X jest parzysty równy $2m$, to można jako taką bazę wziąć formy

$$dx_{2i-1} + idx_{2i},\ dx_{2i-1} - idx_{2i},$$

dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$.

Wszystko o czym była mowa wyżej przenosi się na przypadek zespolony holomorficzny. Ponieważ na rozmaitość zespoloną można też patrzeć jak na różniczkową, do opisu tej rozmaitości można też zastosować aparat wprowadzony wyżej dla przypadku gładkiego po części (ale nie całkiem i do końca) zapominając o tym, że mamy do czynienia z rozmaitością zespoloną. I tak układ współrzędnych analitycznych zespolonych $x \mapsto (z_1, \ldots, z_n)$ pozwala po wprowadzeniu zapisu $z_i = x_i + iy_i$ wprowadzić gładki rzeczywisty układ współrzędnych $x \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Ten układ w pewnym sensie odbija jeszcze zespoloną strukturę rozmaitości X. Pola $dx_1, dy_1, \ldots, dx_n, dy_n$ tworzą bazę dla gładkich pól rzeczywistych i zespolonych, a wobec tego zespolone gładkie pola $dz_i = dx_i + idy_i$ (to pole jest nawet holomorficzne !) i $d\overline{z_i} \overset{df}{=} dx_i - idy_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ tworzą bazę gładkich zespolonych 1-form. Każdą k-formę gładką zespoloną ω można zapisać w postaci:

$$\omega = \sum_{p+q=k} \omega_{p,q}$$

gdzie $\omega_{p,q}$ jest sumą form typu (p, q), tj. postaci

$$f dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_{j_q}}.$$

Jest jasne, że przy ustalonym jak wyżej holomorficznym układzie współrzędnych rozkład formy ω na składniki $\omega_{p,q}$ jest jednoznacznie określony. Nie jest jasne i to wymaga sprawdzenia, że ten rozkład jest wyznaczony jednoznacznie przez strukturę zespoloną na X, a więc od układu współrzędnych nie zależy.

Rozkład formy na formy typu (p, q) prowadzi do rozkładu

$$\Omega^k(U) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(U)$$

gdzie, jak łatwo się domyślić, $\Omega^{p,q}(U)$ jest modułem form typu (p,q) określonych na U. Formy holomorficzne są typu $(k,0)$, ale oczywiście nie każda forma typu $(k,0)$ jest holomorficzna.

Wartość pochodnej d dla formy typu (p,q) jest sumą formy typu $(p+1,q)$ oraz typu $(p,q+1)$. Łatwo to widzieć korzystając ze wzoru :

$$d(f dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots d\overline{z_{j_q}}) =$$

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots d\overline{z_{j_q}} +$$

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}} d\overline{z_i} \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots d\overline{z_{j_q}}$$

gdzie

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

Wobec tego operator różniczkowania d rozpada się na sumę $\partial \oplus \overline{\partial}$ dwóch operatorów z których pierwszy zwiększa o jeden pierwszy element typu tj,

$$\partial : \Omega^{p.q} \to \Omega^{p+1,q}$$

a drugi - drugi też o jeden

$$\overline{\partial} : \Omega^{p.q} \to \Omega^{p,q+1}$$

Znowu łatwo wykazać, że $\partial \circ \partial = 0$ i podobnie $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$. Ponieważ $(\partial \oplus \overline{\partial})^2 = d^2 = 0$, zatem

$$\partial \circ \overline{\partial} = -\overline{\partial} \circ \partial$$

Odpowiednikiem twierdzenia deRhama dla operatora $\overline{\partial}$ jest **twierdzenie Dolbeault**, które podaje interpretację grup $ker(\overline{\partial})/im(\overline{\partial})$ w miejscu (p,q). Grupy te oznacza się przez $H^{p,q}(X)$

Z równań Cauchy-Riemanna wynika, że forma typu $(k,0)$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy gdy należy do $ker(\overline{\partial})$ tj. do $H^{k,0}(X) = ker(\overline{\partial})/im(\overline{\partial})$, bo w tym przypadku $im(\overline{\partial}) = 0$. Twierdzenie Dolbeault uogólnia ten rezultat.

7 Orientacja rozmaitości

Orientacją rozmaitości różniczkowej nazywa się wybór orientacji w każdej przestrzeni stycznej $T_{x,X}$. Naturalnym jest tu żądanie by orientacja zależała w "sposób gładki" od punktu x. Można to na przykład wyrazić żądaniem by dla kadego punktu istniało takie otoczenie, a na nim n pól stycznych, które w każdym punkcie $u \in U$ wyznaczają bazę o orientacji zgodnej z zadaną. Zadanie orientacji w $T_{x,X}$ równoważne jest zadaniu orientacji w $T^*_{x,X}$, a warunek gładkości tłumaczy się na istnienie lokalnych form $\omega_1, \ldots, \omega_n$

stopnia 1, które w każdym punkcie wyznaczają bazę zorientowaną zgodnie z zadaną orientacją. Biorąc $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ otrzymamy formę stopnia n. Dwie formy otrzymane w ten sposób różnią się o czynnik będący dodatnią funkcją. Wynika stąd, że orientację (przynajmniej lokalnie) można zadać ustalając wszędzie różną od zera formę stopnia n.

Ogólniej, orientację globalną(na rozmaitości X) można zadać przez znalezienie pokrycia $\{U_i\}$, a na nim form ω_i takich, że na $U_i \cap U_j$ formy ω_i, ω_j różnią się o czynnik dodatni. W tej sytuacji można korzystając z podziału jedynki znaleźć formę ω określoną na całej rozmaitości X i w każdym punkcie wyznaczającą taką samą orientację jak określone tam formy ω_i.

Rozmaitość nazywamy *orientowalną*, gdy posiada (gładką) orientację, a więc gdy istnieje na niej (gładka) forma stopnia n nigdzie nierówna 0. Rozmaitość nazywamy *zorientowaną*, gdy jest orientowalna i wybraliśmy dla niej jedną orientację. Każda (spójna i dodatniowymiarowa) orientowalna rozmaitość ma dwie różne orientacje.

Jeśli X jest rozmaitością zespoloną, $x \in X$ uraz dany jest układ współrzędnych w otoczeniu x, to w tym otoczeniu mamy $2n$-formę zespoloną

$$\omega = dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge d\overline{z^1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z^n}$$

Wartością tej formy na układach $2n$-wektorów wybranych spośród $(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^l})$, gdzie $k, l = 1, \ldots, n$ oraz $z^i = x^i + iy^i$, równa jest 0 lub $\stackrel{+}{-}\, i^n$. Wobec tego forma $(\frac{i}{2})^n \omega$ jest rzeczywista. Jeśli zmienimy układ współrzędnych

$$(z^1, \ldots, z^n) \mapsto (w^1, \ldots, w^n)$$

to

$$dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n = J\, dw^1 \wedge \ldots \wedge dw^n$$

$$d\overline{z^1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z^n} = \overline{J} d\overline{w^1} \wedge \ldots \wedge d\overline{w^n}$$

gdzie J jest wyznacznikiem macierzy Jacobiego $[\frac{\partial w^i}{\partial z^j}]$. Wobec tego formy ω wyliczane w tych dwóch układach współrzędnych różnią się o czynnik dodatni $J\overline{J}$. Wynika stąd, że formy $(\frac{i}{2})^n \omega$ wyznaczają na X orientację. Wynika stąd, że

rozmaitości zespolone są orientowalne.

Fakt ten można uzasadnić inaczej: każdy zespolony układ współrzędnych $(z^1, \ldots, z^n)$ wyznacza rzeczywisty $(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$, gdzie przyjęliśmy $z^n = x^n + iy^n$. Ten rzeczywisty wyznacza orientację określoną przez bazę:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^n}$$

Okazuje się, że ta orientacja nie zależy od przyjętego dla jej określenia zespolonego układu współrzędnych.

8 Całkowanie form. Twierdzenie Stokesa.

Jeśli V jest rzeczywistą przestrzenią wektorową wymiaru n, to $\Lambda^n V^* = Lin^n_{as}(V^*, R)$, a zatem każdy element $\omega_o \in \Lambda^n V^*$ wyznacza "miarę" ω_o dowolnego zorientowanego równoległoboku P rozpiętego na wektorach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przez

$$\omega_o = \omega_o(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Jeśli przestrzeń V jest zorientowana, to żądając by wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wyznaczały orientację dodatnią otrzymujemy "miarę" na rodzinie wszystkich równoległoboków, a nie, jak poprzednio, równoległoboków zorientowanych. Wobec tego można się spodziewać, że zadanie formy różniczkowej $\omega \in \Omega^n(X)$ na n-wymiarowej zorientowanej rozmaitości X wyznacza "miarę" ω na X. Istotnie jeśli $U \subset X$ jest podzbiorem otwartym, na którym określona jest mapa $\phi : U \to \phi(U) \subset R^n$, to możemy przyjąć

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_{\phi(U)} f dx_1 \ldots dx_n,$$

gdzie $f dx_1 \ldots dx_n$ jest zapisem formy ω w układzie współrzędnych wyznaczonym przez ϕ, przy czym układ $dx_1 \ldots dx_n$ jest dodatnio zorientowany i prosty rachunek pokazuje, że tak określona całka nie zależy od przyjętej na U mapy. Wobec tego jeśli $\{U_i\}$ jest takim układem rozłącznych zbiorów otwartych, na których istnieją mapy oraz $dim(X \setminus \sum U_i) < n$, to możemy przyjąć

$$\int\limits_X \omega \stackrel{df}{=} \sum_i \int\limits_{U_i} \omega$$

i tak określona lewa strona nie zależy od wybranego układu $\{U_i\}$. Wynika stąd w szczególności, że na zorientowanej rozmaitości X wymiaru n możemy całkować formy różniczkowe stopnia n.

Powyższe rozumowania i wnioski można uogólnić:

jeśli $\omega \in \Omega^k_X(X)$, a Y jest k-wymiarową zorientowaną podrozmaitością w X, to możemy określić $\int\limits_Y d\omega$ jako $\int\limits_Y (\omega|Y)$.

Twierdzenie Stokesa

$$\int\limits_Z d\omega = \int\limits_{\partial Z} \omega.$$

Wymagania sensowności tego twierdzenia wymagają założeń o zgodności orientacji Z i ∂Z.

9 Grupy Liego

Niech X będzie rozmaitością różniczkową, a jednocześnie grupą, przy czym zadane przez mnożenie i branie elementu odwrotnego przekształcenia

$$X \times X \to X, \; X \to X$$

są gładkie. Wówczas mówimy, że jest to *grupa Liego*.

Grupą Liego jest zatem przestrzeń wektorowa V^n z dodawaniem jako operacją grupową oraz $Gl(n, R)$ - grupa $n \times n$ rzeczywistych macierzy nieosobliwych (jest to rozmaitość różniczkowa jako podzbiór otwarty w przestrzeni wektorowej wszystkich $n \times n$ rzeczywistych macierzy). W szczególnym przypadku $n = 1$ jako grupę Liego otrzymujemy tak grupę multiplikatywną R^* ciała R liczb rzeczywistych oraz grupę addytywną R^+. Grupą Liego jest S^1 z mnożeniem zadanym jako mnożenie liczb zespolonych o normie 1 oraz S^3 z mnożeniem zadanym jako mnożenie kwaternionów o normie 1. Grupami Liego są też grupy $n \times n$ rzeczywistych macierzy o wyznaczniku równym 1 - $Sl(n, R)$; grupy $n \times n$ rzeczywistych ortogonalnych macierzy - $O(n, R)$; grupy $n \times n$ rzeczywistych macierzy symplektycznych $Sp(n, R)$; macierzy $n \times n$ nieosobliwych rzeczywistyczh trójkątnych górnych $T(n, R)$ i tp.. Nietrudno udowodnić, że

jedynymi spójnymi przemiennymi grupami Liego są produkty:

$$T \times V^+$$

gdzie T jest torusem wielowymiarowym (tj produktem $S^1 \times \ldots \times S^1$ a V^+ grupą addytywną przestrzeni wektorowej V.

We wszystkich tych przypadkach zamiast R można wziąć C i otrzymać tak inne przykłady grup Liego. Te zespolone grupy posiadają jeszcze bogatszą, bo holomorficzną strukturę rozmaitości (zgodną ze strukturą grupy), takie grupy nazywają się *zespolonymi (analitycznymi) grupami Liego.* Rozpatrujemy je dalej jako grupy Liego, tak jak wprowadzone wyżej grupy w przypadku rzeczywistym, a to dzięki temu, że każdą przestrzeń zespoloną C^n można rozpatrywać jako rzeczywistą przestrzeń R^{2n}.

Ważnymi przykładami (rzeczywistych) zwartych grup Liego są grupy zespolonych $n \times n$ macierzy unitarnych $U(n, C)$. W szczególnym przypadku gdy $n = 1$ otrzumujemy jako $U(1, C)$ opisaną już wyżej grupę S^1.

Jeśli G jest grupą Liego oraz $g \in G$, to przekształcenia $l_g : G \to G$, $r_g : G \to G$ zadane wzorami

$$l_g(x) = gx, \; r_g(x) = xg$$

są diffeomorfizmami (ich odwrotnościami są odpowiednio $l_{g^{-1}}$ oraz $l_{g^{-1}}$).

Jeśli G jest grupą Liego, a $v \in T_{1,G}$, to przesuwając ten wektor do każdego punktu $g \in G$ przy pomocy $d(l_g)$ otrzymamy gładkie pole styczne oznaczane przez σ_v. Pola styczne otrzymane w ten sposób nazywamy lewo niezmienniczymi. Podobnie określamy pola prawo niezmiennicze. Z istnienia pól niezmienniczych σ_v przyjmujących w punkcie $1 \in G$ dowolnie zadaną wartość $v \in T_{1,G}$ wynika, że wiązka styczna do G jest trywialna. Trywialna jest więc też wiązka kostyczna.

Biorąc jako iloczyn Liego $[v, w]$ dwóch wektorów $v, w \in T_{1,G}$ wartość nawiasu Liego $[\sigma_v, \sigma_w]$ w punkcie $1 \in G$ otrzymujemy na przestrzeni $T_{1,G}$ strukturę algebry Liego. Nazywamy ją *algebrą Liego grupy* G.

Wiemy już, że każde pole styczne σ określone na rozmaitości różniczkowej X wyznacza ruch τ tej rozmaitości w kierunku tego pola. Jeśli jako to pole weźmiemy pole lewoniezmiennicze wyznaczone przez wektor α styczny do grupy Liego G w punkcie e, to ruch τ jest określony dla wszystkich $t \in R$. Ponieważ ruch ten jest wyznaczony przez pole lewostronnie niezmiennicze, to jest on przemienny z przesunięciami z lewej strony, to znaczy

$$\tau_t(g) = \tau_t(g \cdot e) = g \cdot \tau_t(e)$$

. Ponieważ

$$\tau_0(e) = e,\ \tau_{t_1+t_2}(e) = \tau_{t_1}(\tau_{t_2}(e)) = ((\tau_{t_2}(e)) \cdot ((\tau_{t_1}(e)),$$

zatem $\tau_t(e)$ jest homomorfizmem grupy addytywnej R w G. Homomorfizmy takie nazywamy *podgrupami jednoparametrowymi grupy* G, a ten homomorfizm, który określiliśmy wyżej nazywamy *podgrupą jednoparametrową wyznaczoną przez wektor* α.

Z podanej poprzednio interpretacji nawiasu Liego dwóch pól wektorowych wynika opisana niżej interpretacja operacji mnożenia w algebrze Liego grupy Liego. Niech α, β będą wektorami stycznymi do grupy G w punkcie $e = 1$. Wektory te wyznaczają podgrupy jednoparametrowe $\overline{\alpha} : R \to G, \overline{\beta} : R \to G$. Rozpatrzmy krzywą parametryczną $\overline{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}} : R \to G$ określoną wzorem

$$\overline{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}(t) = \overline{\alpha}(t)\overline{\beta}(t)\overline{\alpha}(t)^{-1}\overline{\beta}(t)^{-1}.$$

Wtedy $[\alpha, \beta]$ jest wektorem stycznym w punkcie $t = 0$ krzywej γ określonej wzorem $\gamma(t^2) = \overline{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}(t)$.

Algebry Liego grup przemiennych są przemienne, tj $[v, w] = 0$, dla dowolnych elementów v, w tej algebry.

Ważne zastosowanie ma w tej teorii twierdzenie Frobeniusa, z którego łatwo wynika następujący rezultat:

Twierdzenie. *Jeśli* $\mathbf{A}$ *jest podalgebrą Liego algebry Liego grupy Liego* G*, to istnieje grupa Liego* H *oraz immersja* $\tau : H \to G$ *będąca izomorfizmem grupowym na obraz i taka, że* $d\tau$ *jest izomorfizmem algebry Liego grupy* H *na* $\mathbf{A}$.

Dowód polega na sprawdzeniu. że dystrybucja β dana wzorem $\beta(g) = dl_g(A)$, dla każdego $g \in G$ spełnia warunek całkowalności. Z twierdzenia Frobeniusa wynika zatem, że istnieje foliacja wyznaczona przez dystrybucję β. Okazuje się, że liść tej foliacji przechodzący przez $1 \in G$ jest szukaną podgrupą.

Z twierdzenia tego wynika, że istnieje 1-1 odpowiedniość między podalgebrami Liego algebry Liego grupy G, a jej "immersyjnymi" podgrupami (tj podgrupami otrzymanymi jak powyżej).

Łatwo jest sprawdzić, że algebrą Liego grupy $Gl(n, R)$ jest algebra $n \times n$ macierzy z mnożeniem Liego macierzy A, B zadanym jako komutator $AB - BA$. Rozpatrzmy teraz bardziej szczegółowo ten przypadek.

Niech π będzie przekształceniem przestrzeni rzeczywistych $(n \times n)$-macierzy w $Gl(n, R)$ określonym wzorem

$$\pi(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in Gl(n, R).$$

Przekształcenie π jest dobrze określone, bo szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ jest zbieżny w euklidesowej normie $\|A\| = \sum \sqrt[2]{\sum a_{i,j}^2}$, gdzie $A = (a_{i,j})$, gdyż $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, dla dowolnej liczby całkowitej m. Wynika to z nierówności

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

dla dowolnych $A, B \in R_n^n$. Tak określone przekształcenie π nazywa się *przekształceniem wykładniczym.*

Łatwo sprawdzić, że

1. $\pi(0) = 1 \in Gl(n, R)$,

2. π jest przekształceniem gładkim,

3. macierz Jacobiego przekształcenia π w punkcie 0 jest macierzą jednostkową, a zatem π jest diffeomorfizmem na pewnym otoczeniu zera w R^n_n,
4. $\pi(B^{-1}AB) = B^{-1}\pi(A)B$,
5. $\pi(A + B) = \pi(A)\pi(B)$, o ile $AB = BA$,
6. przekształcenie $R \to G$ wyznaczone wzorem

$$t \mapsto \pi(tA)$$

   jest dla każdej macierzy A podgrupą jednoparametrową wyznaczoną przez A,
7. macierz A jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $\pi(A)$ jest macierzą ortogonalną,
8. macierz A spełnia warunek $A\Omega + \Omega A = 0$, gdzie $\Omega(.,.)$ jest dwuliniową formą określającą strukturą symplektyczną na R^n, wtedy i tylko wtedy gdy $\pi(A)$ jest macierzą symplektyczną.

Łatwo widzieć, że jeśli $H \subset G$ jest dyskretną podgrupą grupy Liego G, przesunięcia z lewej strony przez elementy tej podgrupy wyznaczają całkowicie dyskretne działanie H na G. Wobec tego możemy utworzyć przestrzeń warstw G/H i przestrzeń ta jest rozmaitością różniczkową. Trudniej wykazać, że można to uogólnić na przypadek gdy H jest podgrupą domkniętą. W przypadku gdy H jest domkniętym dzielnikiem normalnym, wówczas G/H ma strukturę grupy Liego, a kanoniczne przekształcenie ilorazowe $G \to G/H$ jest różniczkowym homomorfizmem grup Liego.

Ważną częścią teorii grup Liego zajmuje problem klasyfikacji zwartych spójnych grup. Sprowadza się go najpierw do problemu klasyfikacji prostych (tzn w tym przypadku grup nie zawierających nieskończonych domkniętych dzielników normalnych) spójnych zwartych grup. A dalej pokazuje się, że każda taka grupa jest isogeniczna z grupą należącą do którejś z następujących czterech serii:
grupy unitarne $SU(n)$,tj macierzy unitarnych o wyznaczniku 1
grupy ortogonalne $SO(2n, R)$,tj.macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 i podobnie **grupy ortogonalne** $SO(2n + 1, R)$

grupy unitarne symplektyczne tj. grupy przekształceń unitarnych zachowujących antysymetryczny niezdegenerowany funkcjonał na przestrzeni zespolonej V wymiaru $2n$
lub zbioru pięciu **wyjątkowych** zwartych grup prostych nie należących do żadnej serii.

Uwaga. Dwie grupy nazywamy *isogenicznymi*, gdy ich ilorazy przez pewne skończone dzielniki normalne są izomorficzne.

Część II

Wprowadzenie do geometrii riemannowskiej

10 Definicja rozmaitości riemannowskiej

Definicja rozmaitości riemannowskiej. *Rozmaitością riemannowską* nazywamy parę (X, g), gdzie X jest rozmaitością różniczkową, a g jest (gładkim) polem symetrycznych dodatnio określonych tensorów 2-kowariantnych tj. funkcjonałów dwuliniowych na przestrzeniach stycznych lub jeszcze inaczej: gdzie g jest (gładkim) polem iloczynów skalarnych na przestrzeniach stycznych do rozmaitości X. Każde pole o jakim mowa w powyższej definicji w układzie współrzędnych zadanym na zbiorze otwartym $U \subset X$ opisane jest wzorem

$$g(x) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x) dx^i \otimes dx^j.$$

gdzie funkcje $g_{i,j} \in \mathcal{O}_X(U)$ oraz macierz $[g_{i,j}(x)]$ jest symetryczna dodatnio określona, dla każdego $x \in U$.

Zamiast $dx^i \otimes dx^j$ często będziemy pisać $dx^i dx^j$ i wobec tego lokalny zapis pola g ma postać

$$g(x) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x) dx^i dx^j.$$

Jeśli

$$\alpha = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \, \beta = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

są dwoma wektorami stycznymi w punkcie x, to

$$g(x)(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x) a^i b^j.$$

Wzorcowymi przykładami rozmaitości riemanowskiej są przestrzenie euklidesowe rozumiane jako rozmaitości afiniczne (a zatem różniczkowe) z iloczynami skalarnymi w przestrzeniach stycznych zadanymi przez ustalenie iloczynu skalarnego w przestrzeni wektorów swobodnych tej przestrzeni afinicznej.

Uwaga. W tym przypadku każda przestrzeń styczna jest w sposób kanoniczny utożsamiona z przestrzenią wektorów swobodnych.

Jeśli X, Y są rozmaitościami riemannowskimi, to przekształcenie różniczkowe $\phi : X \to Y$ nazywamy *lokalną izometrią* jeśli w każdym punkcie $p \in X$ przekształcenie $d\phi$ jest izometrią przestrzeni stycznych $T_{p,X} \to T_{\phi(p),Y}$, to znaczy jest izomorfizmem tych przestrzeni liniowych i zachowuje iloczyn skalarny zadany w tych przestrzeniach przez strukturę riemannowską. *Izometrią* nazywamy taką lokalną izometrię, która jest diffeomorfizmem.

Łatwo widzieć, że przekształcenie identycznościowe rozmaitości różniczkowej, złożenie dwóch izometrii oraz przekształcenie odwrotne do izometrii są izometriami. Wobec tego rozmaitości riemanowskie wraz z ich izometriami tworzą kategorię, w której wszystkie morfizmy są izomorfizmami. Dwie rozmaitości nazywamy *izometrycznymi* gdy istnieje izometria jednej z nich na drugą.

Powyższe pojęcie izometrii można nieco rozszerzyć. Przekształcenie różniczkowe $\phi : X \to Y$ będziemy nazywać izometrią (na swój obraz) również jeśli spełnione są słabsze założenia: a mianowicie gdy ϕ jest różnowartościową immersją i w każdym punkcie $d\phi$ jest zanurzeniem przestrzeni stycznych zachowującym iloczyn skalarny.

Przestrzenie euklidesowe tego samego wymiaru n są izometryczne.

Każda podrozmaitość rozmaitości $Y \subset X$ rozmaitości riemannowskiej X ma naturalną strukturę rozmaitości riemannowskiej. Istotnie dla każdego punktu tej podrozmaitości przestrzeń styczna do podrozmaitości w tym punkcie jest podprzestrzenią w przestrzeni stycznej do rozmaitości w tymże punkcie. Wobec tego jako formę dwuliniową na przestrzeniach stycznych możemy wziąć ograniczenie form dwuliniowych danych na przestrzeniach stycznych do rozmaitości. Przy zachowaniu tej umowy przekstałcenie zanurzenia $Y \subset X$ podrozmaitości Y w rozmaitość riemanowską X jest izometrią.

Tradycyjnie tę określoną poprzez ograniczenie formę na podprzestrzeniach stycznych do podrozmaitości rozmaitości riemannowskiej nazywa się *pier-*

wszą formą tej *podrozmaitości.* W przyszłości z zasady (a zatem zawsze, chyba, że odstępstwo zostanie to wyraźnie zaznaczone) podrozmaitość rozmaitości riemannowskiej będziemy traktować jako rozmaitość riemannowską mając na myśli tę określoną przez pierwszą formę strukturę riemannowską.

Rozmaitość riemanowską nazywamy *lokalnie płaską* gdy jest lokalnie izometryczna z przestrzenią euklidesową, to jest gdy dla każdego jej punktu istnieje otoczenie izometryczne z pewnym podzbiorem otwartym w E^n. Znalezienie kryteriów pozwalających stwierdzić czy dana rozmaitość jest lokalnie płaska jest jednym z pierwszych nasuwających się problemów geometrii riemannowskiej. W przypadku krzywych riemannowskich odpowiedź jest prosta: każda taka krzywa jest lokalnie płaka. Dokładniej:

każda spójna krzywa (tj 1-wymiarowa rozmaitość) riemannowska jest izometryczna z odcinkiem euklidesowej lini prostej lub z okręgiem w płaszczyźnie euklidesowej.

Niech X i Y będą rozmaitościami riemannowskimi. Wtedy $X \times Y$ jest też w naturalny sposób rozmaitością riemannowską. Wiemy już, że jest to rozmaitość różniczkowa. Ponadto, można łatwo wykazać, że jej przestrzeń styczna $T_{(x,y),X\times Y}$ jest w każdym punkcie $(x, y) \in X \times Y$ jest sumą prostą przestrzeni stycznych $T_{x,X}$ oraz $T_{y,Y}$. Wobec tego w przestrzeni stycznej $T_{(x,y),X\times Y}$ można jednoznacznie wyznaczyć iloczyn skalarny biorąc sumę ortogonalną iloczynów na $T_{x,X}$ oraz $T_{y,Y}$. Otrzymamy w ten sposób strukturę riemannowską (nazywaną *strukturą produktową)* na $X \times Y$. Łatwo wykazać, że produkt lokalnie płaskich rozmaitości riemannowskich jest też rozmaitością lokalnie płaską. Na przykład produkt krzywych riemannowskich

$$S^1 \times \ldots \times S^1 \times R^1 \times \ldots \times R^1$$

jest rozmaitością lokalnie płaską.

