Egzamin z Analizy Matematycznej

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2010/11, semestr letni

9 czerwca 2011 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 7 punktów. Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}.$$

2. Zbadać istnienie gradientu funkcji $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

w punktach $(0,0)$ i $(-2,2)$.

3. Znaleźć minimum i maksimum funkcji

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

na zbiorze

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2=1,\ z=\frac{1}{2}\right\}.$$

4. (a) Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^2}$.

(b) Obliczyć całkę podwójną $\displaystyle\iint\limits_A xy\,dxdy$, gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le\pi,\ |y|\le\pi\}$.

5. Znaleźć wszystkie minima i maksima lokalne funkcji

$$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$$

określonej na zbiorze $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0\}$.

6. Rozwinąć w szereg Taylora funkcję $f:(-\frac{1}{2},+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln\sqrt{(1+x)(1+2x)}$$

wokół punktu $x_0=0$ i wyznaczyć promień zbieżności tego szeregu.