Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2010/11, semestr letni

3 września 2011 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 7 punktów. Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{\sin(x^2)+y^2}.$$

2. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ dla funkcji $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\cos|x+y|.$$

Jeśli tak, wyznaczyć gradient funkcji f w punkcie $(0,0)$.

3. Niech funkcja $f(x,y)=x-y^2$ będzie określona na zbiorze

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=0\right\}.$$

Sprawdzić, czy funkcja f przyjmuje maksimum na M. Jeśli tak, wyznaczyć je. Sprawdzić, czy funkcja f przyjmuje minimum na M. Jeśli tak, wyznaczyć je.

4. **(a)** Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

(b) Obliczyć całkę podwójną $\displaystyle\iint_A \sin(x+y)\,dxdy$ dla $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le\pi,\ |y|\le\pi\}$.

5. Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=(2x+y^2)e^x$$

i określić ich charakter (minimum lokalne, maksimum lokalne, brak ekstremum lokalnego).

6. Rozwinąć w szereg Taylora funkcję

$$f(x)=\frac{1}{4-x^2}$$

wokół punktu $x_0=1$. Wyznaczyć promień zbieżności tego szeregu.