Jeżeli grupa G działa całkowicie dyskretnie na riemannowskiej rozmaitości X jako grupa izometrii, to rozmaitość X/G ma naturalną strukturę riemannowską, przy której przekształcenie ilorazowe $X \to X/G$ jest lokalną izometrią. Strukturę tę nazywać będziemy *ilorazową.*

11 Przykłady

1. Przestrzeń euklidesowa E^n. Wiemy już, że każda przestrzeń euklidesowa jest rozmaitością riemannowską. W tym przypadku jej riemanowską

strukturę można też analitycznie opisać w następujący sposób. W przestrzeni E^n wprowadzamy najpierw ortonormalny układ współrzędnych. Następnie w przestrzeni stycznej do E^n w każdym punkcie x wprowadzamy formę dwuliniową przez $\sum dx_i \otimes dx_i$.

2. *Każda rozmaitość różniczkowa dopuszcza pewną strukturę riemannowską.*

   Dowód. Istotnie, wiemy już, że każda rozmaitość różniczkowa jest dyfeomorficzna z podrozmaitością przestrzeni afinicznej $A^n(R)$. Ponieważ jednak $A^n(R)$ dopuszcza strukturę riemannowską E^n, więc strukturę taką dopuszcza jak już wiemy i każda jej podrozmaitość.

   Powyższy rezultat można też wykazać inaczej. Po pierwsze dla każdego punktu x możemy znaleźć takie otoczenie U_x, nad którym wiązka styczna jest trywialna, a zatem można na nim określić pewną strukturą riemannowską γ_x (np. płaską, tzn izometryczną z podzbiorem otwartym w E^n). Następnie można znaleźć pokrycie lokalnie skończone $\{U_i\}$ wpisane w pokrycie $\{U_x\}$. Dla każdego U_i wybierzmy zawierający go zbiór U_x oraz rozważmy strukturę riemannowską $\gamma_i = \gamma_x|U_i$. W końcu możemy wziąć gładki podział jedynki $\{f_i\}$ odpowiadający pokryciu $\{U_i\}$. Wtedy suma $\sum f_i\gamma_i$ określa już strukturę riemannowską na całym X, bo kombinacja liniowa form dodatnio określonych z dodatnimi współczynnikami jest też formą dodatnio określoną.

3. Na grupie Liego G można zawsze wprowadzić taką strukturę riemannowską, która jest *lewostronnie (lub prawostronnie) niezmiennicza*, tzn taką, że przesunięcia l_g (lub r_g) są izometriami. W tym celu należy najpierw ustalić dodatnio określoną formę dwuliniową na przestrzeni stycznej $T_{G,1}$, a następnie poprzesuwać ją korzystając z przekształceń dr_g (lub dl_g).

4. *Płaszczyzna Łobaczewskiego.* Niech $L = \{(x, y) \in R^2; y > 0\}$ będzie górną półpłaszczyzną w R^2 ze strukturą riemannowską daną przez tensor
$$\frac{1}{y^2}dx \otimes dx + \frac{1}{y^2}dy \otimes dy$$

5. Torus $S^1 \times S^1$ można zanurzyć jako rozmaitość różniczkową w R^3 na przykład rozpatrując powierzchnię otrzymaną w wyniku obrotu okręgu

$\{(x,y,z) \in R^3; x = 0, (y-a)^2 + z^2 = r^2\}$ (gdzie $a > r$) wokół osi z. Zanurzenie to wyznacza strukturę riemannowską na $S^1 \times S^1$. Na produkt $S^1 \times S^1$ (i ogólnej na produkt $S^1 \times ... \times S^1$) można jednak spojrzeć nieco inaczej, a mianowicie na $S^1 \times S^1$ (ogólnie, $S^1 \times ... \times S^1$) można również rozpatrywać strukturę produktową wyznaczoną jako produkt struktur $S^1 \subset E^2$. Jest ona wyznaczona przez zanurzenie $S^1 \times S^1$ w $E^2 \times E^2 = E^4$. Tak otrzymaną strukturę nazywa się *płaskim torusem* (gdyż struktura ta jest lokalnie płaska).

Ponieważ grupa $Z \times Z$ (ogólniej $Z \times ... \times Z$) działa na przestrzeni euklidesowej $R^2 = R \times R$ (ogólniej na $R^n = R \times ... \times R$) przez przesunięcia i przesunięcia są izometriami, a działanie to jest całkowicie dyskretne zatem $S^1 \times S^1 = (R \times R)/(Z \times Z)$ (ogólniej, $S^1 \times ... \times S^1 = (R \times ... \times R)/(Z \times ... \times Z)$ ma riemannowską strukturę ilorazową i struktura ta jest identyczna ze strukturą lokalnie płaską, o której była mowa wyżej.

Uwaga. Dla dowolnych funkcjonałów liniowych ϕ, ψ (lub ich pól, tj form różniczkowych), przez $\phi\psi$ oznaczamy symetryczny dwuliniowy funkcjonał (lub pole) równy $1/2(\phi \otimes \psi + \psi \otimes \phi)$.

12 Elementy geometrii rozmaitości riemanowskiej

Każda rozmaitość riemannowska ma swoją własną geometrię. Geometria rozmaitości riemannowskiej E^n nazywa się geometrią euklidesową. Była to przez wieki jedyna uprawiana i uznana geometria. Geometria płaszczyzny Łobaczewskiego - to płaska geometria Łobaczewskiego, a geometria sfery S^n - to (n-wymiarowa) geometria sferyczna.

W tym paragrafie wprowadzimy najbardziej elementarne pojęcia stanowiące punkt wyjścia i podstawę każdej geometrii mającej jako swe zadanie badanie rozmaitości riemannowskiej.

1. *Długość krzywej.* Jeśli (X, g) jest rozmaitością riemannowską, a $\phi : [a,b] \to X$ przekształceniem różniczkowym odcinka $[a,b] \subset R^1$ w X to

określamy długość $|\phi|$ obrazu $\phi([a,b])$ wzorem

$$|\phi| = \int_a^b |d\phi(\frac{\partial}{\partial x})|.$$

Wyżej skorzystaliḿy z tego, że pole styczne do krzywej parametrycznej $\phi : (a,b) \to X$ to obraz kanonicznego pola stycznego $\frac{\partial}{\partial x}$ określonego na (a,b) przy przekształceniu $d\phi$.

Można łatwo sprawdzić, że jeżeli ten obraz sparametryzujemy inaczej, to otrzymamy tę samą jego długość. W istocie, wynika to ze znanych rezultatów Analizy oraz faktu, że jeżeli $\phi([a,b]) \subset U$ i na U dany jest układ współrzędnych, to przekształcenie ϕ można zapisać w postaci $\phi(x) = (\phi^1(x), \dots, \phi^n(x))$, gdzie $n = dimX$ oraz $\phi^i(x)$ są funkcjami gładkimi. Wobec tego jako wzór na długość krzywej otrzymujemy

$$|\phi| = \int_a^b \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} g_{i,j}(\phi(x))\,\frac{d\phi^i}{dx}(x)\frac{d\phi^j}{dx}(x)}.$$

Łatwo jest sprawdzić, że jeśli ϕ jest różnowartościową immersją, a ϕ_t jest ograniczeniem funkcji ϕ do odcinka $[a,t]$, to funkcja $[a,b] \to R^+$ określona wzorem $t \to |\phi_t|$ jest diffeomorfizmem na swój obraz. Każdą krzywą można zatem sparametryzować jej długością. Każdą z takich parametryzacji nazywamy *parametryzacją naturalną*. Takie parametryzacje $\phi : [a,b] \to X$ charakteryzują się tym, że długości wektorów $\frac{d\phi}{dt}$ są stałe równe 1. Ponadto dla dowolnej różnowartściowej immersji $\phi : [a,b] \to X$ możemy określić długość obrazu $\phi([a,b])$ jako $|\phi|$ i ta definicja nie zależy od wybranej parametryzacji tego obrazu, to znaczy, od wyboru ϕ.

2. *Odległość punktów.* Na każdej rozmaitości riemannowskiej możemy określić metrykę μ, przyjmując jako $\mu(a,b)$ minimum długości krzywych (spójnych) łączących w X punkt a z punktem b. Można udowodnić, że $\mu(a,b) > 0$ o ile a i b są różnymi punktami, ale na razie dowód tego faktu pominiemy.

   Opiera się to na następującym rozumowaniu: niech U będzie otoczeniem punktu a z układem współrzędnych takim, że $b \notin U$. Załóżmy, ponadto, że

   a. współrzędnymi punktu a jest układ $(0, \dots, 0)$

b. $g_{i,j}(a) = \delta_{i,j}$,

c. dla pewnego $\epsilon > 0$,

$$E_\epsilon \stackrel{df}{=} \{(x_1, \ldots, x_n); |x_i| \leq \epsilon, i = 1, \ldots, n\} \subset U$$

d. dla ϵ jak wyżej i, dla każdego $u \in U$, $|g_{i,j}(u)| < \delta_{i,j} + \frac{\epsilon}{2n^2}$,

Wówczas każda krzywa łącząca punkt a z brzegiem zbioru E_ϵ ma długość większą niż pewna liczba dodatnia. Aczkolwiek jest to intuicyjnie zrozumiałe, to jednak nadanie takiemu rozumowaniu pełnej precyzji nie jest takie łatwe. Powrócimy do tego później.

Wobec tego długość każdej krzywej łączącej punkty a i b ma długość nie mniejszą od $\frac{n\epsilon}{2}$.

Sprawdzenie teraz aksjomatów metryki przez tak zdefiniowaną funkcję μ nie przedstawia trudności (tylko aksjomat "nierówności trójkąta" wymaga wygładzenia dwóch spotykających się końcem (pierwszej) z i początkiem (drugiej) z dowolnie małą zmianą łącznej ich długości.)

Jako wniosek otrzymujemy zatem, że

rozmaitość riemannowska jest przestrzenią metryczną. Przy tym topologia zadana przez tą metryką pokrywa się z wyjściową topologią rozmaitości X.

3. *Kąt między krzywymi w ich punkcie przecięcia.* Niech p będzie punktem wspólnym krzywych zawartych w rozmaitości riemannowskiej X. Wówczas przez kąt między tymi krzywymi rozumiemy kąt między prostymi stycznymi do tych krzywych w punkcie p. Proste te leżą w przestrzeni stycznej euklidesowej $T_{p,X}$, a zatem kąt ten jest jednoznacznie wyznaczony przez podanie jego miary z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. *Kanoniczna forma objętości.* Niech X będzie zorientowaną rozmaitością riemannowską. Wówczas każdemu punktowi $x \in X$ możemy przyporządkować iloczyn zewnętrzny

$$\eta(x) = \sqrt[2]{det(g_{i,j})^{-1}}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n,$$

gdzie $\alpha_1, ..., \alpha_n$ jest dowolną dodatnio zorientowaną bazą przestrzeni kostycznej $T^*_{X,x}$ oraz $[g_{i,j}]$ jest macierzą iloczynu skalarnego w bazie dualnej do $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Wartość $\eta(x)$ tak zdefiniowana nie zależy od wyboru bazy $\alpha_1, ..., \alpha_n$, a różniczkowa forma η jest gładka. Nazywamy ją *formą objętości* zorientowanej rozmaitości riemannowskiej X.

Każdy wektor α liniowej przestrzeni euklidesowj wyznacza funkcjonał określony na dowolnym wektorze γ tej przestrzeni jako iloczyn skalarny $\alpha, \gamma)$ i odwrotnie, każdy funkcjonał jest w ten sposób wyznaczony przez pewien wektor. Każdy wektor kontrawariantny można zatem zastąpić przez odpowiadający mu wektor kowariantny. W konsekwencji, pozwala to na utożsamienie (identyfikację) liniowej przestrzeni euklidesowej V i przestrzeni V^* do niej sprzężonej oraz utożsamienie przestrzeni tensorowej $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ typu (p, q) z przestrzenia tensorową typu (p', q'), o ile tylko $p+q = p'+q'$. Na przykład przestrzeń tensorowa $End(V)$ może być utożsamiona z $Lin(V, V; R)$. Przy tym utożsamieniu endomorfizm $\phi : V \to V$ jest utożsamiony z funkcjonałem dwuliniowym $\overline{\phi}$ zdefiniowanym wzorem

$$\overline{\phi}(\alpha, \beta) = (\phi(\alpha), \beta),$$

gdzie $(.., ..)$ jest iloczynem skalarnym.

Jak zatem widać taka możliwość utożsamiania przestrzeni stycznych i kostycznych rozmaitości riemannowskich znacznie rozszerza możliwości interpretacji tensorów i ich pól, co w konsekwencji wzbogaca zasób metod (na przykład zwężanie), które można stosować.

W badaniach własności przestrzeni euklidesowej pomocne jest odwoływanie się do układów współrzędnych, a wśród nich szczególną rolę grają układy dane przez ortonormalne bazy wektorów. W przypadku rozmaitości rola wektorów w znacznym stopniu przejęta jest przez pola wektorowe, a rola bazy przez takie układy pól, których wartości w każdym punkcie stanowią bazę. Układy takie wygodnie jest nazywać *układami bazowymi*. W przypadku rozmaitości riemannowskich każdy układ bazowy można sprowadzić metodą Schmidta do układu ortonormalnego, to znaczy takiego układu, który w każdym punkcie jako swe wartości przyjmuje wektory tworzące bazę ortoniormalną.

Na rozmaitości lokalnie płaskiej, dla każdego punktu można dobrać takie otoczenie i na nim układ współrzędnych, w którym pola $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}1$ tworzą układ bazowy ortonormalny. Wiemy, że bazowe układy ortonormalne istnieją lokalnie na każdej rozmaitości riemannowskiej, ale nie są one na ogółwyznaczone przez układy współrzędnych jako $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$.

13 Równanie Eulera

Celem tego paragrafu jest podanie pewnej metody, która pozwala na znalezienie spośród wszystkich krzywych parametrycznych $\phi : [0, 1] \to X$ łączących dane dwa punkty $a, b \in X$ tej, która ma najmniejszą długość. Załóżmy, że punkty te należą do jednego (spójnego) zbioru otwartego, na którym istnieje układ współrzędnych. Wówczas takiej krzywej o minimalnej długości szukamy wśród krzywych $\phi : [0,1] \to U$ zadanych przez

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)),$$

gdzie ϕ_i są funkcjami gładkimi określonymi na odcinku $[0,1]$ spełniajçymi warunki $\phi(0) = a$, $\phi(1) = b$. Długość takiej krzywej jak już wiemy równa jest

$$\int\limits_0^1 \sqrt[2]{\sum g_{i,j}(\phi(t)) \frac{d\phi_i}{dt} \frac{d\phi_j}{dt}} dt.$$

Mamy zatem do czynienia ze szczególnym przypadkiem następującego zagadnienia:

Dana jest funkcja $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ określona na $A^{2n}(R)$. Rozważamy następnie rodzinę wszystkich n-elementowych ciągów $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ funkcji gładkich określonych na odcinku $[0,1]$ przyjmujących w punktach 0 i 1 ustalone wartości $\phi_i(0) = a_i$, $\phi_i = b_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Zadanie polega na znalezieniu takich ciągów, dla których

$$\int\limits_0^1 F(\phi_1, \ldots, \phi_n; \frac{d\phi_1}{dt}, \ldots \frac{d\phi_n}{dt}) dt$$

przyjmuje minimalną wartość. W rozpatrywanym przez nas zagadnieniu chcielibyśmy zatem jako funkcję F przyjąć:

$$F((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sqrt[2]{\sum g_{i,j}(x_1, ..., x_n) y_i y_j}.$$

Pewną drogę jego rozwiązywania można opisać w następujący sposób: rozpatrzmy układ $\delta = (\delta_1(t), \ldots, \delta_n(t))$ funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ spełniających warunki $\delta_i(0) = \delta_i(1) = 0$. Wtedy układ $\phi + u\delta$, gdzie u przebiega pewien odcinek $[-\epsilon, +\epsilon]$, gdzie ϵ jest pewną liczbą dodatnią, nazywamy *wariacją* układu ϕ. Jeśli układ ϕ minimalizuje wartość całki, to dla każdej wariacji $\phi + u\delta$ funkcja

$$\mathcal{L}_{\phi+u\delta}(u) \stackrel{df}{=} \int\limits_0^1 F(\phi + u\delta, \frac{d(\phi + u\delta)}{dt}) dt$$

w punkcie $u = 0$ osiąga minimum, a zatem

$$\frac{d\mathcal{L}_{\phi+u\delta}}{du}(0) = 0.$$

Korzystając z możliwości przechodzenia z różniczkowaniem pod znak całki mamy więc, po wprowadzeniu oznaczeń

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$$
$$\frac{d\phi}{dt} = (\frac{d\phi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\phi_n}{dt})$$

następujące równanie

$$\int_0^1 \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\phi, \frac{d\phi}{dt})\delta_i\, dt + \int_0^1 \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(\phi, \frac{d\phi}{dt})\frac{d\delta_i}{dt}dt = 0$$

Całkując przez części drugi składnik otrzymujemy

$$\int_0^1 \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\phi, \frac{d\phi}{dt})\delta_i\, dt + (\sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(\phi, \frac{d\phi}{dt})\delta_i)|_0^1 - \int_0^1 \sum_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y_i})(\phi; \frac{d\phi}{dt})\delta_i\, dt = 0$$

Ponieważ $\delta_i(0) = \delta_i(1) = 0$, dla $i = 1, \ldots, n$, zatem środkowy składnik równy jest zero. Ponieważ wynikająca stąd równość zeru drugiego składnika ma zachodzić dla wszystkich wyborów funkcji δ_i, zatem otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych, który winny spełniać funkcje $\phi_1, \ldots, \phi_n$ minimalizujące wartość $\mathcal{L}_{\phi+u\delta}(\phi, \frac{d\phi}{dt})$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\phi, \frac{d\phi}{dt}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y_i})(\phi, \frac{d\phi}{dt}) = 0$$

Schematycznie można te równania zapisać jako:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}) = 0$$

Powyższe równania nazywa się *równaniami Eulera*.

W interesującym nas zagadnieniu minimalizacji długości krzywych łączących dwa dane punkty winniśmy wziąć

$$F((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sqrt[2]{\sum g_{i,j}(x_1, ..., x_n)y_iy_j}.$$

Jednakże perspektywa wyznaczenia równań Eulera w tym przypadku wydaje się nieatrakcyjna. Z tego powodu i na tym etapie rozważań, jedynie z tego powodu, zamiast powyższej funkcji F weźmy jej kwadrat, to znaczy załóżmy, że

$$F((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum g_{i,j}(x_1, ..., x_n) y_i y_j.$$

Po przyjęciu, wprowadzonych już poprzednio, oznaczeń

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = (\frac{d\phi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\phi_n}{dt})$$

mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) = \sum_{i,j} \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k}(x) y_i y_j,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y_k})(x, y) = \frac{d}{dt}(\sum_j g_{k,j}(x) y_j + \sum_j g_{j,k}(x) y_j) =$$

$$\sum_l \sum_j \frac{\partial g_{k,j}}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} y_j + \sum_j g_{k,j}(x) \frac{dy_j}{dt} +$$

$$\sum_l \sum_j \frac{\partial g_{k,j}}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} y_j + \sum_j g_{j,k}(x) \frac{dy_j}{dt}.$$

i równania Eulera przybierają postać układu n równań różniczkowych numerowanych wskaźnikiem $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k}(\phi) \frac{d\phi_i(t)}{dt} \frac{d\phi_j(t)}{dt}$$

$$- \sum_{l,j} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_l} \frac{d\phi_l(t)}{dt} \frac{d\phi_j(t)}{dt} - \sum_{l,j} \frac{\partial g_{k,j}}{\partial x_l}(\phi) \frac{d\phi_j(t)}{dt} \frac{d\phi_l(t)}{dt}$$

$$- \sum_j g_{k,j}(\phi) \frac{d^2\phi_j}{dt^2} - \sum_j g_{j,k}(\phi) \frac{d^2\phi_j}{dt^2} = 0$$

lub krócej

$$\sum_{j,l} \Gamma_{k;j,l} \frac{d\phi_j(t)}{dt} \frac{d\phi_l(t)}{dt} + \sum_j g_{k,j}(\phi) \frac{d^2\phi_j}{dt^2} = 0$$

dla

$$\Gamma_{k;j,l} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{k,l}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{k,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{j,l}}{\partial x_k}).$$

Ten układ równań można zapisać macierzowo jako

$$[\Gamma][\frac{d\phi}{dt}][\frac{d\phi}{dt}] + G[\frac{d^2\phi}{dt^2}] = 0,$$

gdzie

$$G = [g_{i,j}] \text{ oraz } \Gamma = [\Gamma_{k;j,l}].$$

Mnożąc kolumnę utworzoną przez te równania przez macierz $G^{-1} = [g^{k,l}]$ odwrotną do macierzy $G = [g_{k,l}]$, a następnie mnożąc równania przez -1 i pozostawiając po lewej stronie jedynie $\frac{d^2\phi_i}{dt^2}$ otrzymamy układ:

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} = -\sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} \frac{d\phi_k(t)}{dt} \frac{d\phi_l(t)}{dt}$$

gdzie

$$\Gamma^i_{k,l} = \sum_j g^{i,j} \Gamma_{j;k,l}$$

Określone tak funkcje $\Gamma_{j,k,l}$ $\Gamma^j_{k,l}$ nazywają się *symbolami Christoffela odpowiednio I-go oraz II-go rodzaju.* Zależą one od przyjętego układu współrzędnych, a wzory na ich zmianę przy zmianie układu współrzędnych zawierają nie tylko współrzędne macierzy Jacobiego (pierwsze pochodne funkcji zmiany współrzędnych), jak w przypadku współrzędnych tensorów, ale też drugie pochodne. Istotnie, jeśli

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$$

jest zmianą układu współrzędnych, to symbole Christoffela $\Gamma^l_{m,r}$w nowym układzie współrzędnych $(y_1, \dots, y_n)$ wyrażają się przez stare wzorem

$$\sum_{i,j,k} \Gamma^i_{j,k} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} + \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^m \partial y^r} \frac{\partial y^l}{\partial x^i}$$

Sprawdzenie pozostawiamy chętnym.

Czytelnik zauważył zapewne pewną niekonsekwencję w powyżej przedstawionym rozumowaniu. Chodzi o to, że chcieliśmy minimalizować długość krzywej parametrycznej ϕ, a zatem jako F powinniśmy wziąć

$$\sqrt[2]{\sum_{i,j} g_{i,j}(x_1,\ldots,x_n)y_iy_j},$$

a nie

$$\sum_{i,j} g_{i,j}(x_1,\ldots,x_n)y_iy_j.$$

Można jednak mieć nadzieję, że taka próba nie zmieni istoty zagadnienia, przed którym stoimy, a przy tym znacznie uprości przeprowadzane rachunki. Rychło okaże się, że te nasze nadzieje są spełnione.

W tym miejscu warto powiedzieć, że wskazanie funkcji F, jak wyżej, prowadzi do układu zwyczajnych równań różniczkowych stopnia drugiego, które w zastosowaniach fizycznych mogą opisywać przebieg w czasie jakichś procesów fizycznych. Równania te są zwykle bardziej skomplikowane niż wyznaczająca je funkcja F. Z drugiej strony F te równania wyznacza. Wobec tego operowanie tą funkcją może okazać się znacznie wygodniejsze niż operowanie tymi równaniami. Znajdywane tak funkcje dla różnych procesów fizycznych nazywają się "działaniami". Równania Eulera ekstremalizują (czasem minimalizują) całki z działania po czasie. To, że otrzymane tak równania różniczkowe opisują przebiegi procesów fizycznych nazywa się w fizycyce *Zasadą najmniejszego działania*. Często działanie nie ma wyraźnego sensu fizycznego, ale ma jakiś związek z energią. W naszej sytuacji funkcja F opisuje jakby gęstość, lub kwadrat gęstości, struktury riemanowskiej.

14 Geodezyjne i przekształcenie wykładnicze.

Niech X będzie rozmaitością riemannowską, $U \subset X$ jej podzbiorem otwartym z ustaloną mapą (układem współrzędnych). W rozważaniach możemy więc utożsamiać punkty $x \in U$ z układami ich współrzędnych. Krzywą $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n) : [a,b] \to U$ nazywamy *geodezyjną*, gdy spełnia układ równań różniczkowych.

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} = -\sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l}\frac{d\phi_k(t)}{dt}\frac{d\phi_l(t)}{dt},$$

gdzie $\Gamma^i_{k,l}$ są symbolami Christofela (drugiego rodzaju).

Przykłady.

1. Przestrzeń euklidesowa.W tym przypadku w ortonormalnym układzie współrzędnych $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, a zatem $\Gamma^i_{k,l} = 0$. Geodezyjnymi są więc krzywe ϕ spełniajçe w takim ortonormalnym układzie współrzędnych równania $\frac{d^2\phi^i}{dt^2} = 0$. Wobec tego otrzymujemy jako geodezyjne proste afiniczne
$$(a_1 + b_1 t, \ldots, a_n + b_n t)$$
2. Płaszczyzna Łobaczewskiego. W tym przypadku okazuje się, że geodezyjnymi są (sparametryzowane w sposób proporcjonalny do naturalnego) górne półokręgi okręgów o środkach na osi x oraz graniczne ich formy: półproste prostopadłe do osi x.
3. Sfera S^2. W tym przypadku geodezyjnymi są wielkie koła (sparametryzowane w sposób proporcjonalny do naturalnego)

Nietrudny rachunek pokazuje, że pojęcie geodezyjnej nie zależy od przyjętego układu współrzędnych.

Wobec tego jest sens mówić o geodezyjnych krzywych parametrycznych $\phi : [a, b] \to X$ nie odwołując się do żadnego ustalonego układu współrzędnych.

Zgodnie z przyjętą definicją każda geodezyjna jest parametryczną krzywą (tj gładkim przekształceniem odcinka w daną rozmaitość). Okazuje się, że w istocie tak otrzymane krzywe parametryczne mają bardzo szczególne własności.

Twierdzenie. *Niech $\phi : [a, b] \to X$ będzie geodezyjną. Wtedy długość wektorów $\frac{d\phi}{dt}$ jest stała.*

Oznacza to, że jeżeli w pewnym układzie współrzędnych
$$\phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi(t)),$$
to długość $\sqrt[2]{g(\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\phi}{dt})}$ wektora stycznego $\frac{d\phi}{dt} = (\frac{d\phi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\phi_n}{dt})$ w każdym punkcie odcinka $[a, b]$ jest taka sama. Wobec tego otrzymana tak parametryzacja krzywej będącej obrazem jest proporcjonalna do naturalnej. Dowód polega na wykazaniu, że dla geodezyjnej $\phi : (a, b) \to X$
$$\frac{d}{dt}(g(\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\phi}{dt})) = \frac{d}{dt}\sum_{i,j}(g_{i,j}\frac{d\phi_i}{dt}\frac{d\phi_j}{dt}) = 0,$$

a to jest prostym zadaniem, które pozostawiamy bez dowodu.

W dalszym ciągu wykładu będziemy korzystać z następującego twierdzenia będącego wnioskiem z twierdzenia o istnieniu rozwiązań liniowych równań różniczkowych i gładkiej zależności rozwiązań od warunków początkowych.

Twierdzenie. *Niech X będzie rozmaitością riemannowską, $p \in X$, niech V będzie otoczeniem punktu p z układem współrzędnych $x \leftrightarrow (x_1(x), ..., x_n(x))$, w którym punkt p ma współrzędne $(0, ..., 0)$. Istnieją wówczas liczby rzeczywiste $a > 0, b > 0, \epsilon > 0$ oraz gładkie przekształcenie*

$$\Phi : \{[(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), t]; |x_i| < a, |y_i| < b, |t| < \epsilon\} \to X,$$

takie, że dla ustalonych $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)$ oraz t przebiegającego odcinek $(-\epsilon, \epsilon)$ krzywa $\phi = \Phi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), t)$ jest geodezyjną spełniającą warunki początkowe

$$\phi(0) = (x_1, ..., x_n),$$

$$\frac{d\phi}{dt}(0) = (y_1, ..., y_n).$$

Z tego twierdzenia wynikają ważne dla naszych rozważań następujące rezultaty:

Wniosek. *Niech X będzie rozmaitością riemanowską, $U \subset X$ podzbiorem otwartym z układem współrzędnych oraz niech $x \in U$. Dla każdego $v \in T_{x,X}$ istnieje taka geodezyjna $\phi_v : [-\epsilon, \epsilon] \to U$, gdzie $\epsilon > 0$, że*

1. $\phi_v(0) = x$,
2. $d(\phi_v)(\frac{\partial}{\partial x}) = v$, *tj.* $\frac{d\phi}{dt} = v$.

