Egzamin z Analizy Matematycznej

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2011/12, semestr zimowy

2 marca 2012 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Znaleźć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Zbadać, dla jakich $a>0$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{a^n}.$$

3. Znaleźć wszystkie liczby $a\in\mathbb{R}$, $b>0$, dla których funkcja $f:(-\infty,\frac{\pi}{2b})\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{dla } x\in(-\infty,0] \\ \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2(bx)} & \text{dla } x\in(0,\frac{\pi}{2b}) \end{cases}$$

jest ciągła.

4. Znaleźć zbiór punktów różniczkowalności funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\in(-\infty,0] \\ \sin^2 x & \text{dla } x\in(0,\frac{\pi}{2}] \\ 1 & \text{dla } x\in(\frac{\pi}{2},+\infty). \end{cases}$$

5. Wykazać, że równanie

$$x^{99}+x^9+9x+9=0$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

6. Obliczyć całkę

$$\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$