ZADANIA O DZIAŁANIU TORUSA I NIE TYLKO

♠ = zrobione

1 ♠ ObliczyÄ wymiary grup homologii zespolonego grassmannianu $Gr_k(\mathbb{C}^n)$. Obliczyć z ilu punktów składa się $Gr_k(\mathbb{F}_q^n)$. Obliczyć granicę przy $q \to 1$.

2 ♠ Wykazać, że stosując następujące elementarne operacje: mnozenie kolumny przez skalar $\neq 0$ i dodawianie jednej kolumny do innej, położonej na prawo (przestawianie kolumn zabronione) można dowolną macierz doprowadzić do postaci „eszelonu":

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

w którym
– każda kolumna kończy się na 1 (a poniżej zera),
– wyrazy na prawo od każdej końcowej jedynki są równe 0.

Taka postać jest jednoznaczna

3 ♠ Wykazać, że $GL_n(k) = \bigsqcup B\pi B$, gdzie B jest grupą macierzy górnotrójkątnych, a suma przebiega macirze permutacji π.

4 ♠ Opisać orbity działania B na ilorazie $GL_n(k)/B$.

5 ♠ Wykazać, że orbita $B\pi B \subset GL_n(k)/B$ jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną $A^{l(\pi)}$. Obliczyć $l(\pi)$.

6 ♠ Utożsamić $GL_n(k)/B$ z przestrzenią flag $Fl(n)$, której elemantami są ciągi podprzestrzeni liniowych k^n

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = k^n$$

$(\dim V_i = i)$.

7 ♠ Na przestrzeni flag nad ciałem liczb zespolonych działa grupa unitarna $U(n)$. Przedstawić tę przestrzeń jako przestrzeń ilorazową grupy $U(n)$.

8 ♠ Obliczyć z ilu punktów składa się przestrzeń pełnych flag $Fl(n)$ nad ciałem q–elementowym. Znaleźć związek ze wzorem na sumę długości permutacji należących do grupy Σ_n.

9 ♠ Rozważamy działanie grupy macierzy diagonalnych $T \subset GL_n(\mathbb{C})$ na $GL_n(\mathbb{C})/B$. Znaleźć punkty stałe tego działania. Obliczyć wagi działania na przestrzeniach stycznych.

10 ♠ Rozważamy działanie grupy macierzy diagonalnych postaci $\rho(t) = diag(t, t^2, t^3, \ldots, t^n)$ na $GL_n(\mathbb{C})/B$. Dla $x \in B\pi B$ znaliźć $\lim_{t\to\infty} \rho(t)x$.

11 ♠ Wykazać, że przestrzenie jednorodne postaci $GL_n(k)/P$ dla $P \supset B$ to częściowe przestrzenie flag $Fl(d_1, d_2, \dots, d_m; n)$, której elemantami są ciągi podprzestrzeni liniowych k^n

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m \subset k^n$$

$(\dim V_i = d_i)$.

12 ♠ Opisać wyszytkie podgrupy $P \subset GL_n(\mathbb{C})$ zawierające B.

13 Wprowadźmy na przestrzeni $\mathbb{C}^{2n}$ antysymetryczną niezdegenerowaną formę dwuliniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Dla $i \leq n$ rozważmy podzbiór grassmannianu $Gr_i(k^{2n})$ składający się z i–wymiarowych przestrzeni izotropowych. Pokazać, że ten zbiór jest przestrzenią jednorodną dla grupy $Sp(n) := Sp_n(\mathbb{C}) \cap U(2n)$. Wskazać maksymalny torus w tej grupie. Znaleźć punkty stałe działania tego torusa.

14 Wprowadźmy na przestrzeni $\mathbb{C}^{2n}$ symetryczną niezdegenerowaną formę dwuliniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Dla $i \leq n$ rozważmy podzbiór grassmannianu $Gr_i(k^{2n})$ składający się z i–wymiarowych przestrzeni izotropowych. Pokazać, że ten zbiór jest przestrzenią jednorodną dla grupy $SO_{2n}(\mathbb{C}) \cap U(2n) \simeq SO(2n)$. Wskazać maksymalny torus w tej grupie. Znaleźć punkty stałe działania tego torusa.