Ponadto istnieje taka dodatnia liczba δ, że dla każdego wektora $v \in T_{x,X}$ o długości $|v| < \delta$, ϕ_v jest określone określone na przedziale $[-2, 2]$ a przekształcenie $\{v \in T_{x,X}; |v| < \delta\} \times [-2, 2] \xrightarrow{\phi_v} X$ jest gładkie oraz przekształcenie exp kuli $\{|v| < \delta$ dane wzorem $exp_x(v) = \phi_v(1)$ jest diffeomorfizmem na pewne otoczenie $V \subset U$ punktu x w X.

Wniosek. *Niech x będzie punktem rozmaitości riemanowskiej X. Istnieje takie otoczenie $V \subset X$ tego punktu, że, dla każdego $y \in V$ istnieje dokładnie jedna taka krzywa geodezyjna $\phi : [0, 1] \to V$, że $\phi(0) = x$ oraz $\phi(1) = y$*

Przekształcenie exp_x określone wyżej nazywa się

$$\textit{odwzorowaniem wykladniczym}.$$

Warto sobie zdać sprawę z tego, że, przy odwzorowaniu wykładniczym exp_x, punkt $0 \in T_{x,X}$ przechodzi na x, a odcinki prostych przechodzących przez 0 odwzorowywane są na odcinki geodezyjnych przechodzących przez x. Wynika stąd dalej, że jeśli przestrzeń styczną do $T_{x,X}$ w punkcie 0 utożsamimy z $T_{x,X}$ to przekształcenie $d(exp_x)$ jest identycznością, a zatem exp_x jest diffeomorfizmem w pewnym otoczeniu punktu 0.

Definicja. Otoczenie U punktu $p \in X$ nazywamy *otoczeniem normalnym*, gdy jest diffeomorficznym obrazem przy odwzorowaniu exp_p pewnego gwiaździstego otoczenia zera w przestrzeni stycznej $T_{p,X}$.

Przypomnijmy, że gwiaździste otoczenie zera w rzeczywistej przestrzeni wektorowej, to takie otoczenie, które wraz z każdym wektorem v zawiera wektory tv, dla wszystkich $0 \leq t \leq 1$

Ustalmy w pewnym otoczeniu V punktu p układ współrzędnych.

Każdy układ współrzędnych w przestrzeni wektorowej $T_{p,X}$ (a zatem każda baza tej przestrzeni) wyznacza dzięki przekształceniu wykładniczemu, układ współrzędnych na każdym otoczeniu normalnym tego punktu. Tak otrzymane układy współrzędnych nazywamy *normalnymi.* Szczególną rolę grają tu normalne układy współrzędnych wyznaczone przez ortonormalne bazy w $T_{p,X}$. W takim przypadku w przestrzeni stycznej warto też rozpatrywać biegunowe układy współrzędnych, w których punktowi $0 \neq v = (x_1, ..., x_n) \in T_{p,X}$ przyporządkowujemy układ

$$(t, p_1, ..., p_n),$$

gdzie $t = \sum x_i^2$, $p_i = x_i/t$.

15 "Krzywe geodezyjne są lokalnie najkrótsze."

Niech na podzbiorze otwartym V rozmaitości riemannowskiej X dany będzie układ współrzędnych

$$x \mapsto (x_1(x), \ldots, x_n(x)).$$

Niech $p \in V$ i założmy, że współrzędnymi puktu p jest układ $(0, ..., 0)$. Niech $q \in V$ oraz

$$V_\delta(q) \stackrel{df}{=} \{x \in V; \sum_i (x_i(q) - x_i(x))^2 < \delta^2\}.$$

Lemat A. *Niech $p \in V$ będzie jak wyżej. Istnieje $\delta > 0$ o następującej własności:*

dla każdego $q \in V_\delta(p)$ otoczenie $V_{2\delta}(q)$ jest zawarte w pewnym otoczeniu normalnym punktu q zawartym w V.

Lemat ten jest prostym wnioskiem z ogólnego twierdzenia o gładkiej zależności rozwiązań równania różniczkowego od warunków początkowych.

Możemy założyć i załóżmy, że $g_{ij}(p) = \delta^i_j$. Niech teraz δ' będzie mniejsze od δ oraz spełnia następujący warunek:

forma kwadratowa o macierzy

$$M(x) = [\delta_{i,j}] - [\sum_k x_k \Gamma^k_{i,j}(x)]$$

jest dodatnio określona w punktach $x = (x_1, \ldots, x_n)$, gdy $|x_i| < \delta'$.

Lemat B. *Niech D' będzie brzegiem otoczenia $V_{\delta'}(p)$. Każda geodezyjna $\phi : (a,b) \to X$ styczna do D' w punkcie $\phi(c)$, $c \in (a,b)$ pozostaje, w pewnym otoczeniu punktu $c \in (a,b)$, na zewnątrz otoczenia $V_{\delta'}(p)$.*

Dowód. Niech $\phi(t)$ będzie geodezyjną, o której mowa w lemacie B. Niech $\phi(c)$ będzie punktem styczności. Z warunku styczności wynika, że pierwsza pochodna funkcji $\sum_i \phi_i(t)^2$ w punkcie $t = c$ równa jest zero. Teraz należy jeszcze sprawdzić, że druga pochodna tej funkcji jest dodatnia w tym punkcie, bo jeśli tak jest, to funkcja $\sum_i \phi_i(t)^2 - \delta^2$ w punkcie c wraz z pierwszą pochodną przyjmuje wartość zero i ma dodatnią drugą pochodną w tym punkcie, a zatem jest dodatnia w pewnym otoczeniu punktu c. Oznacza to, że krzywa ta pozostaje, dla wartości parametru z tego otoczenia, na zewnątrz $V_{\delta'}(p)$.

Dla dowodu tego faktu, korzystamy tu ze spełnienia przez $\phi(t)$ równań geodezyjnej

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} = -\sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} \frac{d\phi_k}{dt}\frac{d\phi_l}{dt}$$

oraz dodatniej określoności formy kwadratowej o macierzy $M(\phi(t_0))$.

Twierdzenie. *Dla każdego punktu $p \in X$, istnieje otoczenie, które jest normalne dla każdego punktu tego otoczenia.*

Dowód polega, na sprawdzeniu, że każde dwa punkty x, y należące do $V_{\delta'}(p)$ mogą być połączone geodezyjną zawartą w tym otoczeniu. Dowodzi się, że zbiór D par $(x, y) \in V_{\delta'}(p) \times V_{\delta'}(p)$ spełniających ten warunek jest niepusty i domknięto-otwarty. W tym celu należy skorzystać z Lematów A oraz B. Istotnie, niech $(x, y) \in D$ oraz γ jest geodezyjną zawartą w $V_{\delta'}(p)$ łączącą punkt x z punktem y. Z Lematu A wiemy, że punkt y należy do pewnego normalnego otoczenia punktu x i odwrotnie punkt x należy do normalnego otoczenia punktu y, a zatem istnieje takie otoczenie otwarte W punktu $(x, y) \in V_{\delta'}(p) \times V_{\delta'}(p)$, że dla $(u, w) \in W$, u może być połączone z w jedyną geodezyjną leżącą w $V_{2\delta}(p)$. Ponieważ wiemy, że ta geodezyjna łącząca punkty x, y jest zawarta w $V_{\delta'}(p)$ zatem zmniejszając otoczenie W dostaniemy takie , że dowolne dwa punkty u oraz w takie, że (u, w) należy do tego otoczenia można połączyć geodezyjną leżącą w $V_{\delta'}(p)$. Dowodzi to otwartości zbioru D. Dla dowodu domkniętości załóżmy, że $x_n \to x$, $y_n \to y$ oraz $(x_n, y_n) \in D$. Zóżmy, że geodezyjne γ_n parametryzowane przez $[0, 1]$ łączą x_n z y_n i pozostają w $V_{\delta'}(p)$. Wtedy γ będąca granicą γ_n jest geodezyjną łączącą x z y i należy wykazać, że pozostaje ona w obrębie $V_{\delta'}(p)$. Jednak w przeciwnym razie byłaby styczna do brzegu $V_{\delta'}(p)$, a z Lematu B wynika, że to nie jest możliwe, bo przecież pozostaje ona w $\overline{V_{\delta'}(p)}$.

Niech
$$x \leftrightarrow (t(x), p^1(x), ..., p^n(x))$$
będzie biegunowym układem współrzędnych wyznaczonym przez ortogonalny normalny układ współrzednych
$$x \leftrightarrow (x^1, ..., x^n).$$
Oznacza to, że $t(x) = \sqrt[2]{(x^1)^2 + ... + (x^n)^2}$ oraz $p^i(x) = x^i/t(x)$. Można sprawdzić, że formy
$$dt, dp^1, ..., dp^n$$
rozpinają wszystkie formy (bo $dx_i = p_i dt + t dp_i$, dla $i = 1, ..., n$, a forma dt nie jest kombinacją liniową form dp^i (bo formy dp_i są liniowo zależne $p_1 dp_1 + ... + p_n dp_n = 0$, a zatem rozpinają przestrzeń $(n-1)$-wymiarową, do której dt nie należy). Ponieważ $x_i = tp_i$, zatem $dx^i = p^i dt + \phi^i$, gdzie ϕ^i są formami, które w w przedstawieniu jako kombinacja liniowa form $dt, dp^1, ..., dp^n$, nie zawierają formy dt. Otrzymamy stąd, że $dp_i(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$ (bo $dp_i(\frac{\partial}{\partial t})$ jest wektorem stycznym do krzywej sparametryzowanej przez t i danej jako $p_i(tx_1, ..., tx_n)$, a zatem krzywej stałej). Wynika stąd, że $\phi^i(\frac{\partial}{\partial t}) = 0, i = 1, ..., n$ oraz, dla każdego $j = 1, ..., n$ istnieje takie $i = 1, ..., n$, że $\phi^i(\frac{\partial}{\partial p^j}) \neq 0$.

Lemat. $g = (dt)^2 + (\phi^1)^2 + ... + (\phi^n)^2$.

Dowód tego lematu wymaga pewnych środków, które na razie nie są nam dostępne i odkładamy go na później.

Przypomnijmy, że na dla każdej rozmaitości riemannowskiej określiliśmy $\rho : X \times X \to R$, przyporządkowując każdej parze punktw $p, q \in X$ kres dolny długości wszystkich krzywych kawałkami gładkich (lub, co na jedno wychodzi, wręcz: gładkich) o początku w p i końcu w q.

Twierdzenie. *Niech X będzie rozmaitością riemannowską, niech $p \in X$. Niech $x \leftrightarrow (x_1(x), ..., x_n(x)$ będzie normalnym ortogonalnym układem współrzędnych określającym diffeomorfizm pewnej kuli $K_(\delta) \to N_p$. Wtedy każdy punkt $q \in N_p$ można połączyć z p geodezyjną leżącą w N_p tylko na jeden sposób (z dokładnością do parametryzacji tej geodezyjnej). Długość tej geodezyjnej równa jest $\rho(p, q)$. Ponad to N_p jest zbiorem tych wszystkich punktów q, dla których $\rho(p, q) < \delta$.*

Pierwsza część tego twierdzenia jest już nam znana. Dla dowodu drugiej, należy udowodnić, że geodezyjna, o której mowa w pierwszej części twierdzenia, jest najkrótszą krzywą łączącą punkty p i q. Wynika to łatwo z podanego wyżej lematu, bo każda krzywa $\psi : (a, b) \to X$, która zboczy z toru wyznaczonego przez geodezyjną będącą obrazem promienia kuli, we wzorze na swą długość zapisaną przy użyciu formy g w postaci $dt^2 + \sum \phi_i^2$ da pod pierwiastkiem większy od zera składnik pochodzący od wzięcia wartości funkcjonałów ϕ_i na wektorach stycznych krzywej ψ.

Z twierdzenia tego wynika zapowiedziany poprzednio fakt mówiący o tym, że ρ spełnia wszystkie aksjomaty metryki.

Teraz korzystając z udowodnionego wyżej twierdzenia i z twierdzenia o istnieniu otoczeń, które są normalne dla każdego swego punktu łatwo wynika następujące:

Twierdzenie. *Jeśli $\phi : [a, b] \to X$ jest najkrótszą krzywą łączącą $\phi(a)$ oraz $\phi(b)$, to ϕ jest geodezyjną.*

Jeśli ϕ jest geodezyjną to dla każdego u z odcinka otwartego (a, b) istnieje δ, że dla każdego $0 < \epsilon < \delta$, $\phi|[u - \epsilon, u + \epsilon]$ jest jedyną najkrótszą krzywą łączącą $\phi(u - \epsilon)$ oraz $\phi(u + \epsilon)$.

16 Rozmaitości zupełne.

Definicja. Rozmaitość riemannowską X nazywamy *geodezyjnie zupełną*, jeśli każda geodezyjna $\phi : [a, b] \to X$ może być rozszerzona do geodezyjnej $[-\infty, +\infty] \to X$. Oznacza to, że na rozmaitości geodezyjnie zupełnej X, dla dowolnego $x \in X$ przekształcenie exp_x jest określone na całej przestrzeni stycznej $T_{x,X}$ i odwrotnie.

Mówimy, że rozmaitość riemannowska X jest *zupełna w punkcie* $x \in X$, gdy przekształcenie exp_x jest określone na całej przestrzeni stycznej $T_{x,X}$, to znaczy gdy każda geodezyjna $\phi : (a, b) \to X$ przechodząca przez punkt x może być rozszerzona do geodezyjnej $[-\infty, +\infty] \to X$.

Twierdzenia Hopfa-Rinowa. *Niech X będzie spójną rozmaitością riemannowską. Następujące cztery warunki są równoważne:*

1. *rozmaitość X jest geodezyjnie zupełna,*
2. *rozmaitość X jest zupełna w pewnym punkcie p,*
3. *domknięcie każdego podzbioru $U \subset X$ ograniczonego w metryce ρ (wyznaczonej przez strukturę riemannowską na X) jest zwarte*
4. *rozmaitość X jest zupełna w metryce ρ.*

Ponadto, na każdej rozmaitości X spełniającej te warunki każde dwa punkty $x, y \in X$ można połączyć geodezyjną o długości $\rho(x, y)$.

Opowiadanie o dowodzie.

Dowód przebiega mniej więcej tak.

(4) $\to$ (1). Załóżmy, że mamy geodezyjną ϕ daną na odcinku o końcu w punkcie skończonym t_0. Pokażemy, że można ją przedłużyć jeszcze poza ten punkt. Niech ciąg t_n zbiega z dołu do t_0. Ciąg $\phi(t_n)$ jest Cauchy'ego (bo parametr t jest proporcjonalny do naturalnego!), a więc jest zbieżny do pewnego punktu. Przyjmijmy ten punkt jako wartość ϕ w punkcie t_0. Przedłużamy w ten sposób funkcję ϕ określoną na lewo od punktu t_0 również na ten punkt. Niech $\phi(t_0) = q$. Weźmy otoczenie tego punktu, które jest normalne dla każdego punktu tego otoczenia. Widać, że tę geodezyjną można w obrębie tego otoczenia przedłużać. Zatem można ją przedłużyc na prawo od t_0.

Wynikanie (1) $\to$ (2) jest oczywiste.

(2) $\to$ (3) Niech

$$W_r(p) = \{x \in X; \rho(x, p) \le r\},$$

$W'_r(p) = \{x \in X; x$ można połączyć z p geodezyjną o długości $\rho(p,x) \leq r\}$.

Oczywiście $W'_r(p) \subset W_r(p)$, ponadto $W'_r(p)$ jest (jak to można bez trudu wykazać) zwarty (jako obraz kuli domkniętej przy przekształceniu exp_p). Wobec tego dla dowodu (3) wystarczy wykazać, że $W_r(p) = W'_r(p)$. Rozpatrujemy zbiór tych liczb r, dla których zachodzi ta równość. Jest on niepusty, bo zawiera 0. Jest domknięty (oczywiste). Wystarczy więc wykazać,że wraz z liczbą r zawiera też jakąś liczbę nieco większą niż r. Dowodzi się to tak. Brzeg $W_r(p)$ jest zwarty, a więc można go pokryć skończoną liczbą normalnych zbiorów otwartych. Korzystamy tu z poprzednio udowodnionego twierdzenia o istnieniu takich zbiorów otwartych. Jest jasne, że można znaleźć taki ϵ, że $W_{r+2\epsilon}(p)$ jest zawarty w sumie tych zbiorów otwartych oraz $W_r(p)$. Ponadto możemy przyjąć, że dla każdego punktu należącego do brzegu, kula o środku w tym punkcie i promieniu ϵ jest zawarta w którymś z wybranych zbiorów normalnych tworzących to skończone pokrycie. Jeśli teraz punkt $q \in W_{r+\epsilon}(p)$, to wybierzmy dla niego najbliżej położony punkt q' z brzegu $W_r(p)$. Odległość $\rho(q,q') < \epsilon$, a zatem na mocy poczynionych założeń punkt q' należ y do otoczenia normalnego punktu q. Punkty q, q' można zatem połączyć geodezyjną o długości $\rho(q,q')$, a w końcu połączmy q' z p geodezyjną o długości r. Te dwie geodezyjne są w sumie najkrótszą krzywą łączącą q z p, a więc geodezyjną o długości $\rho(q,p)$ i to kończy dowód implikacji (2) $\rightarrow$ (3) i całego twierdzenia, bo implikacja (3) $\rightarrow$ (4) jest znanym faktem topologicznym.

Uwagi.

1. Rozmaitość riemannowska nakrywająca rozmaitość zupełną jest zupełna.

2. (twierdzenie Myersa-Rinowa) dwie **analityczne** rozmaitości riemanowskie posiadające izometryczne niepuste podzbiory otwarte są izometryczne,

3. punkt q nazywam sprzężonym dla p, gdy jest wartością krytyczną odwzorowania exp_p. Punktem sprzężonym do $p \in S^2$ jest p oraz punkt q biegunowo położony w stosunku do p.

17 Rozmaitości hermitowskie.

Przypomnijmy, że *funkcjonałem (lub formą) hermitowską* na zespolonej przestrzeni wektorowej V nazywamy przekształcenie $h : V \times V \to C$ spełniające następujące warunki:

1. przy ustalonym drugim argumencie, przekształcenie h jest C-liniowe,

2. $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$.

   Z warunków 1. i 2. wynika, że

3. przy ustalonym pierwszym argumencie, przekształcenie h jest R-liniowe oraz, dla każdego $z \in C$, $h(v, zw) = \overline{z}h(v, w)$.

Przekształcenie hermitowskie h nazywamy dodatnio określonym gdy dla każdego różnego od 0 wektora $v \in V$, $h(v, v) > 0$.

Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazę przestrzeni V^* sprzężonej do V, to każdą formę hermitowską można zapisać w postaci :

$$\sum_{i,j} h_{i,j}\alpha_i \otimes \overline{\alpha_j},$$

gdzie $h_{i,j} = \overline{h_{j,i}}$ oraz $\overline{\alpha_j}$ jest funkcjonałem sprzężonym z α_j, tj

$$\overline{\alpha_j}(v) = \overline{\alpha_j(v)},$$

dla każdego $v \in V$. Forma

$$\sum_j \alpha^j \otimes \overline{\alpha^j}$$

jest dodatnio określona i każdą dodatnio określoną formę można zapisać w tej postaci odpowiednio wybierając bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Część rzeczywista h_r dodatnio określonej formy hermitowskiej jest rzeczywistym (dwuliniowym) dodatnio określonym symetrycznym funkcjonałem (tj iloczynem skalarnym). Natomiast część urojona h_u jest rzeczywistym (dwuliniowym) funkcjonałem antysymetrycznym. Każda z tych części wyznacza pozostałą, a więc i formę h. Istotnie,

- $h_r(v, w) = h_u(iv, w)$.

A ponadto,

$$h_u(v, w) = -\frac{i}{2}(h(v, w) - h(w, v))$$

Jeśli jak poprzednio przyjmiemy pewną bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w przestrzeni V^*, każdy z funkcjonałów α_i wyznacza dwa rzeczywiste funkcjonały: swą część rzeczywistą β_i i urojoną γ_i. Obie te części są funkcjonałami liniowymi na przestrzeni V rozpatrywanej jako przestrzeń nad ciałem liczb rzeczywistych $R \subset C$. Przy tym $\alpha_i = \beta_i + i\gamma_i$. Część urojona h_u formy

$$h = \sum_{i,j} h_{i,j}\alpha_i \otimes \overline{\alpha_j}$$

równa jest na mocy wzoru podanego wyżej:

$$-\frac{i}{2}\sum_{i,j} c_{i,j}\alpha_i \otimes \overline{\alpha_j}$$

gdzie $c_{i,j} = h_{i,j} - h_{j,i}$. Wobec tego formę $-h_u$ można zapisać jako

$$\frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{i,j}\alpha_i \wedge \overline{\alpha_j}$$

Definicja. *Rozmaitością hermitowską* (lub *strukturą hermitowską* na rozmaitości) nazywamy parę (X, h), gdzie X jest rozmaitością zespoloną, a h jest (gładkim) polem hermitowskich dodatnio określonych funkcjonałów na przestrzeniach stycznych. Każde pole o jakim mowa w powyższej definicji w układzie współrzędnych zadanym na zbiorze otwartym $U \subset X$ opisane jest wzorem

$$h(x) = \sum_{i,j} h_{i,j}(x) dz^i \otimes \overline{dz^j}$$

gdzie funkcje $h_{i,j}$ są zespolonymi funkcjami gładkimi na U oraz macierz $[h_{i,j}(x)]$ jest hermitowska dodatnio określona, dla każdego $x \in U$.

Część urojona gładkiej formy hermitowskiej h wyznacza na rozmaitości X (i jest wyznaczona przez) rzeczywistą 2-formę typu (1,1) oznaczaną zwykle przez Ω. W układzie współrzędnych oraz dla formy h jak wyżej, mamy

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j} h_{i,j}(x) dz^i \wedge \overline{dz^j}$$

Jeśli X jest rozmaitością hermitowską z formą hermitowską h, a $Y \subset X$ jest podrozmaitością zespoloną, to ograniczając h do podprzestrzeni stycznych do Y otrzymamy na Y formę hermitowską, Wobec tego kaźda zespolona podrozmaitość rozmaitości hermitowskiej jest w naturalny sposób hermitowska.

Każda rozmaitość hermitowska wyznacza na swej przestrzeni strukturę rozmaitości riemanowskiej. Wobec tego na rozmaitości hermitowskiej możemy rozwijać geometrię riemannowską.

Jest rzeczą godną uwagi, że forma objętości na rozmaitości zespolonej (zorientowanej przez formy ω określone w paragrafie o orientacjach) jest n-tą potęgą zewnętrzną formy Ω. Sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi.

Jeśli $d\Omega = 0$, to rozmaitość hermitowską nazywamy *kahlerowską*.

Uwaga. Niech X będzie zwartą rozmaitością kahlerowską.W tym przypadku również wszystkie potęgi zewnętrzne

$$\Omega, \Omega^2, \ldots, \Omega^n$$

są dokładne, a więc wyznaczają (przez twierdzenie deRhama) elementy w grupach kohomologii. Elementy te są różne od zera, bo na mocy twierdzenia Stokesa forma objętości nie jest dokładna. Stąd każda zwarta rozmaitość kahlerowska ma niezerowe parzystowymiarowe grupy kohomologii. Wobec tego spośród sfer tylko sfera S^2 może być rozmaitością kahlerowską. Z przykładu podanego na końcu tego paragrafu wynika, że wszystkie zespolone przestrzenie rzytowe, a więc i sfera (Riemanna) $S^2 = P^1(C)$ rzeczywiście dopuszczają strukturę kahlerowską.

Przykład. Określimy na zespolonej przestrzeni rzutowej $P^n(C)$ pewną strukturę hermitowską, która okazuje się być kahlerowską. Rozpatrzmy przekształcenie $C^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n(C)$, które punktowi $(z^0, \ldots, z^n) \in C^{n+1}$ przyporządkowuje punkt o współrzędnych jednorodnych $(z^0, \ldots, z^n) \in P^n(C)$. Przeciwobrazem punktu

$$(z^0, \ldots, z^n) \in P^n(C)$$

jest $\{(zz^0, \ldots, zz^n); z \in C \setminus \{0\}\} \subset C^{n+1} \setminus \{0\}$. Określmy teraz formę hermitowską na C^{n+1} jako

$$\frac{\sum\limits_k dz^k \otimes \overline{dz^k}}{\sum\limits_k z^k \overline{z^k}} - \frac{(\sum\limits_k z^k \overline{dz^k}) \otimes (\sum\limits_j \overline{z^j} dz^j)}{(\sum\limits_k z^k \overline{z^k})^2}$$

Forma ta jest niezmiennicza ze względu na holomorficzny automorfizm

$$\alpha_z : C^{n+1} \setminus \{0\} \to C^{n+1} \setminus \{0\}$$

gdzie $z \neq 0$ oraz

$$\alpha_z(z^0, \ldots, z^n) = (zz^0, \ldots, zz^n).$$

Istotnie, dla każdej ustalonej liczby zespolonej $z \in C \setminus \{0\}$,

$$\overline{zz^k} = \overline{z}\overline{z^k}$$

$$d(zz^k) = zdz^k$$

$$d(\overline{zz^k}) = \overline{z}d\overline{z^k}$$

a wobec tego

$$\frac{\sum\limits_k d(zz^k) \otimes d(\overline{zz^k})}{\sum\limits_k zz^k\overline{zz^k}} - \frac{(\sum\limits_k zz^k d(\overline{zz^k})) \otimes ((\sum\limits_j \overline{zz^j} d(zz^j))}{(\sum\limits_k zz^k\overline{zz^k})^2} =$$

$$\frac{z\overline{z}\sum\limits_k dz^k \otimes d\overline{z^k}}{(\sum\limits_k zz^k\overline{zz^k})} - \frac{(z\overline{z})^2\,(\sum\limits_k z^k d\overline{z^k}) \otimes (\sum\limits_j \overline{z^j} dz^j)}{(z\overline{z}\sum\limits_k z^k\overline{z^k})^2} =$$

$$\frac{\sum\limits_k dz^k \otimes d\overline{z^k}}{(\sum\limits_k zz^k\overline{zz^k})} - \frac{(\sum\limits_k z^k d\overline{z^k} \otimes (\sum\limits_j \overline{z^j} dz^j)}{(\sum\limits_k z^k\overline{z^k})^2}$$

Ta forma hermitowska wyznacza zatem formę hernitowską na $P^n(C)$. Jej ograniczenie do $A_i^n = \{(z^0, \ldots, z^n) \in P^n(C); z^i \neq 0\} = \{(z^0, \ldots, z^n) \in P^n(C); z^i = 1\}$ zapisane we współrzędnych niejednorodnych na $A_i^n(C)$ (zakładamy $z^i = 1$) ma postać:

$$\frac{\sum\limits_{k\neq i} dz^k \otimes d\overline{z^k}}{1 + \sum\limits_{k\neq i} z^k\overline{z^k}} - \frac{(\sum\limits_{k\neq i} z^k d\overline{z^k}) \otimes (\sum\limits_{j\neq i} \overline{z^j} dz^j)}{(1 + \sum\limits_{k\neq i} z^k\overline{z^k})^2}$$

Jest to forma dodatnio określona, gdyż jej wartość na parze (v, v), gdzie v jest wektorem stycznym $\sum\limits_{k\neq i} a^k \frac{\partial}{\partial z^k}$ zaczepionym w punkcie $(u^0, \ldots, u^n)$, gdzie $u^i = 1$ równa się

$$\frac{\sum\limits_{k\neq i} a^k\overline{a^k}}{1 + \sum\limits_{k\neq i} u^k\overline{u^k}} - \frac{(\sum\limits_{k\neq i} u^k\overline{a^k})(\sum\limits_{k\neq i} \overline{u^k}a^k)}{(1 + \sum\limits_{k\neq i} u^k\overline{u^k})^2} > 0$$

co każdy inteligentny czytelnik bez trudu wykaże.

