Egzamin z Analizy Matematycznej II

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2013/14, semestr letni

17 czerwca 2014 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 2,5 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1.

(a) Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+3x-10}.$$

(b) Obliczyć całkę niewłaściwą

$$\int_0^1 x \ln x\,dx.$$

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x,y) = -x^4 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Znaleźć wszystkie punkty $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takie, że $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ i rozstrzygnąć, czy w tych punktach funkcja f osiąga lokalne ekstremum.

3. Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$g(x,y,z) = z^3 - 3xyz - x - 8.$$

(a) Rozstrzygnąć, czy w otoczeniu punktu $(x,y) = (0,0)$ istnieje funkcja $z = z(x,y)$ klasy C^1 taka, że $g(x,y,z(x,y)) = 0$. Jeśli tak, obliczyć $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

(b) Opisać równaniem zbiór wektorów stycznych $T_{(0,0,2)}M$, gdzie

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}.$$

4. Znaleźć najmniejszą odległość punktów zbioru

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 3xy + 1 = 0\}$$

od punktów osi OX.

5. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_A y\,dxdy,$$

gdzie

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}.$$