15 ♠ Niech A będzie k-algebrą. Udowodnić, że działanie torusa k^* na rozmaitoći afinicznej $X = Spec(A)$ jest równoważne zadaniu $\mathbb{Z}$-gradacji w A.

16 ♠ Niech $X = \mathbb{P}^n$, $G = U(k+1) \times U(n-k)$ zanurzone blokowo w $U(n+1)$. Rozłożyć X z naturalnym gdziałaniem G na ekwiwariantny CW-kompleks. (Najpierw rozpatrzeć przupadek $k = 0$.)

17 ♠ Obliczyć pierścień kohomologii $H^*(G(k,n))$ korzystając z rozwłóknienia

$$G(k,n) \to B(U(k) \times U(n-k)) \to BU(n).$$

18 ♠ Przyporządkowanie $G \mapsto BG$ jest funktorem $Grupy \to hTop$.

19 ♠ Niech[1] $X_i = G^{i+1}$, $d^k : X_i \to X_{i-1}$ rzutowanie polegające na opuszczaniu k-tej składowej $(k = 0, 1, \dots i)$. Realizację geometryczną definiujemy jako

$$|X_\bullet| = \left(\bigsqcup_{i \geq 0} X_i \times \Delta^i \right) \Big/ \sim$$

$$(d^k(a), b) \sim (a, \partial_k(b)) \quad \text{dla} \quad a \in X_i,\ b \in \Delta^{i-1}$$

gdzie $\partial_k : \Delta^{i-1} \hookrightarrow \Delta^i$ jest włożeniem k-tej ściany w sympleksie. Wykazać, że przestrzeń $E = |X_\bullet|$ jest ściągalna, że G działa na niej wolno (działanie diagonalne). Przedstawić E/G jako realizację geometryczną ciągu przestrzeni $Y_\bullet$.

20 ♠ Sprzężenie na grupie indukuje identyczność na $H^*(BG)$ (dla grupy niekoniecznie spójnej).

[1] Definiujemy tu pewien zbiór presymplicjalny

21 ♠ Jeśli grupa ma torsję, to BG nie ma skończeniewymiarowego modelu.

22 ♠ Dla grupy skończonej $H^*(BG;R)=0$ jeśli $|G|$ jest odwracalny w R.
Wsk: Użyć transfer.

23 ♠ Znaleźć przekształcenia klasyfikujące dla potęgi wiązki tautologicznej $(\gamma_n)^{\otimes k}\to\mathbb{P}^n$ (dla $k\in\mathbb{Z}$) przyjmując model $B\mathbb{C}^*=\mathbb{P}^\infty$.

24 Dla grupy skończonej $H^*_G(X;\mathbb{Q})\simeq H^*(X/G;\mathbb{Q})$

25 ♠ Niech $0<d_1<d_2<\cdots<d_m<n$. Na przestrzeni częściowych flag mamy wiązki ilorazowe: nad punktem $x=(V_1\subset V_2\subset\dots V_m)\in Fl(d_1,d_2,\dots,d_m;n)$

$$(Q_i)_x:=V_i/V_{i-1}\,.$$

(Przyjmujemy $V_0=\{0\}$.) Wykazać, że klasy Cherna wiązek Q_i dla $i=1,2,\dots m$ generują pierścień kohomologii $H^*(Fl(d_1,d_2,\dots,d_m;n))$.

26 ♠ Torus S^1 działa na $\mathbb{P}^1$

$$t\cdot[z_0:z_1]=[z_0:t^kz_1]\,.$$

Obliczyć pierścień ekwiwariantnych kohomologii $H^*_{S^1}(\mathbb{P}^1)$. Zbadać odwzorowanie obcięcia

$$H^*_{S^1}(\mathbb{P}^1)\to H^*_{S^1}(\{\,[1:0]\,,\,[0:1]\,\})\simeq\mathbb{Z}[t]\oplus\mathbb{Z}[t].$$

27 ♠ Zbadać odwzorowanie obcięcia do punktów stałych $H^*_T(X)\to H^*_T(X^T)$ dla $X=\mathbb{P}^n$ ze standardowym działaniem torusa. Wykazać, że jest monomorfizmem.