Forma Ω wyznaczona przez tę formę hermitowską, a w układzie współrzędnych wyznaczonym jak wyżej na $A_i^n(C)$ ma postać:

$$\frac{i}{2}\left(\frac{\sum\limits_{k\neq i} dz^k \wedge d\overline{z^k}}{1 + \sum\limits_{k\neq i} z^k\overline{z^k}} - \frac{(\sum\limits_{k\neq i} z^k d\overline{z^k}) \wedge (\sum\limits_{j\neq i} \overline{z^j} dz^j)}{(1 + \sum\limits_{k\neq i} z^k\overline{z^k})^2}\right)$$

Przy tym można sprawdzić, że we współrzędnych jednorodnych $(z^0, \ldots, z^n)$ na $P^n(C)$,

$$\Omega = \frac{i}{2}\,\partial\,\overline{\partial}\,log(\sum_{k=0}^{n} z^k \overline{z^k})$$

Stąd wynika (już bez rachunków), że

$$d\Omega = 0.$$

18 Przesunięcie równoległe i pochodna kowariantna Levi-Civita.

Udowodnione uprzednio twierdzenie mówiące o tym, że długość wektora stycznego do geodezyjnej jest stała, jest szczególnym przypadkiem znacznie ogólniejszego rezultatu odgrywającego w geometrii riemannowskiej bardzo ważną rolę.

Twierdzenie. *Niech $\phi : [a,b] \to X$ bedzie krzywą zapisaną w pewnym układzie współrzędnych równaniem $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$. Niech $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ oraz $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ będą dwoma polami stycznymi do X na krzywej ϕ. Załóżmy jeszcze, że spełnione są równania różniczkowe*

$$\frac{dv_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j}(\phi(t))\frac{d\phi_i}{dt}(t)v_j(t)$$

$$\frac{du_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j}(\phi(t))\frac{d\phi_i}{dt}(t)u_j(t)$$

Wtedy iloczyn skalarny

$$\sum_{i,j} g_{i,j}(\phi(t))u_i(t)v_j(t)$$

ma wartość stałą.

Dowód polega na sprawdzeniu, że pochodna funkcji, która punktowi $t \in [a,b]$ przyporządkowuje iloczyn skalarny wektorów $v(t)$ i $u(t)$ jest równa zero. W tym celu wystarczy zróżniczkować funkcję

$$\sum_{i,j} g_{i,j}(\phi(t))u_i(t)v_j(t)$$

ze względu na t, następnie wykorzystać założone wzory na $\frac{dv_k}{dt}$ oraz $\frac{dv_k}{dt}$, a w końcu skorzystać z definicji symbolów Christofela.

Niech $\phi : [a, b] \to X$ bedzie krzywą. Pole wektorów stycznych v, które każdej wartości parametru $t \in [a, b]$ przyporządkowuje wektor styczny do X w punkcie $\phi(t)$ nazywamy *polem równoległym*, gdy spełniony jest układ równań:

$$\frac{dv_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j}(\phi(t)) \frac{d\phi_i}{dt}(t) v_j(t)$$

W tej sytuacji mówimy też, że wektor $v(b)$ jest *przesunięciem równoległym wektora $v(a)$ wzdłuż krzywej ϕ.*

Z twierdzenia podanego wyżej wynika, że uzyskane w ten sposób przekształcenie $\kappa_{\phi,a,b} : T_{\phi(a),X} \to T_{\phi(b),X}$ jest liniowe oraz zachowuje iloczyny skalarne (dane przez strukturę riemannowską). Określone tak przekształcenia przesunięć przestrzeni stycznych wzdłuż krzywych można przenieść na przestrzenie kostyczne biorąc $(\kappa^*)^{-1} : T^*_{\phi(a),X} \to T^*_{\phi(b),X}$, a następnie uogólnić na tensory biorąc iloczyny tensorowe wyżej określonych przesunięć przestrzeni stycznych i kostycznych.

Z podanego wyżej określenia przesunięć równoległych wektorów kostycznych wynika, że pole wektorów kostycznych (to znaczy funkcjonałów na przestrzeniach stycznych) jest równoległe wzdłuż krzywej wtedy i tylko wtedy gdy jego wartość na każdym polu wektorów stycznych równoległych (wzdłuż tej krzywej) jest stała. Podobnie pole funkcjonałów dwuliniowych jest równoległe wzdłuż krzywej wtedy i tylko wtedy gdy jego wartości na każdej parze równoległych pól wektorów stycznych są stałe. Wynika stąd, że

tensor metryczny jest polem równoległym wzdłuż każdej krzywej.

Pola, które są równoległe wzdłuż każdej krzywej nazywa się *polami równoległymi.*

Równoległymi polami stałymi na przestrzeni euklidesowj R^n są pola "stałe", to znaczy określone wzorem

$$v(x_1, ..., x_n) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

gdzie $a_i \in R$ są stałymi.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to by istniało takie pole jest by przesunięcie wzdłuż każdej krzywej zamkniętej było przekształceniem identycznościowym przestrzeni stycznej w punkcie początkowym (a zatem i końcowym) tej krzywej.

Łatwo jest pokazać, że przekształcenia przesunięć równoległych wzdłuż wszystkich krzywych o początku i końcu w zadanym punkcie $a \in X$ tworzą grupę przekształceń ortogonalnych przestrzeni stycznej $T_{a,X}$. Grupę tę nazywamy *grupą holonomii rozmaitości riemannowskiej* X *w puncie* $a \in X$. Okazuje się, że jest to grupa Liego, a spójną składową jedynki jest jej podgrupa złożona z przesunięć wzdłuż krzywych zamkniętych ściągalnych (homotopijnie do punktu). Ta składowa jest domkniętą podgrupą w grupie $SO(T_{a,X})$ (twierdzenie Borela - Lichnerowicza) .

Przykład. W każdym punkcie przestrzeni euklidesowej grupa holonomii jest trywialna (złożona z przekształcenia identycznościowego). Natomist w każdym punkcie sfery $S^2 \subset R^3$, grupa ta składa się zw wszystkich przekształceń ortogonalnych przestrzeni stycznej o wyznaczniku równym 1. Można się o tym przekonać na przykład przesuwając rwnolegle dowolny wektor styczny w "biegunie" sfery najpierw wzdłuż południka (to jest geodezyjnej), do którego ten wektor jest styczny aż do punkty przecięcia tego południka z równikiem, następnie wzdłuż równika (który też jest geodezyjną). Tak przesuwane wektory bądą stale prostopadłe do wektorów stycznych do równika. W końcu po przebyciu pewnej drogi otrzymany wektor przesuwać mamy wzdłuż południka aż do bieguna. W wyniku otrzymamy wektor styczny do tego ostatniego południka.

Punktem wyjścia do zastosowań pojęcia grupy holonomii jest następujące twierdzenie:

Niech $V \subset T_{a,X}$ *będzie podprzestrzenią niezmienniczą ze względu na przekształcenia z grupy holonomii. Wtedy przesunięcia podprzestrzeni* V *wzdłuż krzywych o zadanym końcu nie zależą od wyboru krzywej i określają całkowalną dystrybucję.*

Szczególną konsekwencją tego rezultatu jest następujące twierdzenie deRhama o rozkładzie:

Niech X *bedzie zupełną jednospójną rozmaitością riemannowską. Niech* $a \in X$ *i niech* $T_{a,X} = V_0 \oplus V_1 \oplus ... \oplus V_s$ *będzie rozkładem na podprzestrzenie niezmiennicze ze względu na działanie grupy holonomii. Przy tym niech działanie grupy holonomii na* V_0 *będzie trywialne. Wtedy* $X = X_0 \times X_1 \times ... \times X_s$, *gdzie* X_i *są zupełnymi jednospójnymi podrozmaitościami zawierającymi punkt* a, $T_{a,X_i} = V_i$, *a* X_0 *jest przestrzenią euklidesową.*

Przesunięcia równoległe wektorów stycznych pozwalają na określenie, w następujący sposób, pochodnej $\nabla_v(\rho)(x)$ pola stycznego ρ w kierunku zadanego wektora stycznego $v \in T_{x,X}$. Niech dane będzie pole styczne ρ określone na zbiorze otwartym $U \subset X$. Niech $x \in U$ oraz $v \in T_{x,X}$. Niech ϕ_v będzie taką krzywą (np. geodezyjną), która dla $t = 0$ przybiera wartość x oraz $\frac{d\phi}{dt}(0) = v$. Niech $\kappa_\phi(t)$ będzie polem równoległym powstałym przez przesunięcia wektora $\rho(x)$ wzdłuż krzywej ϕ do punktu $\phi(t)$. Wówczas niech

$$\nabla_v(\rho)(x) \stackrel{df}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\rho(\phi(h)) - \kappa_\phi(h)}{h}$$

Po wprowadzeniu układu współrzędnych w pewnym otoczeniu punktu x,

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = (r_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, r_n(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\phi(t) = (\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t))$$

$$\kappa_\phi(t) = (\kappa_\phi^1(t), \ldots, \kappa_\phi^n(t)).$$

Wobec tego i-ta współrzędna ilorazu

$$\frac{\rho(\phi(h)) - \kappa_\phi(h)}{h}$$

równa jest

$$\frac{\rho^i(\phi(h)) - \kappa_\phi^i(h)}{h} = \frac{\rho^i(\phi(h)) - \rho^i(x) + \kappa_\phi^i(0) - \kappa_\phi^i(h)}{h},$$

gdyż $\rho^i(x) = \kappa_\phi^i(0)$. Przechodząc do granicy z $h \to 0$, otrzymamy więc:

$$\frac{d\rho^i(\phi(h))}{dh}(0) - \frac{d\kappa_\phi^i(h)}{dh}(0)$$

Ponieważ $\frac{d\phi}{dh}(0) = v$ oraz pole κ_ϕ spełnia w punkcie $h = 0$ równania:

$$\frac{d\kappa_v^i}{dh} = -\sum_{k,j} \Gamma_{k,j}^i(\phi(0)) \frac{d\phi_k}{dh}(0) \kappa_\phi^j(0)$$

zatem obliczana współrzędna równa jest

$$\partial_v \rho^i + \sum_{k,j} \Gamma_{k,j}^i(\phi(0)) v^k \rho^j(x)$$

gdzie $\partial_v(\rho^i)$jest pochodną funkcji ρ^i w kierunku wektora v. Z powyższych obliczeń wynika, że wartość pochodnej nie zależy od szczególnego wyboru krzywej ϕ, a tylko od jej wektora stycznego w punkcie $t = 0$.

Jeśli teraz na otwartym pozbiorze $U \subset X$ mamy dane jak poprzednio pole ρ i nie jeden wektor styczny $v \in T_{x,X}$, a pole styczne η, to możemy określić jak wyżej pochodną $\nabla_{\eta(x)}(\rho)(x)$ w każdym punkcie $x \in X$. Otrzymane tak pole styczne (na U) oznaczymy przez $\nabla_\eta(\rho)$.

Z powyższych definicji i wzorów wynikają, dla pól η_1, η_2, ρ_1, ρ_2 oraz funkcji gładkich f, g, następujące równości:

1. $\nabla_{f\eta_1+g\eta_2}(\rho_1) = f\nabla_{\eta_1}(\rho_1) + g\nabla_{\eta_2}(\rho_1)$
2. $\nabla_\eta(\rho_1 + \rho_2) = \nabla_\eta(\rho_1) + \nabla_\eta(\rho_2)$.
3. $\nabla_{\eta_1}(f\rho_1) = f\nabla_{\eta_1}(\rho_1) + \partial_{\eta_1}(f)\rho_1$

W przypadku gdy na U dany jest układ współrzędnych, otrzymujemy:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_k \Gamma^k_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Uwaga. Opisana wyżej operacja ∇ przyporządkowuje każdej parze pól stycznych η, ρ trzecie pole $\nabla_\eta(\rho)$. Podobnie nawias Liego parze pól (η, ρ) przyporządkowuje pole $[\eta, \rho]$. Jednakże są to dwie zupełnie różne operacje i ich własności są odmienne.

Interpretując w definicji pochodnej $\nabla_\tau(\rho)$ pole ρ jako pole tensorowe, a przesunięcie κ_ϕ jako przekształcenie przesunięcia tensorów wzdłuż krzywej ϕ otrzymuje się definicję pochodnej $\nabla_\tau(\rho)$ pola tensorowego ρ w kierunku pola stycznego τ.

W tej ogólniejszej sytuacji spełnione są też równości 1)-3). Ponadto, ma miejsce

$$4)\ \nabla_\tau(\rho_1 \otimes \rho_2) = \nabla_\tau\rho_1 \otimes \tau_2 + \rho_1 \otimes \nabla_\tau(\rho_2),$$

dla dowolnych pól tensorowych ρ_1, ρ_2.

Warto jeszcze powiedzieć, że operatory ∇_τ są przemienne ze zwężeniami.

W końcu zanotujmy tu jeszcze, że w tym języku pochodnych ∇, fakt zachowywania przez przesunięcia równoległe wzdłuż krzywych iloczynów skalarnych można wyrazić jako równoległość, określającego strukturę Riemanna pola g, to znaczy jako

$$\nabla_\sigma g = 0,$$

dla każdego pola σ. Istotnie, wprost z definicji wynika, że pochodna kowariantna

$$\nabla_\sigma \Psi$$

dowolnego tensorowego pola równoległego Ψ równa jest zero, a wiemy już, że pole g jest równoległe.

19 Spójność afiniczna

Definicja. Niech X będzie rozmaitością różniczkową, $W \to X$ wiązką wektorową. *Spójnością afiniczną na* W nazywamy rodzinę operatorów ∇_τ, gdzie τ przebiega zbiór wszystkich pól stycznych na X, które polom wiązki W określonym na X przyporządkowują pola wektorowe wiązki W i spełniają następujące warunki:

- $\nabla_{f\eta_1+g\eta_2}(\rho_1) = f\nabla_{\eta_1}(\rho_1) + g\nabla_{\eta_2}(\rho_1)$
- $\nabla_\eta(\rho_1 + \rho_2) = \nabla_\eta(\rho_1) + \nabla_\eta(\rho_2)$.
- $\nabla_{\eta_1}(f\rho_1) = f\nabla_{\eta_1}(\rho_1) + \partial_{\eta_1}(f)\rho_1$

Uwaga. Powyżej (i poniżej) ∂_τ oznacza dla dowolnego pola stycznego τ operator różniczkowania funkcji gładkich w kieunku pola τ.

Z poprzednich rozważań wynika, że każda struktura rozmaitości riemannowskiej na rozmaitości X, wyznacza spójność afiniczną na wiązce stycznej, a dalej na wszystkich wiązkach tensorowych wiązki stycznej. Te spójności nazywane są *spójnościami Levi-Civita*.

Każda spójność afiniczna dana na wiązce stycznej będzie dalej nazywana spójnością na X. W dalszym ciągu tego paragrafu będziemy mówić o takich właśnie spójnościach. Jednakże większość rozważań można też przenieść po niewielkich adaptacjach na przypadek ogólny spójności określonych na dowolnych wiązkach nad X.

Zauważmy dalej, że z powyższych własności wynika, że jeśli którekolwiek z pól τ, ρ jest równe zero na zbiorze otwartym $U \subset X$, to i pole $\nabla_\tau(\rho)$ jest równe zero na U. Stąd wynika, że spójność afiniczna na X wyznacza spójność afiniczną na każdym podzbiorze otwartym $U \subset X$. Ale również, jeśli dane jest pokrycie $\{U_j\}$ rozmaitości X zbiorami otwartymi oraz zgodna rodzina spójności afinicznych na zbiorach U_j, to wówczas możemy te spójności skleić i otrzymać spójność na X.

W przypadku gdy na U dany jest układ współrzędnych otrzymujemy:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

gdzie $\Gamma^k_{i,j}$ są pewnymi jednoznacznie wyznaczonymi (przez spójność afiniczną i układ współrzędnych) rzeczywistymi funkcjami gładkimi. Nazywamy je *symbolami Christoffela (II-ego rodzaju)*, a więc tak jak i w przypadku spójności Levi-Civita.

Łatwo jest sprawdzić,że przy przejściu od współrzędnych $x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ do

$$x \mapsto (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)$$

funkcje $\Gamma^k_{i,j}$ zmieniają się zgodnie z następującym wzorem:

$$\sum_{i,j,k} \Gamma^i_{j,k} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} + \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^m \partial y^r} \frac{\partial y^l}{\partial x^i}$$

Oczywistym jest, że funkcje $\Gamma^k_{i,j}$ wyznaczają jednoznacznie spójność afiniczną na U. Wobec tego jeśli dane pokrycie otwarte $\{U_r\}$, a na każdym U_r układ współrzędnych i funkcje ${}_r\Gamma^k_{i,j}$ stanowiące zgodną rodzinę (oznacza to, że na $U_l \cap U_r$ symbole Christoffela ${}_l\Gamma^k_{i,j}$ i ${}_r\Gamma^k_{i,j}$ związane są tymi zależnościami, które obowiązują przy zmianie współrzędnych), to możemy skonstruować spójność afiniczną na X.

Mając symbole Christoffela wprowadzamy geodezyjne i przesunięcie równoległe jak w poprzednich paragrafach dotyczących rozmaitości riemannowskich. Mając przesunięcie równoległe możemy określić pochodną kowariantną ∇. Okazuje się, że pokrywa się ona ze spójnością afiniczną ustaloną na wstępie tych rozważań. Powrócimy do tego jeszcze i omówimy te kwestie dokładniej w jednym z następnych paragrafów

Wobec tego do określenia spójności afinicznej można posłużyć się albo rodziną operatorów ∇, albo zgodnym układem symboli Christoffela, albo przesunięciami równoległymi.

Zauważmy, że w ogólnym przypadku spójności afinicznej, przesunięcia równoległe (wzdłuż krzywych) podobnie jak w szczególnym przypadku spójności określonej przez strukturę riemannowską wyznaczają izomorfizmy liniowe przestrzeni stycznych.

Prowadzi to tak jak w przypadku rozmaitości riemannowskich do pojęcia *grupy holonomii rozmaitości ze spójnością afiniczną*. Można udowodnić, że grupa holonomii jest grupą Liego. Spójną składową jedynki tej grupy jest zbiór przekształceń otrzymanych przez przesunięcia wzdłuż ściągalnych (homotopijnie do punktu) krzywych zamkniętych.

20 Tensor torsji.

W tym paragrafie pokażemy, że każdej spójności afinicznej na rozmaitości X można przyporządkować pole tensorowe T tensorów typu (1,2) zwane *torsją* rozważanej spójności.

Definicję tego pola poprzedzimy pewnymi rozważaniami, które pozwolą nam później stwierdzić, że otrzymany obiekt jest rzeczywiście polem tensorowym. Aczkolwiek rozważania te mają charakter ogólny, to przeprowadzimy je jedynie dla przypadku tensorów typu (1,2), by uniknąć czysto technicznych komplikacji związanych z zapisem omawianych problemów.

Każde gładkie pole tensorowe σ typu (1,2) (tj. raz kontrawariantne i podwójnie kowariantne) na podzbiorze otwartym $U \subset X$ wyznacza na tym podzbiorze operator (oznaczany tu też przez σ), który każdej parze pól stycznych (τ_1, τ_2) przyporządkowuje trzecie pole styczne $\sigma(\tau_1, \tau_2)$. Przy tym operator ten jest addytywny ze względu na każdą zmienną i dla rzeczywistych funkcji f, g określonych na U

$$\sigma(f\tau_1, g\tau_2) = fg\sigma(\tau_1, \tau_2)$$

Odwrotnie jeśli dany jest operator σ, który każdej parze gładkich pól stycznych (τ_1, τ_2) przyporządkowuje trzecie gładkie pole styczne $\sigma(\tau_1, \tau_2)$, a przy tym ten operator ten jest addytywny ze względu na każdą zmienną i dla rzeczywistych funkcji f, g określonych na U

$$\sigma(f\tau_1, g\tau_2) = fg\sigma(\tau_1, \tau_2)$$

to jest to operator wyznaczony przez pewne pole tensorowe typu (1,2).

Dowód tego rezultatu opiera się na następującym rozumowaniu. Najpierw sprawdzamy, że operator σ wyznacza analogiczny operator na każdym podzbiorze otwartym $U_1 \subset U$. Dowód tego rezultatu wykorzystuje istnienie dla każdego podzbioru otwartego $V \subset \overline{V} \subset U$ rzeczywistej funkcji gładkiej f, takiej, że $f|V = 0$, $f|(X \setminus U) = 1$, tak jak to miało miejsce dla analogicznego zagadnienia dotyczącego ograniczenia spójności afinicznej ∇ do mniejszego podzbioru. Do skończenia dowodu należy wykazać, że jeśli pole, powiedzmy, τ_1 równe jest 0 w punkcie x, to również pole $\sigma(\tau_1, \tau_2)$ w tym punkcie równa się 0. Istotnie, jeśli ta własność jest wykazana, to jako wartość szukanego pola tensorowego w punkcie x możemy przyjąć przekształcenie dwuliniowe $\sigma(x) : T_{x,X} \times T_{x,X} \to T_{x,X}$ dane przez

$$\sigma(x)(v, w) = \sigma(\tau_1, \tau_2)(x),$$

gdzie τ_1, τ_2 są dowolnymi takimi polami gładkimi, że

$$\tau_1(x) = v,\ \tau_2(x) = w$$

a tak otrzymana wartość $\sigma(x)(v, w)$ nie zależy od wyboru pól τ_1 i τ_2.

Niech więc $\tau_1(x) = 0$. Wiemy już, że podzbiór otwarty U, możemy zmniejszyć do dowolnego otoczenia punktu x nie zmieniając wartości w punkcie x przyporządkowanego pola $\sigma(\tau_1, \tau_2)$. Możemy zatem przyjąć, że istnieją na U pola δ_i wyznaczjące w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej. Wówczas $\tau_1 = \sum_i f_i \delta_i$ i $f_i(x) = 0$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wobec tego

$$\sigma(\tau_1, \tau_2) = \sum_i f_i \sigma(\delta_i, \tau_2)$$

i stąd wynika, że

$$\sigma(\tau_1, \tau_2)(x) = 0$$

Niech teraz na rozmaitości X bedzie dana spójność afiniczna ∇. Określmy na X operator T, który parom pól stycznych (τ_1, τ_2) przyporządkowuje pole styczne dane wzorem

$$T(\tau_1, \tau_2) = \nabla_{\tau_1}(\tau_2) - \nabla_{\tau_2}(\tau_1) - [\tau_1, \tau_2].$$

Łatwo jest stwierdzić,że operator T jest addytywny dla każdej zmiennej z osobna. Nieco trudniej jest wykazać, że

$$T(f\tau_1, g\tau_2) = fgT(\tau_1, \tau_2)$$

Wynika to z wzorów:

$$\nabla_{f\tau_1}(g\tau_2) = fg\nabla\tau_1(\tau_2) + f\partial_{\tau_1}(g)(\tau_2)$$

$$\nabla_{g\tau_2}(f\tau_1) = fg(\nabla\tau_2(\tau_1) + g\partial_{\tau_2}(f)(\tau_1)$$

$$[f\tau_1, g\tau_2] = fg[\tau_1, \tau_2] + f\partial_{\tau_1}(g)\tau_2 - g\partial_{\tau_2}(f)\tau_1$$

Wobec tego operator T jest polem tensorowym typu (1,2). Otrzymane tak tensory w punktach $x \in X$ nazywamy *torsją* spójności afinicznej ∇.

Twierdzenie. *Torsja T spójności Levi-Civita równa jest zero.*

DOWÓD. Wiemy, że torsja jest polem tensorowym. Wobec tego wystarczy sprawdzić, że w każdym układzie współrzędnych

$$T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0.$$

Ponieważ

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$$

wobec tego wystarczy sprawdzić, że $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial x_j}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = 0$, a więc, że $\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = 0$, dla $i, j, k = 1, ..., n$. Z definicji symboli Christoffela pierwszego rodzaju wynika natychmiast, że

$$\Gamma_{l;ij} - \Gamma_{l;ji} = 0.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = \sum g^{kl}\Gamma_{l;ij} - \sum g^{kl}\Gamma_{l;ji} = 0.$$

Twierdzenie. *Niech X będzie rozmaitością riemannowską. Spójność Levi-Civita jest jedyną taką spójnością afiniczną, która spełnia następujące dwa warunki:*

1. *$T = 0$*

2. *przesunięcie równoległe wyznaczone przez spójność zachowuje iloczyn skalarny (wyznaczony przez strukturę riemanowską) w przestrzeniach stycznych*

DOWÓD. Wiemy już, że wprowadzona poprzednio dla rozmaitości riemannowskiej koneksja spełnia powyższe dwa warunki. Wystarczy zatem udowodnić, że spójność taka jest tylko jedna. Własności, o które tu chodzi można sformułować w następujący sposób:

$$\nabla_{\tau_1}(\tau_2) - \nabla_{\tau_2}(\tau_1) - [\tau_1, \tau_2] = 0,$$

$$\nabla_\tau g = 0,$$

dla dowolnych gładkich pól τ, τ_1, τ_2. Istotnie, warunek (2) jest równoważny stwierdzeniu:

$$\nabla_\tau g = 0,$$

dla każdego gładkiego pola τ.

Biorąc teraz pochodną ∇_τ pola $\tau_1 \otimes \tau_2 \otimes g$, a następnie zwężając wynik, otrzymamy to samo, co gdybyśmy najpierw zwęzili, a potem wzięli pochodną otrzymanej funkcji w kierunku pola τ. Stąd otrzymamy równość:

$$(\nabla_\tau g)(\tau_1, \tau_2) + g(\nabla_\tau(\tau_1), \tau_2) + g(\tau_1, \nabla_\tau(\tau_2)) = \partial_\tau g(\tau_1, \tau_2).$$

Ponieważ $\nabla_\tau(g) = 0$, zatem

$$g(\nabla_\tau(\tau_1), \tau_2) + g(\tau_1, \nabla_\tau(\tau_2)) = \partial_\tau g(\tau_1, \tau_2).$$

Skorzystajmy jeszcze z drugiej założonej własności zapisanej jako:

$$\nabla_\tau(\tau_2) = \nabla_{\tau_2}(\tau) + [\tau, \tau_2]$$

Otrzymamy:

$$g(\nabla_\tau(\tau_1), \tau_2) + g(\tau_1, \nabla_{\tau_2}(\tau)) + g(\tau_1, [\tau, \tau_2]) = \partial_\tau g(\tau_1, \tau_2).$$

Przestawiając cyklicznie τ, τ_1, τ_2 otrzymamy dwie nowe równości:

$$g(\nabla_{\tau_1}(\tau_2), \tau) + g(\tau_2, \nabla_\tau(\tau_1)) + ... = ...,$$

$$g(\nabla_{\tau_2}(\tau), \tau_1) + g(\tau, \nabla_{\tau_1}(\tau_2)) + ... = ...$$

Mnożąc drugą z tych równości przez -1 i potem dodając je stronami i dzieląc otrzymaną równość przez 2 dostaniemy

$$g(\nabla_\tau(\tau_1), \tau_2) = S$$

gdzie S jest dosyć skomplikowanym wyrażeniem nie zawierającym już symbolu ∇, a jedynie symbole g, τ, τ_1, τ_2. Ponieważ pole form g jest niezdegenerowane, zatem ta równość wyznacza jednoznacznie $\nabla_\tau(\tau_1)$, co kończy dowód.

