ZADANIA O NA EGZAMIN PISEMNY

1 Obliczyć wymiary grup homologii zespolonego grassmannianu $Gr_k(\mathbb{C}^n)$. Obliczyć z ilu punktów składa się $Gr_k(\mathbb{F}_q^n)$. Obliczyć granicę przy $q \to 1$. (I wyjaśnić skąd się bierze równość).

2 Opisać orbity działania B na ilorazie $GL_n(k)/B$. Wykazać, że orbita $B\pi B \subset GL_n(k)/B$ jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną $A^{l(\pi)}$. Obliczyć $l(\pi)$.

3 Utożsamić $GL_n(k)/B$ z przestrzenią flag $Fl(n)$, której elemantami są ciągi podprzestrzeni liniowych k^n

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = k^n$$

($\dim V_i = i$). Na przestrzeni flag nad ciałem liczb zespolonych działa grupa unitarna $U(n)$. Przedstawić tę przestrzeń jako przestrzeń ilorazową grupy $U(n)$.

4 Rozważamy działanie grupy macierzy diagonalnych $\mathbb{T} \subset GL_n(\mathbb{C})$ na $GL_n(\mathbb{C})/B$. Znaleźć punkty stałe tego działania. Obliczyć wagi działania na przestrzeniach stycznych.

5 Opisać wyszytkie podgrupy $P \subset GL_n(\mathbb{C})$ zawierające B.

6 Wprowadźmy na przestrzeni $\mathbb{C}^{2n}$ antysymetryczną niezdegenerowaną formę dwuliniową zadaną przez antysymetryczną $2n \times 2n$ macierz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rozważmy podzbiór grassmannianu $Gr_n(k^{2n})$ składający się z n–wymiarowych przestrzeni izotropowych. Pokazać, że ten zbiór jest przestrzenią jednorodną dla pewnej grupy. Znaleźć punkty stałe działania torusa

$$\mathbb{T} = \{diag(t_1, t_2, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_2^{-1}, t_1^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\}.$$

7 Wprowadźmy na przestrzeni $\mathbb{C}^{2n}$ antysymetryczną niezdegenerowaną formę dwuliniową zadaną przez symetryczną $2n \times 2n$ macierz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rozważmy podzbiór grassmannianu $Gr_n(k^{2n})$ składający się z n–wymiarowych przestrzeni izotropowych. Pokazać, że ten zbiór jest przestrzenią jednorodną dla pewnej grupy. Znaleźć punkty stałe działania torusa

$$\mathbb{T} = \{diag(t_1, t_2, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_2^{-1}, t_1^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\}.$$

8 Niech A będzie k-algebrą. Udowodnić, że działanie torusa k^* na rozmaitoći afinicznej $X = Spec(A)$ jest równoważne zadaniu $\mathbb{Z}$-gradacji w A.

9 Obliczyć pierścień kohomologii $H^*(G(k,n))$ korzystając z rozwłóknienia

$$G(k,n) \to B(U(k) \times U(n-k)) \to BU(n).$$

10 Jeśli grupa ma torsję, to BG nie ma skończeniewymiarowego modelu.

11 Dla grupy skończonej $H^*(BG;R)=0$ jeśli $|G|$ jest odwracalny w R.
Wsk: Użyć transfer.

12 Znaleźć przekształcenia klasyfikujące dla potęgi wiązki tautologicznej $(\gamma_n)^{\otimes k}\to\mathbb{P}^n$ (dla $k\in\mathbb{Z}$) przyjmując model $B\mathbb{C}^*=\mathbb{P}^\infty$.

13 Niech $0<d_1<d_2<\cdots<d_m<n$. Na przestrzeni częściowych flag mamy wiązki ilorazowe: nad punktem $x=(V_1\subset V_2\subset\dots V_m)\in Fl(d_1,d_2,\dots,d_m;n)$

$$(Q_i)_x := V_i/V_{i-1}\,.$$

(Przyjmujemy $V_0=\{0\}$.) Wykazać, że klasy Cherna wiązek Q_i dla $i=1,2,\dots m$ generują pierścień kohomologii $H^*(Fl(d_1,d_2,\dots,d_m;n))$.

14 Torus S^1 działa na $\mathbb{P}^1$

$$t\cdot[z_0:z_1]=[z_0:t^kz_1]\,.$$

Obliczyć pierścień ekwiwariantnych kohomologii $H^*_{S^1}(\mathbb{P}^1)$. Zbadać odwzorowanie obcięcia

$$H^*_{S^1}(\mathbb{P}^1)\to H^*_{S^1}(\{\,[1:0]\,,\,[0:1]\,\})\simeq\mathbb{Z}[t]\oplus\mathbb{Z}[t].$$

15 Zbadać odwzorowanie obcięcia do punktów stałych $H^*_{\mathbb{T}}(X)\to H^*_{\mathbb{T}}(X^{\mathbb{T}})$ dla $X=\mathbb{P}^n$ ze standardowym działaniem torusa. Wykazać, że jest monomorfizmem.

16 Obliczyć pierścień ekwiwariantnych kohomologii grassmannianu $H^*_{\mathbb{T}}(G(k,n))$.

17 Spróbować powtórzyć dowód twierdzenia o lokalizacji $K\otimes_\Lambda H^*_G(X;\mathbb{Q})\overset{\simeq}{\to}K\otimes_\Lambda H^*_G(X^G;\mathbb{Q})$ dla grupy nieprzemiennej, np $G=U(n)$.

