

# Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2012/13, semestr zimowy

15 marca 2013 r.

**UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!**

1. Pewien student wpłacił 100 000 złotych na lokatę oprocentowaną (nominalnie) w skali 5% rocznie z odsetkami naliczanymi w sposób ciągły. Po jakim czasie wkład na lokacie wzrośnie do 150 000 złotych?

2. Niech  $a_1 = \frac{5}{2}\pi$ , natomiast  $a_{n+1} = \sin a_n$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Udowodnić, że ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny i wyznaczyć jego granicę.

3. Rozstrzygnąć, dla jakich  $x \in \mathbb{R}$  zbieżny jest szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + (-1)^n n + 1}.$$

4. (a) Wyznaczyć wzorem funkcję  $x = f^{-1}(y)$  odwrotną do danej:

$$y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

i określić dziedzinę funkcji  $f^{-1}$ .

(b) Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć

$$(f^{-1})'(y_0),$$

gdzie  $y = f(x) = x + e^{2013x}$ ,  $y_0 = 1$ .

5. Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}.$$

6. Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że dla  $x, y, z > 0$  zachodzi nierówność:

$$(3x + 2y + z) \ln \left( \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right) \leq 3x \ln x + 2y \ln y + z \ln z.$$