Uwaga.

$$S = \frac{1}{2}\{\partial_\tau g(\tau_1, \tau_2) + g(\tau, [\tau_1, \tau_2]) + \partial_{\tau_2} g(\tau_1, \tau) +$$

$$g(\tau_2, [\tau_1, \tau]) - \partial_{\tau_1} g(\tau_2, \tau) - g(\tau_1, [\tau_2, \tau])\}$$

21 Tensor krzywizny.

Niech dana będzie spójność ∇ na rozmaitości X. Niech teraz R będzie operatorem, który trójce pól stycznych (τ_1, τ_2, τ_3) przyporządkowuje pole styczne $R(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ dane wzorem

$$R(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \nabla_{\tau_1}\nabla_{\tau_2}(\tau_3) - \nabla_{\tau_2}\nabla_{\tau_1}(\tau_3) - \nabla_{[\tau_1, \tau_2]}(\tau_3)$$

Podobnie jak poprzednio dla operatora T, tak teraz dla operatora R można wykazać, że jest to pole tensorowe. Jest to pole typy (1,3). Dowód polega na sprawdzeniu, że operator R jest addytywny dla każdej zmiennej z osobna oraz

$$R(f\tau_1, g\tau_2, h\tau_3) = fghR(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

Tensor przyporządkowany punktowi x przez pole R nazywa się *tensorem krzywizny w punkcie x spójności* ∇.

Twierdzenie. *Niech X będzie rozmaitością riemannowską. Wówczas X jest lokalnie płaska wtedy i tylko wtedy gdy tensor krzywizny spójności Levi-Civitta $T(x)$ w każdym punkcie $x \in X$ równy jest 0.*

Dowód nie jest taki łatwy i będzie podany później.

Tensorowi krzywizny można nadać następującą interpretację geometryczną. Niech $(v_1, v_2) \in T_{x,X}$ będą liniowo niezależnymi wektorami. Niech V będzie płaszczyzną rozpiętą na tych wektorach. Przy przekształceniu wykładniczym exp_p pewne otoczenie U zera w $T_{x,X}$ jest odwzorowywane dyffeomorficznie na pewne otoczenie punktu x w X. Wobec tego exp_p odwzorowuje $V \cap U$

na pewną powierzchnię V_1 w X. Przy tym $x \in V_1$. Możemy zatem określić krzywiznę Gaussa $\kappa(x, V_1)$ powierzchni V_1 w punkcie x. Okazuje się, że

$$\kappa(x, V_1) = \frac{g_x(R_x(v_1, v_2)(v_1), v_2)}{|v_1 \wedge v_2|^2}$$

$|v_1 \wedge v_2|$ oznacza tu pole równoległoboku rozpiętego na wektorach v_1, v_2. Tensor krzywizny wyznacza więc krzywizny Gaussa w "dwuwymiarowych kierunkach".

Odwrotnie, można wykazać, że znajomość krzywizn Gaussa we wszystkich takich kierunkach wyznacza tensor krzywizny.

Twierdzenie. *Niech M będzie rozmaitością różniczkową z dwoma strukturami riemannowskimi zadanymi przez pola g_1 raz g_2. Załóżmy, że pola te w punkcie x są równe, ponad to, że równe są też krzywizny Gaussa w każdym dwuwymiarowym kierunku dla obu tych riemannowskich struktur. Wówczas tensory krzywizny tych struktur w punkcie x są takie same.*

Dowód tego twierdzenia też pominiemy.

22 Spójność afiniczna. Uzupełnienia i podsumowania.

Spójność afiniczna na rozmaitości X może być określona przez zadanie rodziny operatorów $\nabla = \{\nabla_\tau\}$ (gdzie τ przebiega rodzinę wszystkich gładkich pól stycznych określonych na X) spełniających dobrze nam znane warunki. Wiemy, że spójność afiniczną zadaną na X można ograniczyć do dowolnego podzbioru otwartego $U \subset X$ i otrzymać spójność afiniczną na U. Spójności afiniczne można też sklejać: jeśli dane jest pokrycie otwarte $\{U_i\}_{i \in I}$ rozmaitości X, a na każdej rozmaitości U_i spójność ∇^i, przy czym spójności te są zgodne (tj, spójności na $U_i \cap U_j$ wyznaczone przez ∇^i oraz ∇^j są identyczne), to istnieje dokładnie jedna taka spójność afiniczna ∇ na X zbiorze, której ograniczenia do każdego ze zbiorów U_i wyznaczają spójność ∇_i. Przyporządkowując każdemu podzbiorowi otwartemu $U \subset X$ zbiór $\mathcal{SA}(U)$ wszystkich (klas izomorfizmów) spójności afinicznych otrzymujemy pewien snop oznaczany przez $\mathcal{SA}$. Podobnie zresztą rzecz się ma ze strukturami riemanowskimi. Jednak w tym drugim przypadku rzecz jest prostsza, bo struktura riemanowska jest wyznaczona przez pole funkcjonałów dwuliniowych symetrycznych dodatnio określonych, a więc pewien przekrój wiązki $T^*_X \otimes T^*_X$. Jeśli, dla $x \in X$, przez $S^+_{x,X}$ oznaczyć zbiór wszystkich funkcjonałów dwuliniowych symetrycznych dodatnio określonych na $T_{x,X}$, a przez S^+_X podzbiór $\bigcup S^+_{x,X} \subset T^*_X \otimes T^*_X$, to struktury riemanowskie na podzbiorach rozmaitości X można utożsamiać z przekrojami S^+_X. Wobec tego struktury takie w oczywisty sposób tworzą snop. Oznaczamy go przez $\mathcal{R}$. Przyporządkowanie strukturze riemanowskiej jej *spójności Levi-Civita* daje przekształcenie $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{SA}$.

Jesli na X dana jest spójność afiniczna ∇ oraz $U \subset X$ jest podzbiorem otwartym z mapą (układem współrzędnych) to spójność afiniczna wyznacza i jest wyznaczona przez *układ symbolów Christoffela* $\{\Gamma^i_{jk}\}$. Symbole Christoffela wyznaczają poprzez odpowiednie równania różniczkowe *geodezyjne* oraz *przesunięcie równoległe wektorów stycznych wzdłuż krzywych*. Przesunięcia równoległe można rozszerzyć na dowolne *tensory*, tak więc wzdłuż krzywych można przesuwać również np. dowolne wieloliniowe funkcjonały określone na przestrzeniach stycznych.

Na to by określić dla spójności afinicznej ∇ jej przesunięcia równoległe nie trzeba uciekać się układów współrzędnych i symboli Christoffela. Można to też uczynić w następujący sposób:

Niech $\phi : (a, b) \to X$ bedzie krzywą wzdłuż której chcemy przesuwać. Możemy założyć, że krzywa ta nie ma punktów wielokrotnego przecięcia (a zatem ϕ jest diffeomorfizmem na obraz $\phi(a, b))$), bo wystarcza umieć przesuwać wzdłuż takich krzywych. Przez pole styczne na takiej krzywej rozumiemy przekształcenie ψ, które każdemu $t \in (a, b)$ przyporządkowuje wektor $\psi(t) \in T_{\phi(x),X}$. Najpierw udowodnimy lemat:

Lemat. *Niech ψ będzie polem stycznym na krzywej ϕ. Wówczas dla $\epsilon > 0$ istnieje pole styczne Ψ określone na X, takie że dla każdego $t \in \phi([a+\epsilon, b-\epsilon]$ mamy*

$$\Psi(\phi(t)) = \psi(t).$$

Dowód jest prosty. Trzeba skorzystać z podziału jedynki.

Teraz warunek na równoległość pola ψ określonego na krzywej ϕ można już łatwo opisać. Wybierzmy mały ϵ. Rozszerzmy pola $\frac{d\phi}{dt}$ oraz ψ z odcinka $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ na X otrzymując odpowiednio pola $d\Phi$ oraz Ψ. Wówczas pole ψ jest równoległe wzdłuż ϕ wtedy i tylko wtedy gdy, dla każdego ϵ, pole

$$\nabla_{d\Phi}(\Psi)|\phi((a + \epsilon, b - \epsilon)) = 0.$$

Niestety trzeba jeszcze sprawdzić, że ta definicja równoległego pola nie zależy od wyboru pól $d\Phi, \Psi$ i tu już nie ma rady, bo w tym celu należy wziąć układ współrzędnych i to przeliczyć, upewniając się, że żądana równość sprowadza się do

$$(*)\quad \frac{d\Psi^k}{dt} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{d\Phi_i}{dt} \Psi_j$$

gdzie

$$\Psi(t) \stackrel{df}{=} \Psi(\phi(t))$$

oraz

$$d\Phi(t) \stackrel{df}{=} d\Phi(\phi(t)) = \frac{d\phi}{dt}(t)$$

Ponieważ w równości (*) występują tylko wartości Ψ oraz $d\Phi$ na krzywej, zatem istotnie warunek na równoległość nie zależy od wybranych rozszerzeń pól.

Określone tak jak wyżej przesunięcia równoległe wyznaczają jednoznacznie tę spójność, od której pochodzą. Istotnie dla pól stycznych τ, σ, mamy, że

$$\nabla_\tau(\sigma)(x) = \lim \frac{\sigma(h) - p\sigma(0)}{h},$$

gdzie

1. $\sigma(h)$ jest wartością pola σ w punkcie $\psi(h)$, dla dowolnie wybranej krzywej $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ spełniającej $\psi(0) = x$, $\frac{d\psi}{dt} = \tau(x)$

2. $p\sigma(0)$ jest przesunięciem wektora $\sigma(0)$ wzdłuż krzywej ψ do punktu $\psi(h)$.

23 Strukturalne równania Cartana (po raz pierwszy).

Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie bazowym układem pól stycznych na pewnym podzbiorze otwartym $U \subset X$. Na przykład mogą to być pola $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$, jeśli na U dany jest układ współrzędnych $x \Rightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, dla $x \in U$. Załóżmy, że na X dana jest spójność afiniczna ∇ i niech

$$\nabla_{X_k}(X_l) = \sum_l \Gamma_{k,l}^i X_i,$$

gdzie $\Gamma^l_{i,k}$ są funkcjami na U wyznaczającymi i wyznaczonymi przez spójność ∇ ograniczoną do U.

W układzie bazowym $(X_1, \dots, X_n)$ tensory torsji i krzywizny mają swe współrzędne T^i_{kl}, R^i_{klm}, tj.

$$T(X_k, X_l) = \sum_i T^i_{kl} X_i, \;\; R(X_k, X_l)(X_m) = \sum_i R^i_{klm} X_i.$$

Niech $\theta^1, \dots, \theta^n$ będzie układem form różniczkowych na U dualnym do $X_1, \dots, X_n$ (tj. $\theta^i(X_j) = \delta^i_j$). Ponadto niech

$$\omega^i_j = \sum_k \Gamma^i_{k,j} \theta^k.$$

Okazuje się, że pochodne zewnętrzne form θ^i oraz form ω^i_j można prosto związać z ze współrzędnymi tensorów torsji i krzywizny.

Twierdzenie. (Strukturalne równania Cartana).

$$d\theta^i = -\sum_p \omega^i_p \wedge \theta^p \; + \; \frac{1}{2} \sum_{j,k} T^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k,$$

$$d\omega^i_l = -\sum_p \omega^i_p \wedge \omega^p_l \; + \; \frac{1}{2} \sum_{j,k} R^i_{ljk} \theta^j \wedge \theta^k.$$

Po obu stronach tych równości występują formy stopnia 2. DOWÓD polega na sprawdzeniu, że wartości lewej i prawej strony na formach bazowych X_j, X_k są takie same. W tym celu wygodnie jest zapisać nawias Liego

$$[X_j, X_k] = \sum_i c^i_{jk} X_i.$$

Wtedy okaże się (po zastosowaniu wzoru na wartość pochodnej zewnętrznej formy fóżniczkowej ze strony 25), że

$$d\theta^i(X_j, X_k) = \frac{1}{2}(0 - 0 - c^i_{jk}).$$

Dla obliczenia prawej strony dla pary (X_j, X_k), wyliczamy najpierw, że

$$T(X_j, X_k) = \sum_i (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}) X_i$$

a stąd otrzymujemy, że

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}.$$

Następnie sprawdzamy, że

$$(-\sum_p \omega^i_p \wedge \theta^p)(X_j, X_k) = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})$$

oraz

$$\frac{1}{2}\sum_{r,s}(T^i_{rs}\theta^r \wedge \theta^s)(X_j, X_k) = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}).$$

Co kończy dowód pierwszej równości. Podobnie postępujemy dla dowodu drugiej.

Powyższe rozważania wskazują, że przy przyjętym na wykładzie sposobie definiowania spójności afinicznej jako rodziny operatorów ∇ napotyka się na trudności z wyrażaniem pewnych geometrycznych faktów w geometrycznych terminach, tj w terminach nie wymagających wprowadzenia układów współrzędnych. Mamy tu na myśli Srukturalne Twierdzenie Cartana. Pewnym mankamentem tej teorii jest też to, że chociaż wiemy, iż przesunięcia równoległe wyznaczają spójność afiniczną ∇, to, jak dotychczas, nie mamy odpowiedniego zestawu pojęciowego, który pozwalałby na bezpośrednie określenie spójności afinicznej jako "układu" przesunięć równoległych wzdłuż krzywych bez uciekania się do układów współrzędnych i symboli Christoffela.

24 Wiązki główne

A. Gładkie działania grup. Ustalmy, że przez działanie grupy G na zbiorze X dane przez $\phi : G \to X$ rozumiemy zawsze działanie lewostronne to znaczy spełniające równość:

$$\phi(g, \phi(h, x) = \phi(gh, x).$$

Niech X będzie rozmaitością różniczkową. Niech G będzie grupą Liego. Przez działanie gładkie grupy G na X rozumiemy takie działanie, które jest wyznaczone przez gładkie przekształcenie $G \times X \to X$. Wynik działania elementem $g \in G$ na punkt $x \in X$ oznaczamy przez gx. W dalszym ciągu rozważać będziemy tylko działania gładkie i wobec tego zamiast "działanie gładkie" pisać będziemy "działanie". Rozmaitość z działaniem nazywamy G-rozmaitością. G-przekształcenie $\phi : X \to Y$ dwóch G-rozmaitości to przekształcenie (oczywiście gładkie) zachowujące działanie (tj $\phi(gx) = g\phi(x)$). Typowymi przykładami działania G na G są lewostronne (oznaczane przez l_g) i prawostronne (oznaczane przez r_g) przesunięcia oraz automorfizmy wewnętrzne (oznaczane przez i_g). Dla $h \in G$ mamy zatem

$$l_g(h) = gh,\ r_g(h) = hg^{-1},\ i_g(h) = ghg^{-1}.$$

To ostatnie działanie ma element staly $1 \in G$. Wobec tego działanie przez automorfizmy wewnętrzne wyznacza reprezentację grupy Liego G w przestrzeni stycznej $T_{1,G} = \mathcal{G}$. Reprezentację tę nazywamy *dołączoną* i oznaczamy przez ad. Dla $g \in G$, przekształcenia $ad(g) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ są izomorfizmami algebry Liego $\mathcal{G}$.

Umawiamy się, że *jeśli mowa jest o działaniu grupy G na G to mamy na myśli działanie przez prawostronne przesunięcia.*

W przypadku gdy $G = Gl(n, R)$, algebra Liego $\mathcal{G}$ jest algebrą macierzy $M_n^n(R)$ z operacją nawiasu Liego wyznaczoną jako komutator (tj. $[A, B] = AB - BA$, dla $A, B \in M_n^n(R)$). Natomiast, dla $A \in Gl(n, R)$, mamy $ad(A)(X) = AXA^{-1}$, dla każdego $X \in M_n^n(R)$.

Każdy element α z algebry Liego grupy G wyznacza pole styczne $\tilde{\alpha}$ na G-rozmaitości X. Pole to można np. określić w następujący sposób. Elementowi α odpowiada taki homomorfizm $\psi_\alpha : R^+ \to G$, że

$$\frac{d\psi_\alpha}{dt}(0) = \alpha$$

(R^+ oznacza tu grupę addytywną liczb rzeczywistych). Dla każdego $x \in X$ niech

$$\tilde{\alpha}(x) = \frac{d(\psi_\alpha(t)x)}{dt}(0).$$

Wobec tego możemy też określić przekształcenie algebry Liego $\mathcal{G}$ grupy G w $T_{x,X}$ przez

$$\alpha \Rightarrow \tilde{\alpha}(x)$$

Przy tym odwzorowaniu obrazem algebry $\mathcal{G}$ jest przestrzeń styczna do orbity $Gx \subset X$.

Działanie grupy G nazywamy *wolnym*, gdy dla każdego $x \in X$, odwzorowanie $G \to Gx$ określone przez $g \Rightarrow gx$ jest, dla każdego $x \in X$, diffeomorfizmem. Na przykład działania grupy G na G zdefiniowane jako przesunięcia lewostronne lub prawostronne są wolne.

Dla każdego $g \in G$, odwzorowanie dl_g wyznacza izomorfizm $T_{p,G} \to T_{gp,G}$. Ponadto, jak wiemy, obie te przestrzenie można utożsamić z algebrą Liego $\mathcal{G}$. Wobec tego dl_g w punkcie $p \in X$ wyznacza automorfizm algebry $\mathcal{G}$. Okazuje się, że automorfizm ten pokrywa się z $ad(g)$. Aby się o tym przekonać rozważmy dowolny element $\alpha \in \mathcal{G}$. Wyznacza on taki homomorfizm $\psi_\alpha : R^+ \to G$, że $\frac{d\psi_\alpha}{dt}(0) = \alpha$. Przy przekształceniu przesuniecia l_g (z lewej strony) o element g, element α z jednej strony przechodzi na element $dl_g(\alpha)$, a z drugiej na element styczny do krzywej $l_g \circ \phi$. Ponieważ jednak, dla $t \in R^+$,

$$l_g \circ \phi(t)(p) = g\phi(t)g^{-1}(gp),$$

zatem istotnie $dg(\alpha) = ad(g)(\alpha)$.

B. Niezmiennicze formy różniczkowe.

Wygodnie nam będzie rozszerzyć określenie formy różniczkowej i rozważać na rozmaitości X formy o wartościach w (dowolnej) przestrzeni wektorowej V. Taka forma stopnia k to (gładkie) pole skośnie symetrycznych k-liniowych przekształceń przestrzeni stycznej w V. W przypadku gdy $V = R^1$, to ogólne pojęcie pokrywa się z wprowadzonym i używanym poprzednio pojęciem rzeczywistej formy różniczkowej. W przypadku gdy $V = R^n$ pojęcie to sprowadza sę do pojęcia układu n rzeczywistych form różniczkowych.

Niech teraz X będzie G-rozmaitością, V niech będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\rho : G \to Gl(V)$ reprezentacją grupy G w przestrzeni V. Wówczas k-formę różniczkową ω o wartościach w V nazywamy ρ-niezmienniczą gdy

$$\omega(dg(\alpha_1), \ldots, dg(\alpha_k)) = \rho(g)\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

dla dowolnego $x \in X$ $g \in G$ oraz wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T_{x,X}$. W przypadku gdy ρ jest reprezentacją trywialną (to znaczy $\rho(g) = 1$, dla każdego $g \in G$), wtedy formę ρ-niezmieniczą nazywamy krócej formą niezmienniczą.

C. Definicja wiązki głównej. Niech X będzie rozmaitością, a G grupą Liego. *Trywialną G-wiązką główną o bazie X* nazywamy produkt $X \times G$ z działaniem grupy G wyznaczonym przez prawostronne przesunięcia drugiego czynnika produktu przez elementy grupy G (tj $g(x, h) = (x, hg^{-1})$) oraz rzutowaniem $\pi : (X \times G) \to X$ (tj $\pi(x, h) = x$). *G-wiązką główną nad X* nazywamy rozmaitość różniczkową B z działaniem grupy G oraz submersją

$\pi : B \to X$ lokalnie izomorficzną z trywialną G-wiązką główną. Oznacza to, że dla każdego $x \in X$ ma istnieć takie otoczenie U_x, że przeciwobraz $\pi^{-1}(U_x)$ z rzutowaniem

$$\pi|\pi^{-1}(U_x) : \pi^{-1}(U_x) \to U_x$$

jest G-izomorficzny z G-wiązką trywialną $U_x \times G \to U_x$.

Jeśli $\mathcal{B} = \{\pi : B \to X\}$ jest wiązką główną, to $T_{x,Gx}$ może być utożsamiane z $\mathcal{G}$. Ponadto warto zwrócić uwagę na to, że $T_{x,Gx}$ jest dokładnie równe $ker(d\pi)$ w punkcie x.

Z punktu widzenia tego wykładu najważniejszymi przykładami wiązek głównych są *wiązki baz wiązek wektorowych*. Konstrukcję ich przeprowadzamy w następujący sposób.

Niech $\mathcal{W} = \{\kappa : W \to X\}$ będzie wiązką wektorową nad X. Rozpatrzmy zbiór B_W wszystkich par postaci: $(x; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, gdzie $x \in X$ oraz $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni wektorowej $W_x = \kappa^{-1}(x)$. Niech $\pi : B_W \to X$ będzie przekształceniem, które parze $(x; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ przyporządkowuje x. W zbiorze B_W wprowadzamy strukturę rozmaitości różniczkowej przyjmując atlas złożony z map określonych w następujący sposób:

niech $\phi : U \to R^m$ będzie podzbiorem otwartym w X z układem współrzędnych. Niech $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ będzie układem pól bazowych wiązki $\mathcal{B}$ na U (tj. dla każdego $x \in U$, wektory $\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)$ mają tworzyć bazę przestrzeni W_x). Wówczas niech mapa $\psi : \pi^{-1}(U) \to R^{m+n^2}$ będzie określona przez:

$$\psi((x; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = (\phi(x), A_\eta^\alpha),$$

gdzie A_η^α jest macierzą przejścia od bazy $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ do bazy $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x))$.

Okazuje się, że te mapy tworzą zgodny atlas, a zatem wyznaczają strukturę różniczkową na B_W. Przy tym przekształcenie π oraz działanie grupy $Gl(n, R)$ określone przez

$$A((x; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = (x; \sum a_{1j}\alpha_j, \ldots, \sum a_{nj}\alpha_j)$$

(gdzie $A = \{a_{ij}\} \in Gl(n, R)$) są gładkie, a ponadto $\mathcal{B}_W = \{\pi : B_W \to X\}$ jest $Gl(n, R)$-wiązką główną. Wiązkę tę nazywamy *wiązką baz dla* W oraz oznaczamy przez $\mathcal{B}_W$.

Z naszego punktu widzenia najważniejszym przykładem tej konstrukcji wiązki głównej jest $Gl(n, R)$-wiązka główna baz wiązki stycznej. Na tej wiązce baz istnieją kanoniczne formy różniczkowe $\theta_1, \ldots, \theta_n$ określone w następujący sposób. Niech β będzie wektorem stycznym do B_{T_X} w punkcie $(x, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest zatem bazą w przestrzeni stycznej $T_{x,X}$. Niech $\theta_i(\beta)$ równa się i-tej współrzędnej wektora $d\pi(\beta)$ w tej bazie. Układ tych form można rozpatrywać jako jedną formę o wartościach w R^n, oznaczaną przez θ.

Można sprawdzić, że forma θ jest ρ-niezmiennicza, gdzie $\rho : Gl(n, R) \to Gl(n, R)$ określone jest przez

$$\rho(A) = (A^t)^{-1},$$

dla każdej macierzy $A \in Gl(n, R)$.

Niech teraz $\{U_i\}$ będzie takim pokryciem otwartym rozmaitości X, że $\mathcal{B}$ jest trywialna nad U_i, dla każdego i. Istnieją zatem izomorfizmy $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ i wyznaczone przez nie "sklejenia" $\psi_j \circ \psi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \to (U_i \cap U_j) \times G$. Te "sklejenia" w każdym włóknie nad $x \in U_i \cap U_j$ wyznaczają przekształcenie $G \to G$ przemienne z lewostronnymi przesunięciami l_g, a zatem wyznaczają pewne prawostronne przesunięcie r_h. Przyporządkowując punktowi x tak określony element h, otrzymamy pewne przekształcenie $U_i \cap U_j \to G$, oznaczamy je przez γ_{ij}. Łatwo jest sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób pewien 1-kocykl o wartościach w G.

Odwrotnie mając 1-kocykl $\{\gamma_{ij}\}_{ij}$ owartościach w G możemy skonstruować pewną G-wizkę gówną nad X. Wiązka ta jest trywialna nad każdym ze zbiorów U_i.

W przypadku gdy $G = Gl(n, R)$, 1-kocykl wyznacza z jednej strony $Gl(n, R)$-wiązkę główną, z drugiej zaś wiazkę wektorową (o włóknach R^n). Wobec tego każda $Gl(n, R)$-wiązka główna wyznacza wiązkę wektorową (o włóknach R^n) i odwrotnie. Rozważania te można nieco uogólnić. Niech grupa G działa na rozmaitości X. Na przykład niech X będzie przestrzenią wektorową, oznaczaną przez V i niech dana będzie reprezentacja $\rho : G \to Gl(V))$. Niech dany będzie 1-kocykl

$$\gamma_{ij} : (U_i \cap U_j) \to G$$

o wartościach w G. Wtedy "sklejając" $U_i \times G$ z $U_j \times G$ wzdłuż $(U_i \cap U_j) \times G$ zgodnie z przepisem $(x, v) \mapsto (x, \gamma_{ij}(x)v)$ otrzymamy pewną wiązkę nad X o wóknach V.

Korzystając w ten sposób z 1-kocyklu o wartościach w $Gl(n, R)$ wyznaczającego wiązkę styczną T_X i biorąc jako reprezentację ρ reprezentację dołączoną otrzymamy wiązkę tensorów typu $(1, 1)$, tj. wiązkę endomorfizmów liniowych wiązki stycznej.

25 Spójność na wiązce głównej

Definicja. Niech $\mathcal{B} = \{\pi : B \to X\}$ będzie G-wiązką główną. *Spójnością na* $\mathcal{B}$ nazywamy G-niezmienniczą, transwersalną do włókien π, $dim(X)$-wymiarową dystrybucję D na B. W przypadku gdy $\mathcal{B}$ jest wiązką baz wektorowej wiązki $\mathcal{W}$, wtedy spójność na $\mathcal{B}$ nazywamy *spójnością afiniczną na* $\mathcal{W}$.

Transwersalną do włókien π to znaczy, że dla każdego $p \in B$, przestrzeń styczna $T_{p,B}$ jest sumą prostą

$$T_{p,\pi^{-1}(\pi(p))} \oplus D(p)$$

G-niezmienniczą oznacza, że

$$D(gp) = dg(D(p)),$$

dla każdego $g \in G$ oraz $p \in B$. dg oznacza tu pochodną odwzorowania $g : B \to B$ wyznaczonego jako działanie elementem $g \in G$ na B.

Z tego co wyżej zostało powiedziane wynika, że spójność wyznacza, dla każdego $p \in B$, przekształcenie rzutowania $T_{p,B} \to T_{p,Gp}$, ale ponieważ $T_{p,Gp}$ można utożsamiać z $\mathcal{G}$, zatem mozna uważać, że jest to przekształcenie na $\mathcal{G}$. Otrzymane w ten sposób pole jest *formę różniczkową o wartościach w* $\mathcal{G}$. Warunek G-niezmienniczości tak otrzymanej formy ω dla danej spójności D można wyrazić jako:

$$\omega(dg(\alpha)) = ad(g)(\omega(\alpha)).$$

Wobec tego jest to równoważne warunkowi ad-niezmienniczości formy ω. Prowadzi to zatem do następującej równoważnej z podaną wyżej definicji spójności:

spójność na G wiązce głównej $B \to X$ to taka forma różniczkowa ω o wartościach w algebrze Liego $\mathcal{G}$, że

1. dle każdego $p \in B$, $\omega(p)$ jest rzutem $T_{p,B}$ na $T_{p,Gp} \simeq \mathcal{G}$,

2. ω jest ad-niezmiennicza.

