

Teoria ergodyczna

seminarium monograficzne
dla studentów matematyki

dr hab. Krzysztof Barański i prof. dr hab. Anna Zdunik

rok akad. 2013/14

Teoria ergodyczna

Teoria ergodyczna

Teoria ergodyczna zajmuje się badaniem własności układów dynamicznych z miarą niezmienniczą,

Teoria ergodyczna

Teoria ergodyczna zajmuje się badaniem własności układów dynamicznych z miarą niezmienniczą, np. przekształcenia mierzalnego

$$f : X \rightarrow X,$$

gdzie (X, \mathfrak{M}, μ) jest przestrzenią ze skończoną miarą μ taką, że

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \text{dla } A \in \mathfrak{M}.$$

Teoria ergodyczna

Teoria ergodyczna zajmuje się badaniem własności układów dynamicznych z miarą niezmienniczą, np. przekształcenia mierzalnego

$$f : X \rightarrow X,$$

gdzie (X, \mathfrak{M}, μ) jest przestrzenią ze skończoną miarą μ taką, że

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \text{dla } A \in \mathfrak{M}.$$

Interesują nas stochastyczne własności iteracji

$$f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x) \quad \text{punktów } x \in X.$$

Historia

Historia

- L. Boltzmann (1844–1906): fizyka statystyczna



Historia

- L. Boltzmann (1844–1906): fizyka statystyczna
- G. Birkhoff (1884–1944): twierdzenia ergodyczne
- J. von Neumann (1903–1957): twierdzenia ergodyczne



Historia

- L. Boltzmann (1844–1906): fizyka statystyczna
- G. Birkhoff (1884–1944): twierdzenia ergodyczne
- J. von Neumann (1903–1957): twierdzenia ergodyczne
- A. Kołmogorow (1903–1987): entropia



Teoria ergodyczna dzisiaj

Teoria ergodyczna dzisiaj

Na szczytach...

- H. Furstenberg (nagroda Wolffa 2006)
- E. Lindenstrauss (medal Fieldsa 2010)
- T. Tao (medal Fieldsa 2006)

Teoria ergodyczna dzisiaj

Na szczytach...

- H. Furstenberg (nagroda Wolffa 2006)
- E. Lindenstrauss (medal Fieldsa 2010)
- T. Tao (medal Fieldsa 2006)

W Polsce:

- T. Downarowicz (PWr), K. Frączek (UMK),
E. Gutkin (UMK), M. Lemańczyk (UMK),
F. Przytycki (IMPAN),...

Teoria ergodyczna dzisiaj

Na szczytach...

- H. Furstenberg (nagroda Wolffa 2006)
- E. Lindenstrauss (medal Fieldsa 2010)
- T. Tao (medal Fieldsa 2006)

W Polsce:

- T. Downarowicz (PWr), K. Frączek (UMK),
E. Gutkin (UMK), M. Lemańczyk (UMK),
F. Przytycki (IMPAN),...

Zagadnienia teorii ergodycznej: Teoria entropii, teoria spektralna, ergodyczna analiza układów dynamicznych (wykładniki Lapunowa, hiperboliczność, wymiar,...).

Teoria ergodyczna dzisiaj

Na szczytach...

- H. Furstenberg (nagroda Wolffa 2006)
- E. Lindenstrauss (medal Fieldsa 2010)
- T. Tao (medal Fieldsa 2006)

W Polsce:

- T. Downarowicz (PWr), K. Frączek (UMK),
E. Gutkin (UMK), M. Lemańczyk (UMK),
F. Przytycki (IMPAN),...

Zagadnienia teorii ergodycznej: Teoria entropii, teoria spektralna, ergodyczna analiza układów dynamicznych (wykładniki Lapunowa, hiperboliczność, wymiar,...).

Zastosowania: układy dynamiczne, teoria informacji, teoria liczb, rachunek prawdopodobieństwa, analiza harmoniczna...

Przykłady

Przykłady

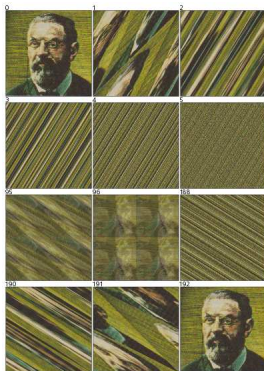
Twierdzenie Poincarego o powracaniu

W układzie zachowującym miarę typowe punkty wracają nieskończenie wiele razy do danego zbioru.

Przykłady

Twierdzenie Poincarego o powracaniu

W układzie zachowującym miarę typowe punkty wracają nieskończenie wiele razy do danego zbioru.