28 ♠ Obliczyć pierścień ekwiwariantnych kohomologii grassmannianu $H^*_T(G(k,n))$.

29 ♠ Opisać pierścień ekwiwariantnych kohomologii $Fl(d_1,d_2,\dots,d_m;n)$ ze względu na działanie torusa. (Porównaj zadanie 25.)

30 ♠ Torus $T=(S^1)^2$ działa $\mathbb{P}^3$ wzorem

$$(t_0,t_1)\cdot[z_0:z_1:z_2:z_3]=[t_0z_0:t_1z_1:t_1^{-1}z_2:t_0^{-1}z_3]\,.$$

Niech X będzie kwadryką zadaną równaniem $z_0z_3=z_1z_2$. Obliczyć pierścień ekwiwariantnych kohomologii $H^*_T(X)$.

31 Udowodnić, że jeśli $H^*_T(X,;\mathbb{Q})$ jest wolny nad $H^*_T(pt;\mathbb{Q})$, to $H^*_T(X,;\mathbb{Q})\to H^*(X,;\mathbb{Q})$ jest epimorfizmem.

32 ♠ Spróbować powtórzy'c dowód twierdzenia o lokalizacji $K\otimes_\Lambda H^*_G(X;\mathbb{Q})\overset{\simeq}{\to} K\otimes_\Lambda H^*_G(X^G;\mathbb{Q})$ dla grupy nieprzemiennej, np $G=U(n)$. Czy twierdzenie możnaby udowodnić przy dodatkowych założeniach, (np założyć coś o stabilizatorach).

33 ♠ Udowodnić, że teza Twierdzenia o lokalizacji zachodzi dla kohomologii o współczynnikach całkowitych, jeśli stabilizatory punktów są spójne.

34 ♠ Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, skończonego wymiaru, zwarta, to $H^*(X) \simeq H^*(X^T)$ z zachowaniem gradacji modulo 2.

35 ♠ Mnożenie przez klasę z $H_1(T)$ zadaje operację $H_*(X) \to H_{*+1}(X)$ (lub $H^*(X) \to H^{*-1}(X)$) Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, to ta operacia jest zerowa. Podać przykład, gdy ta operacja jest zerowa, ale przestrzeń nie jest ekwiwariantnie formalna.

36 ♠ Niech $X = \mathbb{P}^n$ ze standardowym działaniem $(n+1)$-wymiarowego torusa T. Pokazać, że obraz

$$H^*_T(X) \hookrightarrow H^*_T(X^T) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda = \Lambda^{n+1}$$

składa się z takich ciągów $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{n+1}$, że $t_i - t_j$ dzieli $x_i - x_j$.

37 Udowodnić, że obraz prosty w kohomologiach zdefiniowany za pomocą dualności Poincaré jest równy obrazowi prostemu zdefiniowanemu za pomocą klasy Thoma.

38 ♠ Niech $X = S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ z działaniem $\mathbb{T} = S^1$ przez mnożenie zespolone. Obliczyć $H^*_{\mathbb{T}}(X)$ jako $H^*_{\mathbb{T}}(pt)$ moduł.