$\simeq$ oznacza tu kanoniczne utożsamienie $T_{p,Gp}$ z $\mathcal{G}$.

W przypadku gdy w algebrze $\mathcal{G}$ wprowadzimy układ współrzędnych (taki naturalny układ współrzędnych istnieje na przykład gdy $G = Gl(n, R)$, bo wtedy $\mathcal{G} = M_n^n(R)$), forma spójności wyznacza i jest wyznaczona przez układ n^2 rzeczywistych form różniczkowych (gdyż $dim(G) = n^2$). Ten układ form wygodnie jest zapisać jako $n \times n$-macierz form ω_j^i.

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ jest $Gl(n, R)$-wiązką baz wiązki wektorowej $\mathcal{W}$. Wtedy spójność na B_W nazywamy spójnością afiniczną na W. W szczególnym przypadku gdy W jest wiązką styczną, mówimy, że ta spójność afiniczna dana jest na rozmaitości X. Wobec tego spójność afiniczna na rozmaitości X to jest spójność afiniczna na jej wiązce stycznej.

26 Powrót do bazy.

Warto teraz porównać wprowadzone wyżej pojęcie spójności z tym, o którym była mowa wcześniej.

Przypomnijmy najpierw, że klasyczne, rozważane przez nas poprzednio, pojęcie spójności w wiązce wektorowej nad rozmaitością X jako operatora ∇ prowadzi do pojęcia przesunięcia równoległego wektorów i baz przestrzeni wektorowych wzdłuż krzywych. To pojęcie prowadzi dalej do pojęcia wektora horyzontalnego w wiązce stycznej do wiązki baz. Wystarczy bowiem jako takie wektory uważać te, które są styczne do krzywych w przestrzeni baz powstających przez równoległe przesuwanie baz wzdłuż krzywych w przestrzeni X. Sprawdzenie, że tak określone wektory styczne określają niezmienniczą $dim(X)$- dystrybucję jest proste.

Ustalmy punkt $(x, (\alpha_1, ..., \alpha_m)) \in B_W$. Rozszerzmy bazę $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ do pola bazowego oznaczanego przez $(\tilde{\alpha_1}, ..., \tilde{\alpha_m})$ i określonego na pewnym otwartym otoczeniu U punktu $x \in X$. Załóżmy, że na U dany jest układ współrzędnych. W ten sposób otrzymamy układ współrzędnych na $B_W|U$. Dokładniej punktowi $(y, (\beta_1, ..., \beta_m))$ przyporządkowujemy jego współrzędne horyzontalne określone jako współrzędne punktu y, a dalej współrzędne wertykalne określone jako współrzędne wektorów β_i, $i = 1, ..., m$ w bazie $(\tilde{\alpha_1}(y), ..., \tilde{\alpha_m}(y))$.

Zadana spójność afiniczna w wiązce $W \to X$ wyznacza dla każdego pola bazowego wiązki W na U symbole Chrisoffela Γ_{ij}^k będące funkcjami gładkimi na U. Niech $\phi : (-a, a) \to X$ będzie taką krzywą, że $\phi(0) = x$. W ustalonym wyżej układzie współrzędnych $\phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t)$. Przesuwając wektory $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ wzdłuż tej krzywej otrzymamy $\overline{\alpha_i} : (-a, a) \to W$ i $\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_m}$ jest krzywą $\overline{\phi} : (-a, a) \to B_W$ bądącą podniesieniem krzywej ϕ. Niech $\overline{\alpha_i}(t) = a_{i1}(t)\tilde{\alpha_1}(\phi(t)) + ... + a_{in}(t)\tilde{\alpha_m}(\phi(t))$.

Z definicji przesunięcia równoległego, współrzędne wektora stycznego $\frac{d}{dt}(a_{i1}(t), ..., a_{in}(t))(0)$ spełniają równania:

$$\frac{d}{dt}(a_{lk}(t) = -\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k(\phi(t))\frac{d}{dt}(\phi_i(t))a_{lj}(t).$$

Weźmy w tej równości $t = 0$. Otrzymamy po lewej stronie współrzędne wektora stycznego do krzywej $\overline{\phi}$, po prawej zaś wyrażenia postaci

$$-\sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j}(x) p_i \delta_{lj}.$$

Liczby p_i przebiegają tu wszystkie wartości rzeczywiste i otrzymamy na tej drodze współrzędne wektorów stycznych w kierunkach wertykalnych. Wspólrzędne w kierunkach horyzontalnych są przy tych oznaczeniach równe p_i. Odpowiadają ce tym współrzędnym wektory tworzą podprzestrzeń liniową.

Wobec tego klasyczna spójność w wiązce wektorowej $W \to X$ wyznacza spójność afiniczną w wiązce $W \to X$ w sensie ostatnio wprowadzonym.

Ale i odwrotnie. Załóżmy, że dana jest spójność afiniczna w pewnej wiązce wektorowej $W \to X$ nad rozmaitością X w sensie ostatnio rozpatrywanym. Mając krzywą parametryczną $\phi : (a, b) \to X$ w rozmaitości X oraz bazę włókna wiązki w pewnym punkcie $\phi(t_0)$ tej rozmaitości (a zatem punkt p w wiązce baz B_W), możemy podnieść tę krzywą do krzywej horyzontalnej $\tilde{\phi} : (a, b) \to B_W$ tak by $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$ oraz $\phi(t_0) = p$. Otrzymamy w ten sposób pewne przesunięcie zadanej bazy wzdłuż zadanej krzywej. Ponieważ pojęcie wektora horyzontalnego, a zatem i krzywej horyzontalnej jest niezmiennicze, zatem można tak wprowadzić pojęcie przesunięcia wektora wzdłuż krzywej. Mając dane przesunięcie wektora wzdłuż krzywej można wprowadzić, jak to już robiliśmy wcześniej, pojęcie różniczkowania pola wektorowego wiązki W w kierunku pola stycznego. A to przecież jest spójnością afiniczną wiązki W w sensie rozważanym przez nas wcześniej.

Zauważmy, że wprowadzenie na danym zbiorze otwartym $U \subset X$ pól bazowych $X_1, ..., X_n$ wiązki W daje przekrój, oznaczmy go przez σ, wiązki baz B_W nad U. Ten przekrój jest diffeomorfizmem U na $\sigma(U)$. Wobec tego pozwala na utożsamienie U z $\sigma(U)$, a dalej na przypisanie formom określonym na B_W ich obcięć do X. W przypadku gdy W jest wiązką styczną, formy θ^i określone na B^W wyznaczają po ich obcięciu do $\sigma(U)$ układ form na U. Są to rozpatrywane dawniej formy, oznaczane też przez θ^i, tworzące bazę dualną do $X_1, ..., X_n$.

Ponadto w sytuacji gdy mamy daną klasyczną spójność afiniczną oraz ustaliliśmy układ pól bazowych wiązki wektorowej W na zbiorze otwartym $U \subset X$, to możemy określić na U macierz form ω^i_j. Te formy możemy też uzyskać z formy spójności ω na wiązce baz B_W. Istotnie, w rozważanej sytuacji, forma spójności ω ma swe wartości w algebrze rzeczywistych (nxn)-macierzy, a zatem jest macierzą złożoną z n^2 form rzeczywistych $\overline{\omega}^i_j$. Formy ω^i_j, o których była mowa przed chwilą to obciecie form $\overline{\omega}^i_j$ do utożsamionej z $U \subset X$ podrozmaitości $\sigma(U) \subset B_W$. Możemy zatem odnaleźć symbole Christoffela Γ z formy spójności ω w następujący sposób: bierzemy ω^i_j oraz ich obcięcia do $\sigma(U)$ interpretujemy jako formy określone na U Wówczas symbole Christoffela są współrzędnymi tych danych na U form w bazie $\theta_1, ..., \theta_n$.

Przypomnijmy i uzupełnijmy pewne pojęcia rozważane już poprzednio. Przez formę rozumiemy gładkie pole wieloliniowych przekształceń przestrzeni stycznych w ustaloną przestrzeń wektorową V. Formę nazywamy niezmienniczą gdy jej wartość (leżąca w V) na wektorach stycznych nie zmieni się gdy te wektory zastąpimy ich obrazami przy dg, gdzie $g : B_W \to B_W$ jest przekształceniem odpowiadającym działaniem elementu $g \in Gl(n, R)$.

W przypadku gdy założymy dodatkowo, iż przekształcenia te są antysymetryczne oraz $V = R^1$, wtedy otrzymamy rozważane poprzednio pojęcie formy różniczkowej. Przykładami takich form, których wartości leżą pewnej przestrzeni V (na ogół różnej od R^1) są θ i forma spójności afinicznej ω. Pierwsza swoje wartości ma w R^n, druga w przestrzeni rzeczywistych $(n \times n)$-macierzy. Nie są to, z wyjątkiem trywialnych przypadków, formy niezmiennicze.

Formy równe zero na wektorach wertykalnych nazywają się horyzontalnymi. Jeśli η jest taką formą to jej wartości na wektorach stycznych do B_W są takie same jak jej wartości na składowych horyzontalnych tych wektorów. Każdej formie η można przyporządkować pewną formę horyzontalną oznaczaną przez η^h. Jej wartość na wektorach stycznych jest określona jako wartość formy η na składowych horyzontalnych tych wektorów. Tak określona forma η^h nazywa się składową horyzontalną formy η. Składowa horyzontalna formy niezmienniczej jest też niezmiennicza, a zatem jest to niezmiennicza forma horyzontalna.

Każda forma na X indukuje, poprzez przekształcenie $\pi : B_W \to X$, formę na B_W. Otrzymana tak forma jest niezmiennicza i równa zero na wektorach wertykalnych, a zatem jest horyzontalna, bo π jest przekształceniem niezmienniczym oraz $d\pi$ jest równa zero na wektorach wertykalnych. Łatwo też zauważyć, że każda niezmiennicza forma horyzontalna B_W jest wyznaczona w ten sposób przez pewną formę daną na X. Wobec tego można utożsa-miać pojęcie formy horyzontalnej niezmienniczej z pojęciem formy danej na X.

Niech teraz $W \to X$ będzie wiązką wektorową, a $B_W \to X$ jej wiązką baz. Niech $\rho : Gl(n, R) \to Gl(V)$ będzie reprezentacją grupy $Gl(n, R)$. Wówczas dowolną formę η (stopnia k) określoną na B_W o wartościach w V nazywamy

ρ-niezmienniczą, gdy dla każdego $g \in Gl(n,R)$, $x \in X$ oraz $\alpha_1, ..., \alpha_k \in T_{x,B_X}$,

$$\eta(dg(\alpha_1), ..., dg(\alpha_k)) = \rho(g)(\eta(\alpha_1, ..., \alpha_k)).$$

W przypadku gdy ρ jest reprezentacją trywialną (to znaczy $\rho(g)$ jest przekształceniem identycznościowym przestrzeni V, dla każdego $g \in Gl(n,R)$) wtedy pojęcie formy ρ-niezmienniczej pokrywa się z pojęciem formy niezmienniczej. Przykładami nietrywialnych reprezentacji grupy $Gl(n,R)$ są, po pierwsze, reprezentacja identycznościowa $Gl(n,R) \to Gl(R^n)$ oznaczana dalej przez ρ_1, po drugie reprezentacja $\rho^1 : Gl(n,R) \to Gl(R^n)$, która macierzy x przyporządkowuje $(x^{-1})^T$, wreszcie, po trzecie, iloczyny tensorowe tych reprezentacji w iloczynach tensorowych przestrzeni R^n. W ogólniejszym przypadku G-wiązek głównych ważną rolę gra reprezentacja dołączona $ad : G \to Gl(A)$, gdzie A jest algebrą Liego grupy G. W rozpatrywanej teraz sytuacji gdy $G = Gl(n,R)$, algebrą Liego jest algebra $(n \times n)$-macierzy (którą można utożsamiać z $R^n \otimes R^n$) reprezentacją dołączoną jest iloczyn tensorowy $\rho_1^1 = \rho_1 \otimes \rho^1$, który macierzy $g \in Gl(n,R)$ przyporządkowuje przekształcenie przestrzeni $(n \times n)$-macierzy w siebie zadane przez

$$x \longmapsto gxg^{-1}.$$

Na przykład forma θ jest ρ^1-niezmiennicza. Natomiast, dla danej w wiązce W spójności afinicznej, forma spójności afinicznej ω jest ρ_1^1-niezmiennicza.

Zajmiemy się teraz pewną interpretacją geometryczną form ρ-niezmienniczych. Załóżmy, że w wiązce stycznej $T \to X$ dana jest spójność afiniczna. Niech η będzie k-liniową formą ρ-niezmienniczą stopnia k określoną na B_T, gdzie $\rho_j^i : Gl(n,R) \to Gl((R^n)^{\otimes i} \otimes (R^n)^{\otimes j}$ jest którą kolwiek z reprezentacji tensorowych

$$\rho_i^j = (\rho_1)^{\otimes i} \otimes (\rho^1)^{\otimes j}.$$

Na przykład ρ^1 lub ρ_1^1. Oczywiście przyjęliśmy $n = dim(X)$.

W tym przypadku formie η można przyporządkowć k-liniową formę określoną na X, której wartość na wektorach stycznych w punkcie x leży we włóknie wiązki $T_j^i(T) = T^{\otimes i} \otimes (T^*)^{\otimes j}$ nad punktem x. Wobec tego forma ta wyznacza przekształcenia k-liniowe $\overline{\eta}$ przestrzeni stycznych $T_{x,X}$ w przestrzenie wektorowe $T_x^{\otimes i} \otimes (T_x^*)^{\otimes j}$. Przekształcenie to jest określone w następujący sposób. Dla $x \in X$, $\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_k} \in T_{x,X}$, wybieramy punkt $y \in B_T$, tak by

$\pi(y) = x$. Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone wektory horyzontalne $\alpha_1, ..., \alpha_k \in T_{y,B_W}$ takie, że

$$d\pi(\alpha_1) = \overline{\alpha_1}, ..., d\pi(\alpha_k) = \overline{\alpha_k}.$$

Punkt y wyznacza bazę w T_x, a zatem bazy we wszystkich przestrzeniach tensorowych nad T_x. Możemy teraz jako wartość

$$\overline{\eta}(\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_k})$$

przyjąć ten tensor z $T^i_j(W)$, którego współrzędne równe są $\eta(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Założenie o ρ-niezmienniczości formy η gwarantuje, że tak otrzymana wartość nie zależy od wyboru punktu y.

Dla formy θ określonej na B_T otrzymamy 1-forme $\overline{\theta}$ na X o wartościach w T_X. Łatwo sprawdzić, że jest to identyczność $\overline{\theta}(\alpha) = \alpha$, dla każdego $\alpha \in T_{x,X}$. Natomiast forma spójności afinicznej ω określa na tej drodze pewną 1-formę na X o wartościach w $T^*_X \otimes T_X = End(T_X)$. Forma ta wektorowi $\alpha \in T_{x,X}$ przyporządkowuje pewne przekształcenie liniowe $T_x, X \to T_{x,X}$. Jest to zatem pole tensorów 2-kontrawariantnych i 1-kowariantnych na X. Nie jest to jednak ciekawy przypadek. Zauważmy bowiem, że ta forma określona dla wektorów stycznych do X, którą przyporządkowaliśmy formie η, zależy tylko od składowej horyzontalnej formy η i jeśli składowa równa jest zero, to i przyporządkowana forma równa się zero. Jednakże część horyzontalna formy spójności równa jest zero.

To samo co już było, trochę innymi słowami i w odniesieniu do najważniejszego dla nas przypadku form różniczkowych:

Niech η będzie ρ-niezmienniczą k-formą, gdzie ρ jest reprezentacją $\rho(A) = (A^t)^{-1}$. Pokażemy niżej jak formie η można przyporządkować pewne pole na rozmaitości X. Będzie to pole, które w punkcie $x \in X$ jako swą wartość przyjmuje pewne skośnie symetryczne przekształcenie przestrzeni stycznej $T_{x,X}$ we włókno W_x.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami stycznymi z $T_{x,X}$ oraz niech $\tilde{\alpha_1}, \ldots, \tilde{\alpha_k}$ będą ich podniesieniami do horyzontalnych wektorów z $D(p) \subset T_{p,B}$ (a więc $\pi(p) = x$.) Niech

$$\eta(\tilde{\alpha_1}, \ldots, \tilde{\alpha_k}) = \tilde{\beta} \in R^n.$$

Weźmy teraz wektor $\beta \in W_x$ o współrzędnych $\tilde{\beta}$ w bazie wyznaczonej przez p (p równe jest parze złożonej z punktu x oraz pewnej bazy w $T_{x,X}$, chodzi o tę bazę). Rzecz w tym, że ten wektor β nie zależy od wyboru podniesień $(\tilde{\alpha_1}, \ldots, \tilde{\alpha_k})$. Wobec tego taka niezmiennicza forma η wyznacza na X "formę" skośnie symetryczną o wartościach w zmiennej przestrzeni W_x. W szczególnym przypadku gdy $W = T_X$, otrzymana "forma" jest polem tensorowym, które w każdym punkcie x jako swą wartość przyjmuje k-liniowe, skośnie symetryczne przekształcenie $T_{x,X} \times \ldots \times T_{x,X} \to T_{x,X}$. Jest to zatem pole tensorów typu $(1, k)$, skośnie symetryczne w kowariantnych zmiennych.

To rozumowanie można powtórzyć w ogólniejszej sytuacji. Niech $\rho : G \to Gl(V)$ będzie reprezentacją i niech η będzie ρ-niezmienniczą k-formą na wiązce głównej $\mathcal{B}$. Składając ρ z 1-kocyklem wyznaczającym wiązkę $\mathcal{B}$ otrzymamy pewną V-wiązkę wektorową $\mathcal{W}$. W tej sytuacji η wyznacza na X pole, które jako swą wartość w punkcie x przybiera k-liniowe skośnie symetryczne przekształcenie $T_{x,X} \times \ldots \times T_{x,X} \to W_x$.

27 Pochodna kowariantna i forma krzywizny.

Niech dana będzie spójność D na G-wiązce głównej $\mathcal{B}$. Niech η będzie dowolną formą różniczkową stopnia k na B. Przypomnijmy, że wówczas *składową horyzontalną formy* η nazywamy formę η^h, też stopnia k, określoną w następujący sposób:

$$\eta_h(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \eta(\alpha_1^h, \ldots, \alpha_n^h),$$

gdzie dla wektora stycznego $\alpha \in T_{p,B}$, przez α^h oznaczamy jego rzut na $D(p)$.

Z definicji wynika, że składowa horyzontalna formy spójności jest równa 0. Łatwo jest wykazać, że składowa horyzontalna formy ρ-niezmienniczej jest formą ρ-niezmienniczą.

Formę nazywamy *horyzontalną* gdy jest równa swej składowej horyzontalnej.

W ostatnich paragrafach rozważaliśmy formy różniczkowe o wartościach w przestrzeniach wektorowych. Okazuje się, że bez trudu możemy przenieść na takie formy definicję pochodnej zewnętrznej. W podanych przedtem definicjach pochodnej zewnętrznej nic nie należy zmieniać. Wystarczy jedynie przyjąć, że wartości rozpatrywanych form należą do ustalonej przestrzeni wektorowej V, a niekoniecznie do ciala liczb rzeczywistych, a więc do jednowymiarowej przestrzeni wektorowej $V = R^1$. Po ustaleniu bazy w V każda forma ω o wartościach w V wyznacza i jest wyznaczona przez układ $dim(V)$ rzeczywistych form różniczkowych opisujących współrzędne wartości formy ω. Układ pochodnych zewnętrznych tych form da układ odpowiadający pochodnej zewnętrznej formy ω.

Definicja. *Pochodną kowariantną* $D\eta$ formy η na B, nazywamy składową horyzontalną pochodnej $d\eta$.

Definicja. Formą krzywizny Ω spójności wyznaczonej przez ω nazywamy pochodną kowariantną $D\omega$.

Forma krzywizny jest zatem 2-formą na B o wartościach w algebrze Liego grupy G.

Zgodnie z podanymi poprzednio zasadami interpretacji składowych horyzontalnych form ρ-niezmienniczych, formie krzywizny odpowiada na X pole dwuliniowych (antysymetrycznych) przekształceń przestrzeni stycznych w przestrzeń endomorfizmów liniowych tych przestrzeni, a zatem pole tensorów typu (1,3). Jest to to samo pole tensorów, które wprowadziliśmy dla spójności afinicznej ∇ w części omawiającej klasyczną spójność afiniczną.

Twierdzenie. Drugie równanie strukturalne Cartana.

$$d\omega(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}[\omega(\alpha),\omega(\beta)] + \Omega(\alpha,\beta),$$

dla dowolnych pól stycznych (lub jedynie wektorów stycznych w tym samym punkcie) α,β. Nawias $[\,.\,,\,.]$ oznacza w tym wzorze operację "nawiasu Liego" w algebrze Liego $\mathcal{G}$.

Dowód. Ponieważ każdy wektor styczny (a zatem i pole styczne) daje się przedstawić jednoznacznie jako suma wektora horyzontalnego (pola horyzontalnego) oraz wektora wertykalnego (pola wertykalnego), zatem wystarczy dla dowodu rozpatrzyć trzy następujące przypadki:

1. α, β są horyzontalne
2. α, β są wertykalne
3. α, jest horyzontalne, a β wertykalne

Twierdzenie udowodnimy jedynie w przypadku drugim i trzecim. Tylko trzeci przypadek jest nieco trudniejszy.

A. Niech α,β będą wektorami wertykalnymi stycznymi w pewnym punkcie p do rozmaitości B. Można je traktować jako wektory z algebry Liego $\mathcal{G}$ i rozpatrzeć wyznaczone przez nie pola styczne $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}$. Wówczas

$$\widetilde{\alpha}(p) = \alpha,\ \widetilde{\beta}(p) = \beta.$$

Rozważmy wartości lewej i prawej strony równania Cartana w punkcie p dla tych dwóch pól. Prawa strona jest równa:

$$-\frac{1}{2}[\omega(\alpha),\omega(\beta)] + \Omega(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}[\alpha,\beta] + 0,$$

bo ω przyjmuje na polach $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}$ stałe wartości α,β oraz Ω jest równa 0 na wektorach wertykalnych. Natomiast dla lewej strony mamy

$$d\omega(\alpha,\beta) = d\omega(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})(p) =$$

$$\frac{1}{2}(\partial_\alpha\omega(\widetilde{\beta})(p) - \partial_\beta\omega(\widetilde{\alpha})(p) - \omega([\alpha,\beta])) = -\frac{1}{2}\omega([\alpha,\beta]) = -\frac{1}{2}[\alpha,\beta],$$

bo $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\alpha}$ mają stałe wartości równe odpowiednio α, β, zatem ich pochodne

$$\partial_\alpha \omega(\widetilde{\beta}), \partial_\beta \omega(\widetilde{\alpha})$$

są równe 0 oraz ω jest identycznością na wektorze wertykalnym $[\alpha, \beta]$. Skorzystaliśmy też z równości

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}](p) = [\alpha, \beta].$$

Równość ta wynika stąd, że można założyć iż $X = U \times G$ (z działaniem G na G z prawej strony). Wtedy pola $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ po ograniczeniu do każdego włókna $\{u\} \times G \simeq G$ są lewostronnie niezmienicze. Wobec tego

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}] = [\widetilde{\alpha, \beta}].$$

A zatem

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}](p) = [\widetilde{\alpha, \beta}](p) = [\alpha, \beta].$$

W przypadku trzecim, niech α^* bedzie polem horyzontalnym (w przypadku gdy α jest wektorem przedłużamy go do pola). Rozważmy pole $\widetilde{\beta}$ na B wyznaczone przez $\beta(p) \in \mathcal{G}$ (w przypadku gdy β jest wektorem bierzemy pole wyznaczone przez ten wektor). Wykażemy, że pole $[\alpha^*, \widetilde{\beta}]$ jest horyzontalne. Pole $\widetilde{\beta}$ wyznacza lokalne działanie τ grupy R^+ na X, a zatem możemy dla każdego pola stycznego γ rozpatrywać jego przesunięcie $\tau(t)_*\gamma$ określone przez $d\tau(t)$, to znaczy

$$((\tau(t)_*\gamma)(x))(f) = ((\gamma f)(\tau(-t)x)(f \circ \tau(t)).$$

Z Lematu poniżej mamy

$$[\alpha^*, \widetilde{\beta}] = -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\tau(t)(\alpha^*) - \alpha^*).$$

Ponieważ pole α^* jest horyzontalne, zatem i $(\tau(t)_*(\alpha^*)$ jest horyzontalne. Wobec tego pole $[\alpha^*, \widetilde{\beta}]$ jest też horyzontalne. Stąd otrzymujemy, że w punkcie $p \in B$

$$2d\omega(\alpha^*, \tilde{\beta}) = \partial_\alpha(\omega(\tilde{\beta})) - \partial_\beta(\omega(\alpha^*)) - \omega([\alpha^*, \tilde{\beta}]) = -\omega([\alpha^*, \tilde{\beta}]) = 0$$

i to kończy dowód.

Skorzystaliśmy wyżej z następującego Lematu podającego geometryczną interpretację nawiasu Liego.

Lemat. *Niech α, β będą polami stycznymi na rozmaitości X. Niech $\phi(t) : X \to X$ będzie lokalnym działaniem R^+ generowanym przez α. Wtedy*

$$[\alpha, \beta] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((\phi(t)_* \beta) - \beta)).$$

Dowód Lematu. Przez $\phi(t)_*$ oznaczyliśmy wyżej odwzorowania pól stycznych wyznaczone przez $\phi(t) : X \to X$. Jednakże niżej będziemy zwykle gwiazdkę pomijać. Udowodnimy, że dla każdej rzeczywistej funkcji f wartości operatorów wyznaczonych przez lewą i przez prawą stronę dowodzonej równości są identyczne. Niech $x \in X$. Zauważmy, że

$$((\phi(t)_* \beta) f)(x) = (\beta(\phi(-t)x)(f \circ \phi(t)).$$

Mamy zatem

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((\phi(t)\beta) - \beta))(f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((\phi(t))(\beta)(f)(x) - (\beta f)(x)) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\beta))(\phi(t)(x))(f \circ \phi(t)) - (\beta f)(x)).$$

Rozważmy funkcję

$$f \circ \phi(t)$$

jako funkcję zmiennej rzeczywistej t oraz $x \in X$. Funkcję tę można przedstawić w postaci

$$f(x) + t g_t(x),$$

gdzie g_t jest taką funkcją, że

$$g_0(x) = (\partial_\alpha f)(x).$$

Dowód tego faktu opiera się na następującej uwadze: *jeśli $h : I \times Y \to R$, to*

$$h(t, Y) = h(0, y) + t \int_0^1 \frac{dh}{dt}(ts, x) ds.$$

Korzystając z tego przedstawienia funkcji $f \circ \phi(t)$ mamy dalej:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\beta))(\phi(-t)(x))(f\circ\phi(t))-(\beta(x)f)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(((\beta(\phi(-t)x)(f+tg_t)-(\beta(x)f)))) =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(((\beta(\phi(-t)x)(f) - \beta(\phi(-t)x)(tg_t) - \beta(x)(f)) =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\beta(\phi(-t)x)(f) - \beta(x)(f))) - \lim_{t\to 0}\beta(\phi(-t)x)(g_t) =$$

$$(\alpha\circ\beta)(f))(x) - \beta(x)g_0 = (\alpha\circ\beta)(f))(x) - \beta\circ\alpha(f)(x),$$

co kończy dowód lematu.

