ALGORYTM STALMARCKA

Przykłady formuł:

Formuła spełnialna: $\phi = (x_1 \Rightarrow x_2) \vee \neg((x_1 \Leftrightarrow x_3) \vee x_4) \wedge \neg x_2)$ (wartościowanie $\langle x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1\rangle$)
Formuła niespełnialna: $x \wedge \neg x$
Tautologia: $x \vee \neg x$, $0 \Rightarrow x$

Reguły wnioskowania do algorytmu Stalmarcka

Reguły wstępnej kanonizacji	**Proste reguły**
$\neg\neg p \longmapsto p$	Dla 3ki z koniunkcją, tj. $p \Leftrightarrow q \wedge r$
$\neg p \vee \neg q \longmapsto \neg(p \wedge q)$	• if $p = \neg q$ then $q = \top$ and $r = \bot$
$\neg p \vee q \longmapsto \neg(p \wedge \neg q)$	• if $q = r$ then $p = r$
$p \vee \neg q \longmapsto \neg(\neg p \wedge q)$	• if $q = \neg r$ then $p = \bot$
$p \vee q \longmapsto \neg(\neg p \wedge \neg q)$	• if $p = \top$ then $q = \top$ and $r = \top$
$\neg p \Rightarrow \neg q \longmapsto \neg(\neg p \wedge q)$	• if $q = \top$ then $p = r$
$\neg p \Rightarrow q \longmapsto \neg(\neg p \wedge \neg q)$	• if $q = \bot$ then $q = \bot$
$p \Rightarrow \neg q \longmapsto \neg(p \wedge q)$	Dla 3ki z równoważnością, tj. $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$
$p \Rightarrow q \longmapsto \neg(p \wedge \neg q)$	• if $p = q$ then $r = \top$
$\neg\top \longmapsto \bot$, $\neg\bot \longmapsto \top$	• if $p = \neg q$ then $r = \bot$
$p \wedge \top \longmapsto p$, $p \wedge \bot \longmapsto \bot$	• if $p = \top$ then $q = r$
$p \vee \top \longmapsto \top$, $p \vee \bot \longmapsto p$	• if $p = \bot$ then $q = \neg r$
$p \Rightarrow \top \longmapsto \top$	oraz wszystkie symetryczne(!!).
$\top \Rightarrow p \longmapsto p$	
$p \Rightarrow \bot \longmapsto \neg p$	
$\bot \Rightarrow p \longmapsto \top$	
$p \Leftrightarrow \top \longmapsto p$	
$p \Leftrightarrow \bot \longmapsto \neg p$	

Przykład do algorytmu Stalmarcka:

$\phi = \neg((a \Leftrightarrow b \wedge \neg\neg c) \wedge (b \Leftrightarrow \neg c) \wedge a) \vee (\top \Leftrightarrow \bot)$

1. **Etap 0 - wstępna kanonizacja** . Skorzystać z lewej kolumny tabeli.
2. **Etap I - przekształcenie do trójek**. Zacząć od formuł-liści (tj. najbardziej zagłębionych podformuł).
3. **Etap II - 0-Saturacja**. Skorzystać z prawej kolumny tabeli.
4. **Etap III - 1-Saturacja**. Wsk: ten etap okaże się już zbędny.
5. **Co można powiedzieć o tej formule?**

Rozwiązanie

Formuła: $\phi = \neg((a \Leftrightarrow b \wedge \neg\neg c) \wedge (b \Leftrightarrow \neg c) \wedge a) \vee (\top \Leftrightarrow \bot)$

1. **Etap 0 - wstępna kanonizacja**: $\phi = \neg((a \Leftrightarrow b \wedge c) \wedge (b \Leftrightarrow \neg c) \wedge a)$
2. **Etap I - przekształcenie do trójek**: (uw. znak $=$ i $\Leftrightarrow$ uważamy za to samo)
   - $v_1 = b \wedge c$, teraz $\phi = \neg((a \Leftrightarrow v_1) \wedge (b \Leftrightarrow \neg c) \wedge a)$
   - $v_2 = a \Leftrightarrow v_1$, teraz $\phi = \neg(v_2 \wedge (b \Leftrightarrow \neg c) \wedge a)$
   - $v_3 = b \Leftrightarrow \neg c$, teraz $\phi = \neg(v_2 \wedge v_3 \wedge a)$
   - $v_4 = v_3 \wedge a$, teraz $\phi = \neg(v_2 \wedge v_4)$
   - $v_5 = v_2 \wedge v_4$, teraz $\phi = \neg(v_5)$
   - $v^* = \neg v_5$
3. **Etap II - 0-Saturacja**:
   (a) Startujemy z $v^* = \neg\top$, czyli $v_5 = \top$
   (b) Skoro $v_5 = \top$ i $v_5 = v_2 \wedge v_3$, to $v_2 = \top$ oraz $v_4 = \top$
   (c) Skoro $v_4 = \top$ i $v_4 = v_3 \wedge a$, to $v_3 = \top$ oraz $a = \top$
   (d) Skoro $v_3 = \top$ i $v_3 = b \Leftrightarrow \neg c$, to $b = \neg c$
   (e) Skoro $b = \neg c$ i $v_1 = b \wedge c$, to $v_1 = \bot$
   (f) Skoro $v_2 = \top$ i $a = \top$ oraz $v_2 = a \Leftrightarrow v_1$, to $v_1 = \top$
   (g) Skoro $v_1 = \top$ i $v_1 = \bot$ to mamy sprzeczność.
4. **I co z tego?** Przypuściliśmy, że istnieje wartościowanie, dla którego formuła przyjmuje wartość $\bot$. Otrzymaliśmy sprzeczność, więc takie wartościowanie nie istnieje. Zatem formuła jest tautologią. Można sprawdzić to na tabeli prawdy.