39 ♠ Niech $X = S^2$ z działaniem S^1 przez obroty Utożsamić $H^*_{\mathbb{T}}(X;\mathbb{R})$ z ciągłymi funkcjami na $\mathbb{R}$, które są wielomianami na $\mathbb{R}_+$ i $\mathbb{R}_-$. ‘

40 ♠ Niech $X = \mathbb{P}^2$ z działaniem $T = (S^1)^2$

$$(s,t)[x_0; x_1; x_2] = [x_0; sx_1; tx_2].$$

Utożsamić $H^*_{\mathbb{T}}(X;\mathbb{R})$ z ciągłymi funkcjami na $\mathbb{R}^2$, które są wielomianami na stożkach rozpiętych przez następujące pary wektorów

$$\{(1,0),\ (0,1)\}, \qquad \{(1,0),\ (-1,-1)\}, \qquad \{(-1,-1),\ (0,1)\}.$$

41 ♠ Załóżmy, że mamy kwadrat kartezjański

$$\begin{array}{cccccc} & & f_1 & & \\ & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \\ g_X & \downarrow & & \downarrow & g_Y \\ & X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \\ & & f_2 & & \end{array}$$

Jeśli g_X, g_Y, f_2 (więc i f_1) są włożeniami, oraz X_2 jest transwersalne do Y_1, wtedy mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{cccccc} & & (f_1)_* & & \\ & H^k(X_1) & \longrightarrow & H^k(Y_1) & \\ g_X^* & \uparrow & & \uparrow & g_Y^* \\ & H^k(X_2) & \longrightarrow & H^k(Y_2) & \\ & & (f_2)_* & & \end{array}$$

.

42 Teza powyższa jest prawdziwa, gdy odwzorowanie f_2 jest rozwłóknieniem.

43 Zdefiniować obraz prosty przy założeniu, że f jest przekształceniem właściwym zorientowanych rozmaitości.

44 ♠ Niech X będzie kwadryką w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2n})$ zadaną równaniem $x_0x_{2n}+x_1x_{2n}+\dots x_{n-1}x_n$ we współrzędnych jednorodnych $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$. Wskazać torus (jak największy),który zachowuje X. Znaleźć punkty stałe i wagi działania torusa na przestrzeniach stycznych.

45 ♠ Niech X będzie kwadryką w $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2n-1})$ zadaną równaniem $x_1x_{2n}+x_2x_{2n}+\dots x_nx_n$ we współrzędnych jednorodnych $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$. Wskazać torus (jak największy),który zachowuje X. Znaleźć punkty stałe i wagi działania torusa na przestrzeniach stycznych.

46 ♠ Obliczyć klasę kohomologii (stopień) grassmanianu $G(k,n)$ zanurzonego w $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{C}^n)$ (zanurzenie Plückera). Na początek upewnić się, że dla $G(2,4)$ wychodzi 2.
Wskazówka: Hook formula dla prostoktnego diagramu Younga, np [Fulton: Young Tableaux]

Za pomocą twierdzenia o lokalizacji można policzyć stopień $= \int_{G(k,n)} c_1(\mathcal{O}(1))^{k(n-k)}$.
Oto polecenie w Wolfram Mathematice:

```
Sum[
     (-Sum[t[a], {a, J}])^(k (n - k))/
     Product[t[b] - t[a], {a, J}, {b, Complement[Range[n], J]}],
{J, Subsets[Range[n], {k}]}]
Factor[%]
```

47 Niech n-wymiarową E będzie wiązką zespoloną wektorową nad zorientowaną rozmaitością X. Załóżmy, że grupa G działa na X i na E niech $s : X \to E$ będzie niezmenniczym przekrojem, $Z = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$. Załóżmy, że s jest transwersany do przekroju zerowego. Wykazać, że klasa Poincaré dualna do $[Z]$ jest równa $c_n(E) \in H^{2n}_G(X)$.

48 ♠ Niech $X = \mathbb{C}^n$ z działaniem $\mathbb{T}$ o wagach $w_1, w_2, \dots, w_n \in Hom(\mathbb{T}, S^1) = H^2_{\mathbb{T}}(pt)$. Obliczyć klasę Poincaré dualną do $[0]$ w $H^2_{\mathbb{T}}(\mathbb{C}^n) = H^2_{\mathbb{T}}(pt)$.

49 ♠ Obliczyć $H^*_{SL_n(\mathbb{C})}(pt)$.