Niech $X \times G$ będzie G-wiązką główną trywialną. Spójność na tej wiązce zadaną przez dystrybucję $D(x,g) = T_{(x,g),(X\times\{g\})}$ nazywamy *płaską*. Spójność na dowolnej wiązce nazywana jest *lokalnie płaską,* jeśli lokalnie jest izomorficzna ze spójnością płaską.

Łatwo udowodnić następujący:

Fakt. *Spójność jest lokalnie płaska wtedy i tylko wtedy gdy dystrybucja, która tę spójność wyznacza jest całkowalna.*

Trudniej następujące:

Twierdzenie. *Spójność jest lokalnie płaska wtedy i tylko wtedy gdy jej forma krzywizny Ω równa jest 0.*

Dowód. Załóżmy, że $\Omega = 0$. Z równania strukturalnego Cartana otrzymujemy

$$d\omega(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}[\omega(\alpha),\omega(\beta)],$$

dla dowolnych stycznych pól α, β określonych na rozważanej wiązce głównej. Załóżmy, że te pola są horyzontalne (tj., że ich wartości należą do dystrybucji wyznaczającej spójność). Wtedy

$$\omega(\alpha) = 0, \omega(\beta) = 0,$$

a zatem

$$[\omega(\alpha),\omega(\beta)] = 0$$

i stąd $d\omega(\alpha,\beta) = 0$. Ponieważ

$$d\omega(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\omega(\beta) - \partial_\beta\omega(\alpha) - \omega([\alpha,\beta]),$$

zatem $\omega([\alpha, \beta]) = 0$. A to oznacza, że pole $[\alpha, \beta]$ jest horyzontalne. Z twierdzenia Frobeniusa wynika zatem, że dystrybucja określająca spójność jest całkowalna. Dowód implikacji w drugą stronę jest łatwy.

Dla prostoty drugie równanie strukturalne Cartana zapisuje się w postaci

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega.$$

Jeśli $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$ jest bazą algebry $\mathcal{G}$,

$$[\epsilon_i, \epsilon_j] = \sum_k c_{ij}^k \epsilon_k,$$

$$\omega = \sum_k \omega^k \epsilon_k,$$

$$\Omega = \sum_k \Omega^k \epsilon_k,$$

to równanie strukturalne można zapisać jako układ równań:

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}^k \omega^j \wedge \omega^i + \Omega^k.$$

Twierdzenie. TOŻSAMOŚĆ BIANCHI.

$$D\Omega = 0$$

DOWÓD. Wystarczy pokazać, że

$$d\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

dla każdych horyzontalnych wektorów stycznych do B w punkcie p. Weźmy pochodną d obu stron równania strukturalnego w formie zapisanej powyżej. Po lewej stronie otrzymamy 0$= dd(\omega^k)$. Po prawej zaś

$$-\frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}^k d\omega^j \wedge \omega^i + \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}^k \omega^j \wedge d\omega^i + d\Omega^k.$$

Ponieważ ω przyjmuje na wektorach horyzontalnych wartość 0, zatem otrzymujemy

$$d\Omega^k(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

co kończy dowód.

28 Forma torsji

Rozważmy teraz sytuację, w której dana jest $Gl(n, R)$-spójność na wiązce baz $\mathcal{B}$ wiązki stycznej na n-wymiarowej rozmaitości X.

Definicja. Formę $D\theta$ nazywamy *formą torsji* danej spójności i oznaczamy przez Θ.

Twierdzenie. PIERWSZE RÓWNANIE STRUKTURALNE CARTANA. *Niech $p \in B$ oraz $\alpha, \beta \in T_{p,B}$. Wtedy*

$$d\theta(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}(\omega(\alpha)\theta(\beta) - \omega(\beta)\theta(\alpha)) + \Theta(\alpha, \beta)).$$

DOWÓD. podobnie jak w przypadku drugiego równania strukturalnego Cartana polega na rozważeniu trzech przypadków.

Zwykło się zapisywać to równanie Cartana w postaci:

$$d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta.$$

Biorąc pochodną zewnętrzną obu stron powyższego równania strukturalnego otrzymujemy nową (zwaną pierwszą) tożsamość Bianchi:

$$D\Theta = \Omega \wedge \theta,$$

to znaczy

$$3D\Theta(X, Y, Z) = \Omega(X, Y)\theta(Z) + \Omega(Y, Z)\theta(X) + \Omega(Z, X)\theta(Y),$$

dla stycznych wektorów X, Y, Z.

Wiemy już, że jeśli forma krzywizny jest zerowa, to koneksja jest lokalnie płaska. Uzupełnimy to twierdzenie dowodząc

Twierdzenie. *Jeśli formy torsji i krzywizny spójności afinicznej są zerowe, to dla każdego punktu na pewnym jego otoczeniu istnieje taki układ współrzędnych $x \longmapsto (x_1(x), ..., x_n(x))$, że pole bazowe $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ jest równoległe ze względu na przesunięcia po dowolnej krzywej.*

DOWÓD. Jeśli krzywizna jest zerowa, to jak już wiemy spójność jest lokalnie płaska, a zatem istnieje równoległy bazowy układ pól stycznych $X_1, ..., X_n$. Z Analizy wiadomo, że taki układ jest postaci $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ wtedy i tylko wtedy gdy $[X_i, X_j] = 0$, dla $i, j = 1, ..., n$. Ponieważ

$$0 = T(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j]$$

oraz

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i = 0,$$

bo pola $X_1, ..., X_n$ są równoległe, wobec tego otrzymujemy stąd żądaną równość

$$[X_i, X_j] = 0.$$

W przypadku gdy rozpatrywana spójność jest spójnością Levi-Civita na pewnej rozmaitości riemannowskiej, wynika stąd, że jeśli tensor krzywizny jest zerowy, to ta rozmaitość jest lokalnie płaska, to znaczy lokalnie izomorficzna z podzbiorami przestrzeni euklidesowej.

29 Dowód zaległego Lematu

Dla dowodu tego lematu poczynimy najpierw pewne przygotowania.

Niech U będzie normalnym otoczeniem punktu p riemannowskiej rozmaitości X. Wprowadźmy na U normalny układ współrzędnych $x \mapsto (x^1, ..., x^n)$ wyznaczony przez ortonormalny układ współrzędnych na przestrzeni stycznej $T_{p,X}$. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie układem pól stycznych powstałych przez przesunięcia wektorów $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n} \in T_{p,X}$ wzdłuż geodezyjnych przechodzących przez punkt p. Ten układ pól wyznacza w każdym punkcie $x \in X$ bazę ortonormalną w przestrzeni stycznej. Niech $\theta = (\theta^1, ..., \theta^n)$ będzie układem dualnym form i niech $\omega = (\omega_k^j)$ będzie formą krzywizny. Zauważmy od razu, że ponieważ układ $X_1, ..., X_n$ jest ortonormalny, zatem macierz (ω_k^j) jest antysymetryczna. (Będzie o tym mowa przy dowodzie jednej z własności symetrii tensora krzywizny). Wprowadźmy teraz na $U \setminus \{p\}$ biegunowy układ współrzędnych

$$x \mapsto (p^1, ..., p^n; t),$$

gdzie $x^1 = p^1 t, ..., x^n = p^n t$; $\sum\limits_i (p^i)^2 = 1$. Formy θ^i oraz ω_k^j są liniowymi kombinacjami form $dt, dp^1, ..., dp^n$. W dalszym ciągu korzystać będziemy z faktu, że w takim przedstawieniu dowolnej formy ϕ nie występuje składnik z dt, o ile $\phi(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$. Wynika to stąd, że

$$dp^i(\frac{\partial}{\partial t}) = (\frac{dx^i - p^i dt}{t})(\frac{\partial}{\partial t}) =$$

$$(\frac{dx^i - p^i dt}{t})(x^1\frac{\partial}{\partial x^1}) + ... + x^n\frac{\partial}{\partial x^n t}) =$$

$$(\frac{dx^i - p^i(\sum_j \frac{x^j}{t} dx^i)}{t})(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + x^n\frac{\partial}{\partial x^n t}) = \sum_i (x^i - p^i \sum_j x^j \frac{x^j}{t}) = x^i - p^i t = 0.$$

Przedstawmy θ^i jako taką kombinację i zapiszmy ją w postaci $\theta^i = f_i dt + \phi^i$, gdzie f_i jest pewną funkcją, a forma ϕ_i jest już tylko kombinacją form dp^j. Wtedy $f_i = p^i$. Istotnie rozpatrzmy $\theta^i - p^i dt$ i postarajmy się wykazać, że ta różnica w swym przedstawieniu jako kombinację liniowa form $dt, dp^1, ..., dp^n$ nie zawiera formy dt, a do tego wystarcza pokazać, że

$$(\theta^i - p^i dt)(\frac{\partial}{\partial t}) = 0.$$

Ustalmy $(p^1, ..., p^n)$ i rozpatrujmy krzywą $t \mapsto (p^1, ..., p^n; t)$. Jest to geodezyjna o wektorze stycznym $\frac{\partial}{\partial t}$. Stąd wartość θ, jest na wektorach $\frac{\partial}{\partial t}$ wzdłuż tej krzywej stała. Istotnie wartości θ na $\frac{\partial}{\partial t}$ to współrzędne $\frac{\partial}{\partial t}$ w układzie bazowym $X_1, .., X_n$, a ten układ jest, z założenia równoległy wzdłuż tej geodezyjnej. W punkcie p jednak mamy w przestrzeni stycznej $T_{p,X}$ bazę

$$X_1(p) = \frac{\partial}{\partial x^1}(p), ..., X_n(p) = \frac{\partial}{\partial x^n}(p)$$

i wektor styczny do geodezyjnej w tym punkcie ma postać

$$p^1\frac{\partial}{\partial x^1}(p) + ... + p^n\frac{\partial}{\partial x^n}(p).$$

Wobec tego wzdłuż tej krzywej stale $\theta(\frac{\partial}{\partial t}) = (p^1, ..., p^n)$. Ponieważ $dt(\frac{\partial}{\partial t}) = 1$ zatem istotnie $\theta^i - p^i dt$ nie zawiera już w swym przedstawieniu składnika z dt.

Teraz chcemy udowodnić, że ω^j_k nie zawiera składnika z dt. Wynika to stąd, że rozpatrując $\omega = (\omega^j_k)$ jako formę spójności na wiązce O_X baz ortonormalnych przestrzeni stycznych, będziemy z definicji wiedzieć, że ω jest równa zero na wektorach horyzontalnych. A takimi wektorami są wektory styczne do krzywej określone przez przyporządkowanie parametrowi t bazy wyznaczonej przez pola $X_1, ..., X_n$ w punkcie $(p^1, ..., p^n; t)$. Obrazem tego stycznego wektora przy przekształcenia $O_X \to X$ jest $\frac{\partial}{\partial t}$ i stąd $\omega(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$, gdzie tutaj ω jest już rozpatrywana na X.

Ponieważ formy ϕ^i, ω_k^j nie zawierają składnika z dt zatem są równe zero na wektorach $\frac{\partial}{\partial t}$, te wektory można przesunąć do $T_{p,X}$ i tam wypełniają one już całą przestrzeń. Wynika stąd, że $\omega_k^j(p) = 0$ oraz formę ϕ^i można przedłużyć na punkt p kładąc tam jej wartość równą zero.

Wreszcie (gratuluję Czytelnikowi, który dotrwał do tego miejsca) z równania strukturalnego (tutaj torsja jest równa zero)

$$d\theta^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j$$

otrzymujemy

$$d(p^i dt + \phi^i) = -\sum_j \omega_j^i \wedge (p^i dt + \phi^i).$$

A stąd

$$d\phi^i = -(dp^i + \sum_j \omega_j^i p^j) \wedge dt + \Lambda,$$

gdzie Λ nie zawiera dt. Teraz już jesteśmy przygotowani do dowodu lematu będącego naszym celem. Powtórzmy jeszcze jego sformułowanie.

Lemat. *Forma metryczna g na otoczeniu U punktu p równa jest*

$$(dt)^2 + \sum_i (\phi^i)^2.$$

Dowód. Ponieważ układ $X_1, ..., X_n$ składa się z ortonormalnych pól stycznych, zatem

$$g = \sum_i (\theta^i)^2 = \sum_i (p^i dt + \phi^i)^2 =$$

$$\sum_i (p^i)^2 (dt)^2 + \sum_i (\phi^i)^2 + 2p^i dt \phi^i.$$

Należy zatem wykazać, że

$$\sum_i p^i dt \phi^i = 0.$$

Ponieważ w punkcie p mamy, że ϕ^i równa się zero, zatem w tym punkcie spełniona jest równość $\sum_i p^i \phi^i = 0$. Wystarczy zatem wykazać, że $\sum_i p^i \phi^i$ nie zależy od zmiennej t, a do tego wystarczy wykazać, że $d(\sum_i p^i \phi^i)$ nie zawiera składnika z dt. Z podanych, przed sformułowaniem lematu, wzorów otrzymujemy

$$d(\sum_i p^i \phi^i) = \sum_i dp^i \wedge \phi^i + \sum_i p^i d\phi^i =$$

$$-\sum_i p^i(dp^i + \sum_j \omega^i_j p^j) + \Lambda_1,$$

gdzie Λ_1 nie zawiera dt. Ponieważ $\sum_i (p^i)^2 = 1$, zatem $\sum_i p^i dp^i = 0$. Ponadto $\sum_{i,j} p^i \omega^i_j p^j = 0$, bo macierz (ω^i_j) jest antysymetryczna. To już kończy dowód.

30 Spójności afiniczne na grupie.

W tym miejscu warto podać parę informacji na ten spójności afinicznych na grupach Liego.

Spójność afiniczną na grupie Liego G nazywamy lewostronnie niezmienniczą, gdy nie ulega zmianie przy przesunięciach lewostronnych l_g, $g \in G$. Podobnie określamy pojęcie prawostronnie niezmienniczych spójności. Przykładem lewostronnie niezmienniczej spójności jest spójność Levi-Civita lewostronnie niezmienniczej struktury riemannowskiej na G. Każda lewostronnie niezmiennicza spójność na G wyznacza geodezyjne, które przy lewostronnych przesunięciach przechodzą znowu na geodezyjne.

Każdy wektor w przestrzeni stycznej $T_{e,G}$ wyznacza lewoniezmiennicze pole styczne na G. Pochodna $\nabla_X Y$, wyznaczona przez lewoniezmienniczą spójność, takich dwóch pól jest też lewoniezmienniczym polem. Biorąc wartości tych pól w e otrzymujemy pewne dwuliniowe przekształcenie $\alpha : T_{e,G} \times T_{e,G} \to T_{e,G}$. Łatwo jest wykazać, że i odwrotnie każde takie dwuliniowe przekształcenie wyznacza lewoniezmienniczą spójność na G. Jeśli $\alpha(X, X) = 0$, dla każdego wektora stycznego, to można wykazać, że geodezyjna przechodząca przez punkt $e \in G$ jest (po jej maksymalnym przedłużeniu) podgrupą. Wobec tego w tym przypadku przekształcenia wykładnicze $T_{e,G} \to G$ określone w sensie teorii grup Liego i w sensie rozmaitości ze spójnością pokrywają się. Widać też, że dla wszystkich spójności lewostronnie niezmienniczych spełniających podany warunek $\alpha(X, X) = 0$ otrzymamy takie same geodezyjne (lewostronne przesuniecia jedno-parametrowych grup $R^+ \to G$). Narzucającymi się przykładami takich przekształceń są :

$$\alpha(X, Y) = 0,$$

$$\alpha(X, Y) = [X, Y],$$

$$\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y],$$

dla każdych wektorów stycznych $X, Y \in T_{e,G}$. $[.,.]$ oznacza tu operację mnożenia Liego w $T_{e,G}$.

Można na to spojrzeć nieco inaczej. W tym rozpatrywanym teraz przypadku gdy rozpatrywana rozmaitość jest grupą Liego, wiązka styczna jest trywialna $T_X \approx R^n \times X$. Taką trywializację można uzyskać przesuwając lewostronnie ustaloną bazę w $T_{e,G}$ do punktów $g \in G$ przy pomocy dg. Trywializacja ta wyznacza pewną spójność na G. Jest to spójność płaska, jej tensor krzywizny jest zerowy. Natomiast dla tensora torsji otrzymamy $T(X_1, X_2) = [X_1, X_2]$, dla niezmienniczych pól stycznych X_1, X_2.

Można jednak postąpić inaczej i wziąć spójność Levi-Civita pewnej lewo-niezmienniczej struktury riemannowskiej na G. W tym przypadku tensor torsji jest zerowy. Natomiast dla tensora krzywizny otrzymamy

$$R(X_1, X_2)(X_3) = \frac{1}{4}[[X_1, X_2], X_3],$$

dla niezmienniczych pól X_1, X_2, X_3. W przypadku gdy grupa G jest abelowa, krzywizna i torsja tych wszystkich spójności są równe zero.

31 Redukcja wiązek i spójności.

Niech G_1, G będą grupami Liego, niech $\mathcal{B}_1$ będzie G_1-wiązką główną nad X. Niech $\psi : G_1 \to G$ będzie homomorfizmem grup Liego. Wówczas nad X można jednoznacznie wyznaczyć G-wiązkę $\mathcal{B}$ oraz przekształcenie $\Psi : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}$ indukowane przez ψ. W tym celu wystarczy na przykład wziąć jakikolwiek 1-kocykl $\{\gamma_{i,}\}$ opisujący $\mathcal{B}_1$ i rozważyć G-wiązkę główną $\{\mathcal{B}\}$ odpowiadającą 1-kocyklowi $\{\psi(\gamma_{ij})\}$.

Okazuje się, że dana spójność D_1 na $\mathcal{B}_1$ wyznacza w tej sytuacji jedyną taką spójność D na $\mathcal{B}$, że Ψ przekształca horyzontalne przestrzenie spójności D_1 w $\mathcal{B}_1$ na horyzontalne przestrzenie D w $\mathcal{B}$. Istotnie, jako dystrybucję D na B trzeba wziąć, dla $p \in B$, jakiekolwiek takie $g \in G$, że $gp \in \Psi(B_1)$, $gp = \Psi(p_1)$ i jako przestrzeń $D(p)$ w punkcie p trzeba wziąć $dg(d\Psi(p_1)(D_1(p_1)))$.

Należy tu sprawdzić niezależność konstrukcji od dokonanych wyborów.

Jeśli ω_1 była formą spójności na $\mathcal{B}_1$, a ω formą skonstruowanej spójności na B, to

$$\Psi^*(\omega) = d_\psi(\omega_1),$$

gdzie Ψ^* jest operacją cofnięcia form indukowaną przez Ψ, a d_ψ oznacza przekształcenie algebr Liego $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}$ wyznaczone przez ψ.

Podobnie

$$\Psi^*(\Omega) = d\psi(\Omega_1).$$

W przypadku gdy homomorfizm $\psi : G_1 \to G$ jest immersją, mówimy, że G_1-wiązka $\mathcal{B}_1$ powstaje przez redukcję G-wiązki $\mathcal{B}$, a spójność D *redukuje się do spójności* D_1.

Podobne pojęcia można wprowadzić dla wiązek wektorowych i określonych na nich spójności. Jeśli $\mathcal{W} = \{W \to X\}$ jest wiązką wektorową określoną przy pomocy kocyklu $\{\gamma_{ij}\}$ o wartościach w $G_1 \subset Gl(n, R)$, to każda reprezentacja $\psi : G_1 \to G \subset Gl(m, R)$ wyznacza kocykl $(\{\psi(\gamma_{ij})\}$, a on wyznacza pewną wiązkę oznaczaną przez $\psi(\mathcal{W})$. W tej sytuacji mówimy że wiązka $\psi(\mathcal{W})$ jest indukowana przez ψ z wiązki $\mathcal{W}$ oraz, że wiązka $\mathcal{W})$ powstaje przez ψ-redukcję z wiązki $\psi(\mathcal{W})$. W szczególnym przypadku gdy wiązka wektorowa może być opisana przez kocykl o wartościach w podgrupie $G \subset Gl(n, R)$, wówczas wówczas mówimy że grupa strukturalna wiązki może być zredukowana do G.

Załóżmy, że X jest n-wymiarową rozmaitością riemannowską. Wówczas wiązka styczna dopuszcza lokalną trywializację wskazaną przez wybór ortonormalnych pól bazowych. Wyznaczony przez takie trywializacje kocykl będzie miał wartosści w $O(n) \subset Gl(n, R)$, gdzie przez $O(n)$ oznaczamy podgrupę w $Gl(n, R)$ złożoną z macierzy ortogonalnych. Wobec tego struktura Riemanna wskazuje na pewną redukcję grup stukturalnej wwiązki stycznnej do podgrupy $O(n) \subset Gl(n, R)$. Możemy, też w rozpatrywanym teraz przypadku rozmaitości riemannowskiej, w wiązce baz $\mathcal{B}_T$ rozważyć jej podzbiór złożony z baz ortonormalnych. Oznaczmy go przez $\mathcal{O}_T$. Otrzymamy w ten sposób pewną $O(n)$-wiązkę główną.

Wprowadzenie struktury rozmaitości riemannowskiej pozwala na określenie spójności Levi-Civita. Przesunięcia równoległe określone przez tą spójność zachowują iloczyn skalarny, wobec tego okrelają spójność afiniczną w wiązce $\mathcal{O}_T$. Spójność ta po sprowadzeniu jej do bazy wyznacza wyjściową spójność Levi-Civita. Wynika stąd, że do badania spójności Levi-Civita możemy stosować pojęcia i aparat wprowadzony poprzednio do rozważania sójności w wiązkach głównych. Chodzi tu na przykład o to, że spójność ta jest wyznaczona przez formę spójności określoną na $\mathcal{O}_T$ o wartościach w algebrze Liego grupy $O(n)$, a zatem w algebrze Liego złożonej z antysymetrycznych macierzy.

32 Tensor krzywizny Riemanna.

Spójność Levi-Civita na rozmaitości riemannowskiej określa swoje pola tensorów torsji i krzywizny. Pole tensorów torsji jest zerowe. Pole tensorów krzywizny ma szereg bardzo ważnych własności i podstawowe z nich będą omówione w tym paragrafie. Przypomnijmy, że w ujęciu klasycznym to pole jest określone wzorem

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

Natomiast w wersji bardziej współczesnej jest sprowadzoną do rozmaitości X formą krzywizny Ω określoną jako pochodna kowariantna $D(\omega)$ formy krzywizny ω. W tym ujęciu jest to zatem ad-niezminnicza 2-forma na $\mathcal{B}$ o wartościach w algebrze Liego złożonej z wszystkich $(n \times n)$- macierzy, lub po redukcji do grupy ortogonalnej - jest to 2-forma na $\mathcal{O}_T$ o wartościach w algebrze Liego złożonej z wszystkich antysymetrycznych $(n \times n)$- macierzy. Wiemy już, że ta forma wyznacza na rozmaitości X pole tensorowe. Jest ono identyczne z określonym wcześniej tensorem krzywizny. Dowód tego faktu można znaleźć na przykład w książce Kobayashi, Nomizu (rozdział III, twierdzenie 5.1.), o której już poprzednio wspominaliśmy.

Tensor krzywizny jest typu (1,3), wygodniej jednak będzie go interpretować jako tensor typu (0,4) określony jako

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1).$$

Pole g możemy interpretować jako pole tensorowe przekształceń przestrzeni stycznej w przestrzeń kostyczną i przy tej interpretacji

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2)(X_1) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1)).$$

Temu tensorowi R przysługują następujące własności symetrii:

1. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_2, X_1, X_3, X_4)$,
2. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_4, X_3)$,
3. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) = 0.$

Pierwsza z tych równości jest konsekewencją faktu, że tensor ten jest wyznaczony przez 2-formę na $\mathcal{O}_T$ o wartościach w algebrze macierzy antysymetrycznych, a druga, faktu, że jest wyznaczony przez 2-formę. Równość trzecia może być wyprowadzona z pierwszej tożsamości Bianchi

$$D\Theta = \Omega \wedge \theta,$$

gdyż tej tożsamości można nadać też formę

$$\mathcal{S}\{R(X,Y),Z)\} = \mathcal{S}\{T(T(X,Y),Z) + \nabla_X T(X,Z)\},$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest cykliczną sumą to znaczy $\mathcal{S}\{W(X,Y,Z)\} = W(X,Y,Z) + W(Y,Z,X) + W(Z,X,Y)$. Wyprowadzenie to można znaleźć na przykład w książce Kobayashi, Nomizu *Foundations of differential geometry* w rozdziale III, twierdzenie 5.3. Zresztą przecież mamy już (w paragrafie poświęconym torsji) pierwszą tożsamość Bianchi w postaci

$$3D\Theta(X,Y,Z) = \Omega(X,Y)\theta(Z) + \Omega(Y,Z)\theta(X) + \Omega(Z,X)\theta(Y),$$

a to daje po przejściu od Ω do R tę równość, na którą przed chwilą się powoływaliśmy. Wobec tego jeśli $T = 0$ (co ma miejsce dla spójności Levi-Civita), to otrzymujemy

$$\mathcal{S}\{R(X,Y),Z)\} = 0,$$

a to jest właśnie nasza trzecia równość. Oczywiście te własności mogą też być wyprowadzone z klasycznej definicji tensora krzywizny (po wprowadzeniu jako argumentów wybranych bazowych pól oraz wyrażeniu wartości operatorów ∇ na tych polach przez symbole Christoffela oraz współrzędne iloczynów skalarnych $g_{i,j}$ rozpatrywanej struktury riemannowskiej).

Konsekwencją formalną powyższych trzech własności jest równość:

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4) = R(X_3,X_4,X_1,X_2).$$

Istotnie oznaczmy przez $S(X_1,X_2,X_3,X_4)$ lewą stronę trzeciej równości. Łatwo sprawdzić, że

$$0 = S(X_1,X_2,X_3,X_4) - S(X_2,X_3,X_4,X_1) - S(X_3,X_4,X_1,X_2) + S(X_4,X_1,X_2,X_3) =$$

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_2,X_1,X_3,X_4) - R(X_3,X_4,X_1,X_2) + R(X_4,X_3,X_1,X_2).$$

Korzystając z dwóch pierwszych równości otrzymujemy stąd

$$2R(X_1, X_2, X_3, X_4) - 2R(X_3, X_4, X_1, X_2) = 0,$$

co kończy dowód.

Niech teraz P będzie płaszczyzną (to znaczy dwu wymiarową podprzestrzenią w przestrzeni stycznej $T_{x,X}$, gdzie $x \in X$. Wybierzmy w tej płaszczyźnie ortonormalną bazę α_1, α_2. Niech

$$K(P) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2).$$

Łatwy rachunek pokazuje, że $K(P)$ nie zależy od wyboru tej ortonormalnej bazy (a zależy tylko od P). Tę liczbę $K(P)$ nazywa się krzywizną sekcyjną rozmaitości riemannowskiej X w punkcie x i kierunku P. Można udowodnić, że ta krzywizna jest równa krzywiźnie Gaussa w punkcie x powierzchni otrzymanej jako obraz płaszczyzny P przy przekształceniu wykładniczym wziętym w punkcie x.

Jest rzeczą bardzo ważną, że tensor krzywizny jest wyznaczony jednoznacznie przez krzywizny sekcyjne wzięte we wszystkich punktach rozmaitości X we wszystkich kierunkach P. Udowodnimy to za chwilę. Wobec tego informacja zawarta w tensorze krzywizny to dokładnie zespół wszystkich wiadomości o krzywiznach Gaussa wszystkich geodezyjnych powierzchni zawartych w X. Przez geodezyjną podrozmaitość (w tym przypadku powierzchnię) zawartą w rozmaitości X rozumiemy tu taką podrozmaitość $Y \subset X$, że dla każdego $y \in Y, \alpha \in T_{y,Y}$, geodezyjna rozmaitości riemannowskiej X wyprowadzona z y w kierunku α zawarta jest w Y. Tensor krzywizny to wobec tego "zintegrowana" krzywizna Gaussa.