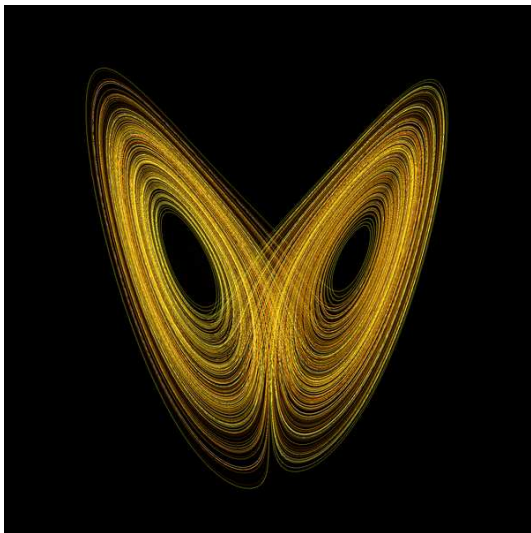
Bywają też układy zupełnie chaotyczne...

Bywają też układy zupełnie chaotyczne...



...gdzie występują dziwne atraktory...

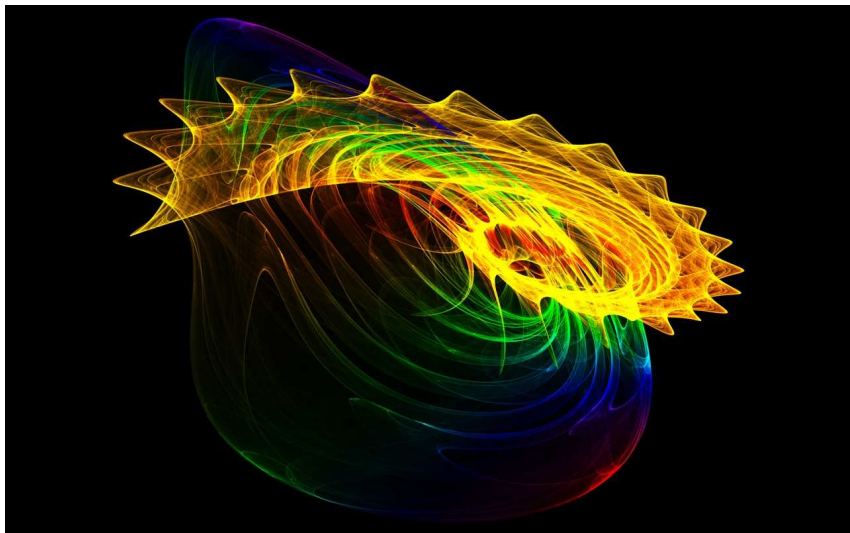
...gdzie występują dziwne atraktory...



...gdzie występują dziwne atraktory...



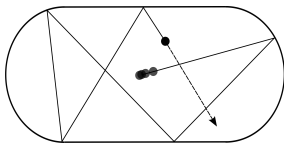
...gdzie występują dziwne atraktory...



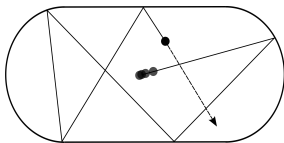
A może zająć się bilardem?

A może zająć się bilardem?

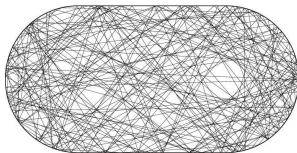


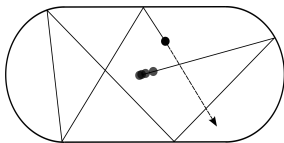


Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.

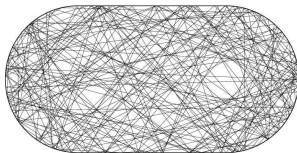


Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.



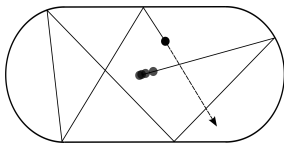


Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.

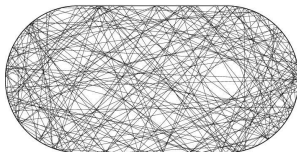


Otwarty problem

Czy każdy bilard w wielokącie ma orbitę zamkniętą (okresową)?



Matematycznie, bilard to układ zachowujący miarę na przestrzeni fazowej położenia \times kąty.



Otwarty problem

Czy każdy bilard w wielokącie ma orbitę zamkniętą (okresową)?
Nieznane nawet dla trójkątów!!!

A fractal image featuring a central spiral that transitions from yellow to green. Surrounding this is a complex, fern-like pattern of smaller spirals, all set against a black background. The overall effect is a vibrant, organic-looking fractal structure.

Zapraszamy!