50 ♠ Niech $V = \mathbb{C}^{n+1}$ z bazą $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ Niech $V^i = lin \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n \subset V$, $\operatorname{codim}(V^i) = i$. Oznaczmy przez x_i będzie klasą Poincaré dualną do $[P(V^i)] \in H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^n)$ (ze względu na standardowe działanie torusa). Utożsamiając $H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^n)$ z $\mathbb{Z}[t_0, t_1, \dots_n, \zeta]/(\prod(\zeta + t_i))$ znaleźć wzory na x_i.

51 ♡ (Ciąg dalszy poprzedniego zadania) Zdefiniujmy formę przecięć w $H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^n)$

$$(x, y) = \int_{\mathbb{P}^n} x \cup y \in \Lambda.$$

Podać wzór na (x_i, x_j).
Przykłady:
$n = 2$, obcięcia klas $\mathbb{P}^k$ do punktów stałych p_i:

	p_0	p_1	p_2
$\mathbb{P}^2$	1	1	1
$\mathbb{P}^1$	0	$t_0 - t_1$	$t_0 - t_2$
$\mathbb{P}^0$	0	0	$(t_0 - t_2)(t_1 - t_2)$

Forma przecięć:

	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^0$
$\mathbb{P}^2$	0	0	1
$\mathbb{P}^1$	0	1	$t_0 - t_2$
$\mathbb{P}^0$	1	$t_0 - t_2$	$(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)$

$n = 3$, obcięcia klas $\mathbb{P}^k$ do punktów stałych p_i:

	p_0	p_1	p_2	p_3
$\mathbb{P}^3$	1	1	1	1
$\mathbb{P}^2$	0	$t_0 - t_1$	$t_0 - t_2$	$t_0 - t_3$
$\mathbb{P}^1$	0	0	$(t_0 - t_2)(t_1 - t_2)$	$(t_0 - t_3)(t_1 - t_3)$
$\mathbb{P}^0$	0	0	0	$(t_0 - t_3)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)$

Forma przecięć:

	$\mathbb{P}^3$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^0$
$\mathbb{P}^3$	0	0	0	1
$\mathbb{P}^2$	0	0	1	$t_0 - t_3$
$\mathbb{P}^1$	0	1	$t_0 + t_1 - t_2 - t_3$	$(t_0 - t_3)(t_1 - t_3)$
$\mathbb{P}^0$	1	$t_0 - t_3$	$(t_0 - t_3)(t_1 - t_3)$	$(t_0 - t_3)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)$

Forma przecięć dla $n = 4$:

	$\mathbb{P}^4$	$\mathbb{P}^3$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^0$
$\mathbb{P}^4$	0	0	0	0	1
$\mathbb{P}^3$	0	0	0	1	$t_0 - t_4$
$\mathbb{P}^2$	0	0	1	$t_0 + t_1 - t_3 - t_4$	$(t_0 - t_4)(t_1 - t_4)$
$\mathbb{P}^1$	0	1	$t_0 + t_1 - t_3 - t_4$	$t_3^2 - t_0 t_3 - t_1 t_3 - t_2 t_3 + t_4 t_3 + t_4^2 + t_0 t_1 + t_0 t_2 + t_1 t_2 - t_0 t_4 - t_1 t_4 - t_2 t_4$	$(t_0 - t_4)(t_1 - t_4)(t_2 - t_4)$
$\mathbb{P}^0$	1	$t_0 - t_4$	$(t_0 - t_4)(t_1 - t_4)$	$(t_0 - t_4)(t_1 - t_4)(t_2 - t_4)$	$(t_0 - t_4)(t_1 - t_4)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)$

Jaki jest wzór ogólny?

52 Niech X będzie grassmanianem $Gr_2(\mathbb{C}^4) = G(2,4)$ z działaniem standardowego torusa. Znaleźć wzory na ekwiwariantne klasy rozmaitości Schuberta w $H^*_{\mathbb{T}}(X)$ i znaleźć ich formę przecięć.