Twierdzenie. *Tensor krzywizny na rozmaitości Riemanna X jest wyznaczony jednoznacznie przez podanie krzywizn Gaussa we wszystkich punktach i kierunkach.*

Twierdzenie to wynika to z następujących dwóch lematów:

Lemat. *Wartość $R(X_1, X_2, X_1, X_2)$ tensora R spełniającego podane wyżej własności symetrii równa jest*

$$K(P)(\sqrt[2]{g(X_1, X_1) \cdot g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2}).$$

Warto tu przypomnieć, że $\sqrt[2]{g(X_1, X_1) \cdot g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2}$ to powierzchnia równoległoboku rozpiętego na wektorach X_1, X_2.

Dowód. Możemy założyć, że X_1, X_2 są liniowo niezależne, bo w przeciwnym przypadku obie strony dowodzonej równości równe są zero. Przy tym założeniu wektory dowodzona równość wynika z definicji $K(P)$ dla układu ortonormalnego

$$\{\frac{X_1}{g(X_1, X_1)}, \frac{1}{a}(g(X_1, X_1)X_2 - g(X_1, X_2)X_1)\},$$

gdzie $a = \sqrt[2]{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2}$.

Lemat. *Tensor R spełniający podane wyżej własności symetrii oraz równość*

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = 0,$$

dla wszystkich X_1, X_2, jest równy zero.

Dowód.

$$0 = R(X_1, X_2 + X_4, X_1, X_2 + X_4) = R(X_1, X_2, X_1, X_4) + R(X_1, X_4, X_1, X_2) =$$

$$2R(X_1, X_2, X_1, X_4).$$

Stąd

$$R(X_1, X_2, X_1, X_4) = 0$$

dla wszystkich wektorów X_1, X_2, X_4. Wobec tego

$$0 = R(X_1 + X_3, X_2, X_1 + X_3, X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_3, X_2, X_1, X_4).$$

Korzystając najpierw z czwartej równości, a potem z drugiej otrzymamy stąd dalej

$$0 = R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_4, X_3, X_2) = R(X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_1, X_4, X_2, X_3).$$

Wobec tego

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_1, X_4, X_2, X_3).$$

Podstawiając w miejsce X_2, X_3, X_4 wektory X_3, X_4, X_2 otrzymamy

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_1, X_3, X_4, X_2).$$

Oprócz tych dwóch mamy jeszcze trzecią oczywistą równość

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Dodajmy tstronami te trzy równości. Otrzymamy

$$3R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) + R(X_1, X_4, X_2, X_3).$$

Korzystając teraz z trzeciej równości otrzymujemy

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

co kończy dowód.

Niech teraz dla rozmaitości riemannowskiej X

$$R_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(X_1, X_3)g(X_2, X_4) - g(X_2, X_3)g(X_4, X_1).$$

Można sprawdzić, że R_1 spełnia pierwszą, drugą i trzecią równość (a zatem i równość czwartą). Ponadto dla ortonormalnego układu X_1, X_2 mamy

$$K_1(P) = R_1(X_1, X_2, X_1, X_2) = 1.$$

Stąd otrzymamy

Twierdzenie. *Jeśli na rozmaitości riemannowskiej X krzywizna sekcyjna jest we wszystkich punktach stała równa c, to $R = R_1$.*

Dowód wynika stąd, że $(R - cR_1)(X_1, X_2, X_1, X_2) = 0$, a wobec tego wystarczy skorzystać z poprzedniego Lematu, by wywnioskować, że

$$R - cR_1 = 0.$$

Rozmaitość riemannowską X nazywamy *rozmaitością o stałej krzywiźnie r,* gdy we wszystkich punktach i kierunkach krzywizny sekcyjne równe są r. Można rozważać rozmaitości riemannowskie, które mają tę własność, że w każdym punkcie wszystkie krzywizny sekcyjne są równe. Okazuje się (mówi o tym twierdzenie Schura), że taka rozmaitość musi już być rozmaitością o stałej krzywiźnie.

Następujące twierdzenie podaje przykłady rozmaitości o stałej krzywiźnie:

Twierdzenie. *Niech r będzie różną od zera liczbą rzeczywistą i niech $n > 1$. Rozpatrzmy w przestrzeni R^{n+1}, której punktom przypisywane są współrzędne $(x_1, ..., x_n, t)$ podzbiór X opisany równaniem:*

$$x_1^2 + ... + x_n^2 + rt^2 = r.$$

Ponad to niech w R^{n+1} ustalona będzie struktura pseudoriemannowska (to znaczy symetryczna niezdegenerowana, ale niekoniecznie dodatnio określona) zadana formą kwadratową $x_1^2 + ... + x_n^2 + rt^2$. Wówczas

1. *X jest n-wymiarową rozmaitością różniczkową, a ze strukturą indukowaną przez strukturę pseudoriemannowską na R^{n+1} jest rozmaitością riemannowską,*

2. *w przypadku gdy $r > 0$ rozmaitość X jest izometryczna ze sferą S^n o promieniu $\sqrt[2]{r}$ ze zwykłą strukturą metryczną,*

3. *w przypadku gdy $r < 0$ rozmaitość X jest sumą dwóch spójnych składowych homeomorficznych z R^n,*

4. *grupa pseudoortogonalnych przekształceń liniowych przestrzeni R^{n+1} zachowujących formę $x_1^2 + ... + x_n^2 + rt^2$ działa tranzytywnie jako grupa izometrii na X,*

5. *X jest rozmaitością jednospójną i zupełną,*

6. *X jest rozmaitością Riemanna o stałej sekcyjnej krzywiźnie r*

7. *podane przykłady rozmaitości X w przypadku $r > 0$ oraz składowych spójnych rozmaitości X, w przypadku $r < 0$, są z dokładnością do izometrii jedynymi przykładami zupełnych jednospójnych spójnych n-wymiarowych rozmaitości riemannowskich o stałej krzywiźnie r. W przypadky $r = 0$ jedynym takim przykładem jest przestrzeń euklidesowa.*

Ponad to w przypadku gdy $r < 0$, przekształcenie $R^{n+1} \to R^n$ dane wzorem $(x_1, ..., x_n, t) \mapsto (x_1/t, ..., x_n/t)$ wyznacza izometrię każdej składowej rozmaitości X na kulę $\{(y_1, ..., y_n); y_1^2 + ... + y_n^2 < -r\}$ z metryką daną wzorem

$$\frac{r\{(r + \sum_i y_i^2) \sum_i dy_i^2 - (\sum_i y_i dy_i)^2\}}{(r + \sum_i y_i^2)^2}.$$

Dowód punktów 1)-3) polega na prostym rachunkowym sprawdzeniu. Dowód punktu 4) opiera się na skorzystaniu z twierdzenia Witta, które mówi, że w przestrzeni liniowej z ustalonym dwuliniowym symetrycznym niezdegenerowanym funkcjonałem, każdy izomorfizm podprzestrzeni można rozszerzyć do automorfizmu całej przestrzeni. Przez izomorfizm (automorfizm) rozumiemy tu izomorficzne przekształcenie liniowe zachowujące ten ustalony funkcjonał.

Dowody własności 5) i 6) są dosyć skomplikowane. Dowód pozostałych części wymaga użycia metod wychodzących poza zakres tego wykładu.

Powyższe twierdzenie mówi między innymi, że każda n-wymiarowa, spójna, jednospójna i zupełna rozmaitość o stałej ujemnej krzywiźnie jest diffeomorficzna z R^n. Fakt ten wynika też z następującego ogólniejszego rezulatatu (udowodnionego przez Hadamarda i Cartana)

Twierdzenie. *Jeśli X jest n-wymiarową spójną, jednospójną, zupełną rozmaitością riemannowską, której krzywizny sekcyjne w każdym punkcie są niedodatnie, to X jest diffeomorficzna z R^n.*

Fakt ten jest zgodny z intuicją: jeśli w kierunku żadnej płaszczyzny rozmaitość nie ma dodatniej krzywizny Gaussa, to nie może się ona "zakrzywić i domknąć".

Jeśli X jest rozmaitością z afiniczną spójnością, to tensorowym polem Ricci'ego nazywamy pole S funkcjonałów dwuliniowych określone w następujący sposób:

$S(X,Y)$ równe jest śladowi przekształcenia, które wektorowi Z przyporządkowuje wektor $R(Z,X)Y$. W przypadku gdy rozpatrywana spójność jest spójnością Levi-Civita, a $Z_1, ..., Z_n$ bazą ortonormalną przestrzeni stycznej, wówczas

$$S(X,Y) = \sum_i g(R(Z_i,X)Y, Z_i) = \sum_i R(Z_i, Y, Z_i, X).$$

Korzystając z własności symetrii tensora krzywizny łatwo można wykazać, że

$$S(X,Y) = S(Y,X).$$

Tensor Ricci'ego można zatem uważać za uproszczenie tensora krzywizny, jest to przy tym jeszcze uproszczenie niosące ważne informacje o spójności afinicznej. Przykładem zastosowań tego pojęcia są następujące dwa twierdzenia, które podajemy bez dowodów:

Twierdzenie. *Jeśli X jest zwartą rozmaitością Riemanna o ujemnie określonych tensorach Ricciego, to grupa izometrii tej rozmaitości jest skończona.*

Twierdzenie. *Jeśli X jest zwartą rozmaitością Riemanna o zerowych tensorach Ricciego, to rozmaitość ta jest euklidesowym torusem, to znaczy jest postaci R^n/Z^n, gdzie R^n jest przestrzenią euklidesową, a Z^n kratą generowaną przez wektory jednostkowe.*

Rozmaitość Riemanna nazywa się *rozmaitością Einsteina*, gdy $S = \lambda g$, dla pewnej liczby rzeczywistej $\lambda \in R$. Trójwymiarowe rozmaitości Einsteina to dokładnie rozmaitości ze stałą krzywizną (twierdzenie Schouten'a-Struika). Dalszym uproszczeniem tensora krzywizny i jego uproszczenia - tensora krzywizny - jest *krzywizna skalarna*. Jest to ślad tensora Ricciego interpretowanego jako tensor typu (1,1), a zatem jako tensor przekształceń liniowych przestrzeni stycznych. Taka interpretacja jest możliwa, bo jeden ze wskaźników kowariantnych tensora Ricciego można dzięki iloczynowi skalarnemu g interpretować jako funkcjonał liniowy na przestrzeni stycznej. Po wprowadzeniu układu współrzędnych oznacza to, że w miejsce tensora Ricciego o współrzędnych $R_{i,j}$ rozważamy tensor o współrzędnych $\sum_k g^{i,k} R_{k,j}$. Skalarną krzywiznę można też równoważnie określić jako liczbę $\sum_i S(Z_i, Z_i)$, gdzie $\{Z_1, ..., Z_n\}$ jest dowolną ortonormalną bazą w przestrzeni stycznej. To określenie krzywizny skalarnej wymaga dowodu, że tak określona liczba nie zależy od wyboru ortonormalnej bazy.

33 Czasoprzestrzeń.

Tensor Ricci'ego odgrywa też ważną rolę w fizyce, a nazwa rozmaitości Einsteina wzięła się stąd, że w ogólnej teorii względności rozważa się czterowymiarowe rozmaitości ze strukturą pseudoriemannowską zadaną przez pole dwuliniowych niezdegenerowanych funkcjonałów sygnatury

$$(-,+,+,+),$$

lub równoważnie

$$(+,-,-,-),$$

co wolą fizycy, której tensor Ricciego S równa się zero.

Tego rodzaje czterowymiarowe rozmaitości pseudoriemannowskie są uważane za *(czaso)przestrzenie fizyczne.*

Równość zeru tensora Ricci'ego to, po wprowadzeniu układu współrzędnych $x \mapsto (t, x_1, ..., x_n)$, układ 16-tu cząstkowych równań różniczkowych (od czterech zmiennych (t, x_1, x_2, x_3)) nazywanych *równaniami Einsteina.*

Podstawowe problemy łączą się tu z przedłużaniami znalezionych rozwiązań lokalnych. Napotkane tu osobliwości interpretowane są jako *"czarne dziury"* w przestrzeni fizycznej.

Rozmieszczenie materii w przestrzeni fizycznej powoduje jej "zakrzywienie", to znaczy adekwatną zmianę struktury pseudoriemannowskiej. W tej sytuacji uwzględniające istniejącą w czasoprzestrzeni materię ogólniejsze równania Einsteina wiążą tensor struktury pseudoriemannowskiej (w tym jej tensor Ricci'ego S) z tensorem T, który opisuje rozkład materii (jej gęstość, napięcia) i jej ruch. Równania te mają postać

$$S - \frac{1}{2}rg = -\kappa T,$$

gdzie r jest krzywizną skalarną, a κ stała, nazywaną stałą grawitacyjną. W przypadku gdy $T = 0$, otrzymujemy z tego równania $S - rg = 0$, ale obliczając ślady prawej i lewej strony (tensory Ricciego i g interpretujemy jako typu (1,1)) otrzymamy

$$r - \frac{1}{2}r4 = 0,$$

a zatem $r = 0$ i $S = 0$, co jest identyczne z podanym wyżej równaniem przestrzeni bez materii.

Najbardziej znanymi przykładami czasoprzestrzeni są przestrzeń Minkowskiego oraz modele opisane przez Schwarzschilda. Przestrzeń Minkowskiego to $R^3 \times R^1$ z polem tensorowym g opisanym wzorem

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = -c^2 dtdt + \sum_{i=1}^{3} dx_i dx_i,$$

gdzie $c > 0$. W tym przykładzie tensor krzywizny jest równy zero (co można interpretować jako brak pola grawitacyjnego), przestrzeń jest płaska i geodezyjnie zupełna.

Model Schwarzschilda można opisać w następujący sposób. Weźmy rzeczywistą dodatnią liczbę μ i na rozmaitości $X = (2\mu, \infty) \times S^2 \times R^1$ wprowadźmy tensor g wzorem

$$(*) \quad g(r, s, t) = (1 - \frac{2\mu}{r})^{-1} drdr + r^2 v(s) - (1 - \frac{2\mu}{r}) dtdt,$$

gdzie $s \in S^2$ oraz $v(s)$ jest naturalnym metrycznym tensorem na S^2 otrzymanym z kanonicznego zanurzenia S^2 w przestrzeń euklidesową $E^3 \simeq R^3$. X jest podzbiorem otwartym w $R \times S^2 \times R$, ale nie można przedłużyć tensora g poza obręb rozmaitości X, gdyż g nie daje się przedłużyć na "horyzont" złożony z punktów, dla których $r = 2\mu$.Poza tym "horyzontem", po jego drugiej stronie, na rozmaitości $Y = (0, 2\mu) \times S^2 \times R^1$, wzór $(*)$ opisuje również strukturę pseudoriemannowską typu $(+, +, +, -)$ i okazuje się, że zarówno X jak i Y są czasoprzestrzeniami. X nazywa się *normalną czasoprzestrzenią Schwarzschilda*, a Y *czarną dziurą Schwarzschilda*. Odpowiada to zgodnie z interpretacją fizyczną, czasoprzestrzeni wytworzonej w przestrzeni wokół masy o symetrii kulistej S^2 w punkcie powstałym przez utożsamienie wszystkich punktów z $r = 0, t = 0$.

Zarówno sam Einstein jak i, do dzisiaj, jego następcy rozważają także taką ogólniejszą sytuację, w której czasoprzestrzeń fizyczna (bez grawitacji) to taka struktura pseudoriemannowska jak wyżej, ale z zastąpieniem równania Einsteina $S = 0$ przez równanie

$$S - \frac{1}{2} r g = \lambda g,$$

gdzie λ jest pewną stała kosmologiczną, a r krzywizną skalarną. W tym przypadku, już z równania tego wynika, że krzywizna skalarna jest funkcją stałą. Istotnie biorąc, jak wyżej, ślady otrzymamy $r - \frac{1}{2} 4r = 4\lambda$, a zatem r jest funkcją stale równą -4λ. W przypadku $\lambda \neq 0$, można interpretować te równania Einsteina jakby uwzględniały one istnienie pewnej materii nieobserwowalnej w inny sposób oraz rozmieszczonej jednorodnie i zakrzywiającej czasoprzestrzeń (bo tu $r = -4\lambda \neq 0$). Przykładem takiej czasoprzestrzeni jest *model Einsteina-de Sittera*. Można go opisać na przykład tak. Na rozmaitości $X = (0, \infty) \times R^3$ wprowadzamy tensor g wzorem

$$g(t, x_1, x_2, x_3) = t^{\frac{4}{3}} \sum_{i=1}^{3} dx_i dx_i) - dtdt.$$

Ten sam przykład można opisać inaczej i ten opis jest nam bliższy gdyż przypomina konstrukcje form przestrzennych - rozmaitości jednospoójnych zupełnych o stałej krzywiźnie. Należy wziąć przestrzeń R^5, a w niej płaską strukurę pseudoriemannowską wyznaczoną przez formę kwadratową

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2 - u^2,$$

a w niej hiperboloidę X opisaną wzorem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2 + au^2 = a,$$

gdzie $a < 0$. X ze strukturą indukowaną jest izometryczna z opisanym wyżej modelem Einsteina-de Sittera

Ogólne równania Einsteina dla czasoprzestrzeni z materią opisaną tensorem T mają postać

$$S - \frac{1}{2}rg = \lambda g - \kappa T,$$

tu jak poprzednio r jest krzywizną skalarną, ale w tym przypadku nie jest to i nie można oczekiwać już, że jest to stała (bo nierównomierny rozkład materii pociąga różny "stopień zakrzywienia" i zmienność krzywizny skalarnej w czasoprzestrzeni).

Tak proste ujęcie praw dotyczących czasoprzestrzeni odegrało bardzo dużą rolę w rozwoju tej teorii. Widać zatem olbrzymią rolę jaką w tym procesie odegrał język Geometrii różniczkowej.

Zadania

Pakiet I

1. Udowodnij, że rzeczywista przestrzeń rzutowa jest zwartą rozmaitością różniczkową. Czy zespolona przestrzeń rzutowa jest też zwarta? Postaraj się uogólnić te rezultaty na Grassmanniany.

   k oznacza niżej dowolne ciało, ale można przyjąć, że k jest ciałem liczb rzeczywistych R. V, V_i, $i = 1, 2, 3$ oznaczają skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad k.

2. Uzasadnij równoważność $V_1 \otimes V_2 \approx V_2 \otimes V_1$, $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \approx V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \approx V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Wystarczy szkic.

3. Udowodnij, że $V \otimes k^1 = V$.

4. Udowodnij, że

   $$Lin(V, V; V^*) = V^* \otimes V^* \otimes V^*,$$

   $$Lin(V^*, V; V) = V \otimes V^* \otimes V.$$

   Wystarczy szkic uzasadnienia.

5. Określ wariantność przestrzeni tensorowej

$$Lin((Lin(V;V), Lin(V;V)); Lin(V;V)).$$

   Podaj tylko odpowiedź.

6. Udowodnij, że $Lin(V, ..., V; V_1) = V^* \otimes ... \otimes V^* \otimes V_1$. Wystarczy szkic.

7. Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $k^n \to k^n$, a B - przekształcenia $k^m \to k^m$ w kanonicznych bazach tych przestrzeni. Opisz macierz iloczynu tensorowego tych przekształceń w bazie iloczynu tensorowego $k^n \otimes k^m$ wyznaczoej przez bazy kanoniczne. Macierz ta nazywa się iloczynem tensorowym macierzy A i B i oznacza przez $A \otimes B$.

8. Ponieważ $V^* \otimes V = End(V)$, zatem zwężenie $V \otimes V^* \to k$ wyznacza pewne przekształcenie liniowe $End(V) \to k$. Jaki jest wzór na to przekształcenie w terminach macierzy przekształceń?

9. Niech $\alpha_1, ..., \alpha_k$ oraz $\beta_1, ..., \beta_k$ będą liniowo niezależnymi wektorami w n-wymiarowej przestrzeni liniowej V. Udowodnij, że wektory

$$\alpha_1 \wedge, ..., \wedge \alpha_k, \;\; \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_k$$

   są niezerowe i że są proporcjonalne wtedy i tylko wtedy gdy rozpinają tę samą k-wymiarową podprzestrzeń w V. Wobec tego punkty $Grass(k, n)$ można traktować jako podzbiór przestrzeni rzutowej $Proj(\bigwedge^k V)$ (przez $Proj(W)$ oznaczamy przestrzeń rzutową, której punktami są jednowymiarowe podprzestrzenie w przestrzeni liniowej W).

10. Wektor z $\bigwedge^k V$ nazwijmy prostym gdy jest postaci $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_k$.

    a)Znajdź w $\bigwedge^2 V$, gdy $dimV > 3$ wektor, który nie jest prosty.

    b)** Wykaż, że wektor $w \in \bigwedge^2 V$ jest prosty wtedy i tylko wtedy gdy $w \wedge w = 0$.

11. Korzystając z poprzedniego zadania wykaż, że Grassmannian $Grass(2, 4)$ jest opisany jako podzbiór w $Proj(\bigwedge k^4)$ będący zbiorem zer pewnej formy kwadratowej określonej na $\bigwedge^2 V$.

12. Udowodnij, że pochodna zewnętrzna formy stopnia k-tego dana wzorem

$$(d\omega)(\psi_1, \ldots, \psi_{k+1}) = \frac{1}{k+1}(\sum_i (-1)^i \psi^i(\omega(\psi_1, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots, \psi_{k+1}))+$$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\psi_i, \psi_j], \psi_1, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots, \tilde{\psi}_j, \ldots, \psi_{k+1})),$$

jest

- $\mathcal{O}_X$- liniowa, a wobec tego określa pole tensorowe funkcjonałów $(k+1)$-liniowych,
- jest to pole funkcjonałów antysymetrycznych,
- w układzie współrzędnych

$$d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \ldots \wedge dx_{i_k},$$

- a dalej, ewentualnie korzystając z zapisu w układzie współrzędnych, że

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1}\omega_1 \wedge d(\omega_2),$$

- $d^2 = d \circ d = 0$.

13. Na podzbiorze otwartym powierzchni(to znaczy rozmaitości wymiaru 2) różniczkowej z układem współrzędnych forma stopnia jeden ma postać $f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, a zatem jest wyznaczona przez parę funkcji (f_1, f_2), natomiast forma stopnia dwa $f dx_1 \wedge dx_2$ przez jedną funkcję f. Różniczkowanie form przyporządkowuje zatem parze funkcji jedną funkcję. Napisz wzór na to przyporządkowanie i stwierdź, że jest to rotacja. Podobnie zinterpretuj diwergencję.

14. Znajdź grupy de Rhama dla S^1.

15. Niech α, β będą polami stycznymi na rozmatości X i niech f, g będą funkcjami rzeczywistymi na X. Udowodnij, że nawias Liego

$$[f\alpha, g\beta] = fg[\alpha, \beta] + f\alpha(g)\beta - g\beta(f)\alpha.$$

16. Niech w pewnym układzie współrzędnych $\alpha = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \beta = \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Udowodnij, że
$$[\alpha, \beta] = \sum (f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pakiet Ib

Z wykładu wiemy, że różniczkowanie form różniczkowych można określić na trzy równoważne sposoby. Nazwijmy je a) przez podanie wzoru w układzie współrzędnych, b)aksjomatycznie, c) przez podanie wzoru na wartości jako funkcjonału alternującego.

1. Wykaż, że a) nie zależy od układu współrzędnych .
2. Wykaż, że a) pociąga b).
3. Wykaż, że c) pociąga b).
4. Wykaż, że b) jednoznacznie wyznacza różniczkowanie.
5. Udowodnij, że nawias Liego dwóch pól stycznych σ, τ może by wyznaczony jako pochodna pola τ w kierunku ruchu wyznaczonego przez σ.

Pakiet II

1. Udowodnij, że na płaszczyźnie Łobaczewskiego określonej jako górna półpłaszczyzna $\{(x, y) \in R^2; y > 0\}$ z metryką Riemanna
$$(x, y) \mapsto \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$
geodyzyjnymi są odpowiednio sparametryzowane pół okręgi o środkach na osi x oraz półproste prostopadłe do tej osi. Znajdź grupę holonomii w ustalonym punkcie płaszczyzny Łobaczewskiego.

2. Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą łączną z jedynką nad ciałem liczb rzeczywistych. Niech A^* będzie grupą elementów odwracalnych w A. Udowodnić, że $A^* \subset A$ jest podrozmaitością i grupą Liego. Czy można podać jakąś interpretację jej algebry Liego?

3. Rozpatrzmy kwaterniony o normie 1. Tworzą one grupę Liego (dlaczego?). Jej rozmaitością różniczkową jest S^3 (naprawdę ?). Oznacza się ją przez $Spin(3)$. Znaleźć homomorfizm $Spin(3) \to SO(3)$ będący podwójnym nakryciem.

4. Niech dana będzie spójność afiniczna ∇. W zadanym układzie współrzędnych wyznaczmy dla niej symbole Christoffela Γ i dla nich określmy przesunięcie równoległe. Dalej rozpatrzmy spójność afiniczną ∇' wyznaczoną przez to równoległe przesunięcie. Sprawdź, że $\nabla' = \nabla$.

5. Znajdź wzór na zmianę symboli Christofella spójności afinicznej przy zmianie układu współrzędnych.

6. Udowodnij, że krzywizna jest polem tensorowym typu (1,3).

Pakiet IV (egzaminacyjny)

1. W pewnym otoczeniu U punktu p rozmaitości riemannowskiej X dany jest układ współrzędnych $x \mapsto (x_1, ..., x_n)$. W otoczeniu $\pi^{-1}(U)$ punktu $p' = (p, (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})) \in \mathcal{B}_T$ mamy wówczas układ współrzędnych, który punktowi $(x, (\alpha_1, ..., \alpha_n))$ przyporządkowuje współrzędne punktu $\pi(x) \in X$ oraz macierz współrzędnych $\alpha_1, ..., \alpha_n$ w bazie $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$. Wobec tego w każdej przestrzeni stycznej do $\mathcal{B}_T$ w dowolnym punkcie należącym do $\pi^{-1}(U)$ mamy wyznaczoną przez ten układ współrzędnych bazę i wyznaczony przez tę bazę układ współrzędnych. Napisz w tym układzie współrzędnych równanie dystrybucji odpowiadającej spójności Levi-Civita w przestrzeni stycznej $T_{p',\mathcal{B}_T}$.

2. Udowodnij pierwsze równanie strukturalne Cartana w wersji nieklasycznej.

3. Wyprowadź klasyczne pierwsze twierdzenie strukturalne z wersji nieklasycznej.

4. Udowodnij ze szczegółami twierdzenie mówiące o tym, że rozmaitość riemannowska z zerową krzywizną jest lokalnie płaska.

5. Udowodnij Drugie Strukturalne Równanie Cartana w klasycznej wersji albo bezposrednio, albo wyprowadzając je z wersji nieklasycznej.

6. Niech G będzie spójną grupą Liego. Rozważ spójność afiniczną w trywialnym przypadku gdy G-wiązką główną jest $G \mapsto_*$. Sformułuj Drugie Strukturalne Równanie Cartana w tym przypadku.

Tematy egzaminacyjne.

1. Formy różniczkowe.

2. Grupy i algebry Liego.

3. Równanie Eulera.

4. Geodezyjne i przekształcenie wykładnicze.

5. Twierdzenie Hopfa-Rainowa.

6. Spójność Levi-Civita.

7. Tensory Riemanna i Ricciego. Krzywizna sekcyjna i skalarna.

8. Klasyczna spójność afiniczna i jej tensory torsji i krzywizny.

9. Równania strukturalne w ujęciu klasycznym.

10. Wiązki główne i spójność w wiązkach głównych.

11. Krzywizna (i torsja) spójności w wiązkach głównych (w wiązkach baz). Równania strukturalne.

12. Spójność w wiązkach głównych, a klasyczna spójność afiniczna.