18 Udowodnić, że teza Twierdzenia o lokalizacji zachodzi dla kohomologii o współczynnikach całkowitych, jeśli stabilizatory punktów są spójne.

19 Jeśli zwarta przestrzeń X jest ekwiwariantnie formalna, to $H^*(X)\simeq H^*(X^{\mathbb{T}})$ z zachowaniem gradacji modulo 2.

20 Niech $X=\mathbb{P}^n$ ze standardowym działaniem $(n+1)$-wymiarowego torusa T. Pokazać, że obraz

$$H^*_T(X)\hookrightarrow H^*_{\mathbb{T}}(X^{\mathbb{T}})\simeq\bigoplus_{k=0}^n\Lambda=\Lambda^{n+1}$$

składa się z takich ciągów $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in\mathbb{Z}[x_0,x_1,\dots,x_n]^{n+1}$, że t_i-t_j dzieli f_i-f_j.

21 Niech $X=S^{2n-1}\subset\mathbb{C}^n$ z działaniem $\mathbb{T}=S^1$ przez mnożenie zespolone. Obliczyć $H^*_{\mathbb{T}}(X)$ jako $H^*_{\mathbb{T}}(pt)$ moduł.

22 Niech $X = \mathbb{P}^2$ z działaniem $\mathbb{T} = (S^1)^2$

$$(s,t)[x_0; x_1; x_2] = [x_0; sx_1; tx_2].$$

Utożsamić $H^*_{\mathbb{T}}(X;\mathbb{R})$ z ciągłymi funkcjami na $\mathbb{R}^2$, które są wielomianami na stożkach rozpiętych przez następujące pary wektorów

$$\{(1,0),\ (0,1)\}, \qquad \{(1,0),\ (-1,-1)\}, \qquad \{(-1,-1),\ (0,1)\}.$$

23 Niech X będzie kwadryką w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2n})$ zadaną równaniem $x_1x_{2n}+x_1x_{2n-1}+\dots x_nx_{n+1}$ we współrzędnych jednorodnych $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$. Wskazać torus (jak największy), który zachowuje X. Znaleźć punkty stałe i wagi działania torusa na przestrzeniach stycznych.

24 Obliczyć klasę kohomologii (stopień) grassmanianu $G(2,4)$ zanurzonego w $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{C}^n)$ (zanurzenie Plückera). Napisać formułę która wynika z twierdzenia o lokalizacji. Sprawdzić, że otrzymany wynik się zgadza podstawiając za zmienne forrmalne jakieś liczby całkowite.

25 Niech $X = \mathbb{C}^n$ z działaniem $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ o wagach (charakterach) $w_1, w_2, \dots, w_n$. Obliczyć klasę Poincaré dualną do $[0]$ w $H^2_{\mathbb{T}}(\mathbb{C}^n) = H^2_{\mathbb{T}}(pt)$ używając aproksymacji $B\mathbb{T} = \bigcup_N \mathbb{P}^N$.

26 Niech $V = \mathbb{C}^{n+1}$ z bazą $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ Niech $V^i = lin\{\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n\} \subset V$, $\operatorname{codim}(V^i) = i$. Oznaczmy przez x_i będzie klasą Poincaré dualną do $[P(V^i)] \in H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^n)$ (ze względu na standardowe działanie torusa). Utożsamiając $H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^n)$ z $\mathbb{Z}[t_0, t_1, \dots_n, \zeta]/(\prod(\zeta + t_i))$ znaleźć wzory na x_i.

27 Niech $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ działa na $X \subset \mathbb{P}(V)$ poprzez automorfizmy liniowe. Dla $p, q \in X^{\mathbb{T}}$ piszemy $p \to q$ jeśli istnieje $y \in X$ taki, że $\lim_{z\to 0} z \cdot y = p$ i $\lim_{z\to\infty} z \cdot y = q$. Wykazać, że nie ma zamkniętego ciągu orbit $p_0 \to p_1 \to \dots \to p_n = p_0$.

28 Dane 4 proste w $\mathbb{P}^3$ w położeniu ogólnym. Ile jest prostych przecinających wszystkie te 4 proste?

29 Każda lokalnie wolna $\mathbb{T}^*$-algebra ma strukturę $W(\mathfrak{t})$-algebry.

30 Niech (M,ω) będzie rozmaitością symplektyczną. Potok pola v zachowuje formę symplektyczną ω wtedy i tylko wtedy gdy $d\iota_v\omega = 0$.

31 *Związek odwzorowania momentu z ekwiwariantnymi kohomologiami.* Niech $\mathbb{T}$ działa hamiltonowsko na rozmaitości symplektycznej z funkcją momentu μ. Pokazać, że $\omega^\# := \omega + \mu$ jest zamkniętą formą w ekwiwariantnym kompleksie de Rhama (model Cartana).

32 Zobaczyć jak wygląda GKM-graf w wielościanie momentu dla $M = Sp_2(\mathbb{C})/B$, tzn dla przestrzeni flag grupy symplektycznej $Sp_2(\mathbb{C}) \subset GL_4(\mathbb{C})$,

33 To samo zadanie dla $GL_3(\mathbb{C})/B$, $IO(5)$ i $SO_5(\mathbb{C})/B$.
(Przestrzeń $IO(5) \subset G(2,5)$ składa się z przeztrzeni izotropowych ze względu na niezdegenerowaną formę symetryczną. Dopuszcza działanie 2-wymiarowego torusa.)