53 [2] Niech G będzie spójną, zwartą grupą Lie, $\mathfrak{g} = T_1 G$. Wykazać, że

$$H^*(G;\mathbb{R}) \simeq (\Lambda \mathfrak{g}^*)^G$$

(G działa na $\mathfrak{g}$ prze ad, czyli przez pochodną sprzęgania).
Wskazówka: pokazać, że różniczka de Rhama na podkompleksie form dwustronnie niezmienniczych w $\Omega^*(G)$ jest zerowa.

54 Niech $N\mathbb{T}$ będzie normalizatorem torusa maksymalnego w spónej grupie Lie G. Wykazaą, że

$$H^*(BG;\mathbb{R}) \simeq Sym(\mathfrak{g}^*)^G \simeq Sym(\mathfrak{t}^*)^W,$$

gdzie $\mathfrak{t} = T_1\mathbb{T}$, $W = N\mathbb{T}/\mathbb{T}$.

[2]Dwa następne zadanie nie są ściśle związane z wykładem, ale należą do tzw wiedzy obowiązkowej.

55 Niech $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Udowodnić, że

$$S_\lambda = \det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \dots & h_{\lambda_2+n-2} \\ & & \dots & \\ h_{\lambda_n-n-1} & h_{\lambda_n-n-2} & \dots & h_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Ponadto, jeśli $\lambda_{k+1} = 0$ to do obliczenia S_λ można użyć wyznacnika $k \times k$. Np $S_{i00\dots 0} = h_i$.

56 Niech μ będzie podziałem powstałym z λ poprzez zamianię kolumn i wierszy. Udowodnić, że

$$S_\mu = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \dots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \dots & e_{\lambda_2+n-2} \\ & & \dots & \\ e_{\lambda_n-n-1} & e_{\lambda_n-n-2} & \dots & e_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Ponadto, jeśli $\lambda_{k+1} = 0$ to do obliczenia S_μ można użyć wyznacnika $k \times k$. Np $\mu = \underbrace{11\dots 1}_{i}00\dots 0$ mamy $S_\mu = e_i$.

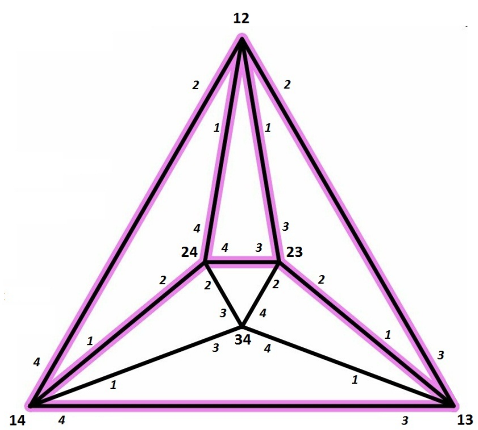
57 Pokazać, że jeśli X można zanurzyć ekwiwariantnie w $\mathbb{P}(V)$ z działaniem liniowym $\mathbb{T}$ na V, to graf GKM nie ma pętli.
Uwaga 1. Jeśli X jest normalna rzutowa rozmaitość algebraiczna, to można zanurzyć [Tw Sumihiro].
Uwaga 2. Każde działanie $\mathbb{T}$ na $\mathbb{P}(V)$ pochodzi od działania liniowego.

58 ♠ Niech $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ działa na $X \subset \mathbb{P}(V)$ poprzez automorfizmy liniowe. Dla $p, q \in X^{\mathbb{T}}$ piszemy $p \to q$ jeśli istnieje $y \in X$ taki, że $\lim_{z\to 0} z \cdot y = p$ i $\lim_{z\to\infty} z \cdot y = q$. Wykazać, że nie ma zamkniętego ciągu orbit $p_0 \to p_1 \to \cdots \to p_n = p_0$.

59 ♠ Niech X będzie rozmaitośćią algebraiczną rzutową z działaniem $\mathbb{C}^*$, $C \subset X$ krzywa z samoprzecięciem, która jest T-niezmiennicza. Pokazać, że C musi być zawarta w X^T.

60 ♠ Dane 4 proste w $\mathbb{P}^3$ w położeniu ogólnym. Ile jest prostych przecinających wszystkie te 4 proste?

61 ♡ Niech $\Omega_1 = \{V \in Gr_2(\mathbb{C}^4) \mid V \cap \mathbb{C}^2 \neq 0\}$. W zanurzeniu Plückera Ω_1 jest zadane równaniem $m_{34} = 0$. Graf GKM dla $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ wraz z wyróżnionym pdgrafem odpowiadającym Ω_1 wygląda tak:



Niech $c = [\Omega_1] \in H^2_{\mathbb{T}}(Gr_2(\mathbb{C}^4)$. Wiemy, że dla punktów stałych $p_{ij} \in \{p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}\}$ obcięcie klasy c jest równe $c_{|p_{ij}} = (t_3 + t_4) - (t_i + t_j)$, bo te punkty są gądkie i znana jest wiązka normalna. Wiemy też, że $c_{|p_{34}} = 0$, bo $p_{34} \notin \Omega_1$. Obliczyć $c_{|p_{12}}$ z tw o lokalizacji.
Wsk. $\int_{Gr_2(\mathbb{C}^4)} c = ?$.

62 ♡ Przy oznaczeniach z powyższego zadania obliczyć $\int_{Gr_2(\mathbb{C}^4)} c^4$.

63 ♡ Torus $\mathbb{T}$ działa na $\mathbb{C}^n$. Niech f będzie wielomianem od n zmiennych takim, że dla $t \in \mathbb{T}$ mamy $f(t \cdot z) = w(t)f(z)$ dla pewnego $w \in Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$. Niech Z będzie zbiorem zer wielomianu f. Wykazaą, że $[Z] = w \in H^2_{\mathbb{T}}(\mathbb{C}^n) \simeq H^2_{\mathbb{T}}(pt) \simeq Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$.

64 ♡ Pokazać, że dla wiązek liniowych definicja formy i klasy Cherna z wykładu jest zgodna z definicją Milnora-Stasheffa (Characteristic classes, definicja różniczkowa w Appendixie C).

65 ♡ Udowodnić, że definicja warunku (C) tzn lokalnej wolności G^* modułu nie zależy od wyboru bazy $\mathfrak{g}$.

66 ♠ Ćw. Każda lokalnie wolna T^*-algebra ma strukturę $W(\mathfrak{t})$-algebry.

---

67 Niech (M, ω) będzie rozmaitością symplektyczną. Potok pola v zachowuje formę symplektyczną ω wtedy i tylko wtedy gdy $d\iota_v\omega = 0$.

68 *Związek odwzorowania momentu z ekwiwariantnymi kohomologiami.* Niech T działa hamiltonowsko na rozmaitości symplektycznej z funkcją momentu μ. Wtedy $\omega^\# := \omega + \mu$ jest zamkniętą formą w ekwiwariantnym kompleksie de Rhama (model Cartana).

69 *Twierdzenie Duistermaata-Heckmana* Załóżmy, że S^1 działa hamiltonowsko z funkcją Hamiltona f. Załóżmy, że f ma izolowane punkty krytyczne (równoważnie M^{S^1} jest skończony). Wtedy dla każdego $\hbar \in \mathbb{C}$

$$\int_M e^{\hbar f} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{p \in M^{S^1}} \frac{e^{\hbar f(p)}}{\hbar^n e(p)}$$

gdzie $e(p) \in \mathbb{Z}$ jest iloczynem wag reprezentacji stycznej T_pM.

70 Zobaczyć jak wygląda GKM-graf w wielościanie momentu dla $M = Sp_n(\mathbb{C})/B$, tzn dla przestrzeni flag grupy symplektycznej $Sp_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{C})$ dla $n = 2, 3$.
(Inna definicja przestrzeni flag:

$$M = \{(V_1, V_2, \ldots, V_n) \in \prod_{k=1}^{n} G(k, 2n) \mid V_i \subset V_{i+1},\ V_n = V_n^{\perp}\}$$

tzn takie flagi, że V_n jest lagranżowska.)