

Topologia działania torusa

1

1.1 X kompleks symplecjalny (lub inna porządna przestrzeń zwarta, np CW-kompleks). Niech p -grupa P działa na X . Wtedy charakterystyka Eulera punktów stałych $\chi(X^P) \equiv \chi(X) \pmod{p}$.

Dow. Można założyć, że $P = \mathbb{Z}_p$ (bo dla podrupy normalnej $Q < P$ mamy $(X^Q)^{P/Q} = X^P$). Wtedy

$$X = X^P \sqcup U, \quad U = \text{wolne orbity}.$$

$$\chi(X) = \chi(X^P) + \chi_c(U) = \chi(X^P) + p\chi_c(U/P).$$

Patrz teoria Smitha, np Dwyer–Wilkerson Smith theory revisited. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 1, 191–198.

1.2 Twierdzenie nie działa na przestrzeniach niezwartych, np \mathbb{Z}_2 działa na $S^\infty \sim pt$ bez punktów stałych.

1.3 Uwaga: twierdzenie nie jest prawdziwe dla przestrzeni niezwartych wymiarowych. Np $X = S^\infty$ z działaniem \mathbb{Z}_2 przez antypodyzm. Charakterystyka Eulera S^∞ ma sens, bo S^∞ jest ściągalna, ale \mathbb{Z}_2 działa bez punktów stałych.

1.4 X zwarta (porządna) przestrzeń topologiczna $\dim X < \infty$. Torus $T = (S^1)^r$ działa na X . Wtedy $\chi(X) = \chi(X^T)$.

Dow: $X^{S^1} = X^{\mathbb{Z}_p^\infty} = X^{\mathbb{Z}_p^n}$ dla $n \gg 0$.

1.5 W twierdzenie nie działa dla grup nieprzemiennej np $SO(3)$ działające na S^2 .

Przykłady przestrzeni z działaniem torusa

1.6 $X = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ z działaniem $S^1 \subset \mathbb{C}$ przez mnożenie skalarne. (Nie ma punktów stałych, $\chi(X) = 0$.) Ilorazem jest $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$.

1.7 $X = S^{2n} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ z działaniem $S^1 \subset \mathbb{C}$ przez mnożenie skalarne w \mathbb{C}^n . ($\chi(X) = 2$, dwa punkty stałe.)

1.8 Przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, w szczególności $\mathbb{P}^1 = S^2$. Jest $n + 1$ punktów stałych, $\chi(\mathbb{P}^n) = n + 1$. Tu działanie T rozszerza się do działania $T_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^{n+1}$.

1.9 Odwzorowanie „momentu”

$$\mu : \mathbb{P}^n = S^{2n+1}/S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mapsto \frac{1}{\|z\|^2} (|z_0|^2, |z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$$

– obraz jest standardowym sympleksem $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$

– orbity działania $T_{\mathbb{C}}$ to są przeciwobrazy otwartych sympleksów $\sigma \subset \Delta$

1.10 BB-rozkład. W poprzednim przykładzie ograniczamy działanie do $T_{\mathbb{C}} = \{diag(1, t, t^2, \dots, t^n) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$. Też jest $n + 1$ punktów stałych. Zauważmy, że $X^T = X^{T_{\mathbb{C}}}$. Tak jest zawsze dla holomorficznego działania zespolonego torusa na rozmaitości zespolonej.

Dla $p \in (\mathbb{P}^n)^T$ niech

$$(\mathbb{P}^n)_p^+ = \{z \in \mathbb{P}^n \mid \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot z = p\}.$$

$$(\mathbb{P}^n)_p^- = \{z \in \mathbb{P}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot z = p\}.$$

Zbiory $(\mathbb{P}^n)_p^{\pm}$ są otwartymi komórkami rozkładu na CW-kompleks.

$$(\mathbb{P}^n)_{[0:0:\dots:1:0:\dots:0]}^- = \mathbb{P}^i \setminus \mathbb{P}^{i-1} = \{z_i \neq 0, z_{i+1} = z_{i+2} = \dots = z_n = 0\} \simeq \mathbb{C}^i$$

1.11 Kwadryka w \mathbb{P}^n .

n nieparzyste, np $n = 5$,

$$Q = \{z_0 z_5 + z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0\}$$

niezmiennicza ze względu na działanie $T = \{diag(1, t, t^2, t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$.

$Q^T = (\mathbb{P}^5)^T$, rozkład BB:

$$Q_{[1:0:0:0:0:0]}^- = (\mathbb{P}^5)_{[1:0:0:0:0:0]}^- \cap Q = \{[1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]\}$$

$$Q_{[0:1:0:0:0:0]}^- = (\mathbb{P}^5)_{[0:1:0:0:0:0]}^- \cap Q = \{z_1 \neq 0, z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0\} = \{[z_0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0]\}$$

$$Q_{[0:0:1:0:0:0]}^- = (\mathbb{P}^5)_{[0:0:1:0:0:0]}^- \cap Q = \{z_2 \neq 0, z_3 = z_4 = z_5 = 0\} = \{[z_0 : z_1 : 1 : 0 : 0 : 0]\}$$

$$Q_{[0:0:0:1:0:0]}^- = (\mathbb{P}^5)_{[0:0:0:1:0:0]}^- \cap Q = \{z_3 \neq 0, z_4 = z_5 = 0, z_2 z_3 = 0\} = \{[z_0 : z_1 : 0 : 1 : 0 : 0]\}$$

$$Q_{[0:0:0:0:1:0]}^- = (\mathbb{P}^5)_{[0:0:0:0:1:0]}^- \cap Q = \{z_4 \neq 0, z_5 = 0, z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0\} = \{[z_0 : -z_2 z_3 : z_2 : z_3 : 1 : 0]\}$$

$$Q_{[0:0:0:0:0:1]}^- = (\mathbb{P}^5)_{[0:0:0:0:0:1]}^- \cap Q = \{z_5 \neq 0, z_0 z_5 + z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0\} = \{[-z_1 z_4 - z_2 z_3 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : 1]\}$$

$$Q = \mathbb{C}^0 \sqcup \mathbb{C}^1 \sqcup \mathbb{C}^2 \sqcup \mathbb{C}^2 \sqcup \mathbb{C}^3 \sqcup \mathbb{C}^4$$

Ogólnie: $Q = \{\sum_{i=0}^{2k-1} z_i z_{2k-i-1} = 0\}$ ma rozkład na komórki: po jednej w każdym wymiarze, oprócz środkowego. W środkowym dwie komórki.

Np kwadryka w $\mathbb{P}^3 \supset Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (Segre)

1.12 Ćwiczenie: zbadać rozkład BB dla kwadryki nieparzystego wymiaru $Q \subset \mathbb{P}^{2k}$

$$z_0 z_{2k} + z_1 z_{2k-1} + \dots + z_{k-1} z_{k+1} + z_k^2 = 0.$$

(np $k = 1$ $Q \simeq \mathbb{P}^1$)

1.13 Grassmannian zespolony

$$Gr_k(\mathbb{C}^n) = G(k, n) = U(n)/(U(k) \times U(n-k)) = GL_n(\mathbb{C})/(\text{macierze blokowe górnotrójkatne})$$

Inne przedstawienie:

$$G(k, n) = \text{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)_{inj} / GL_k(\mathbb{C}) = \{A \in M_{k \times n}(\mathbb{C}) : A\bar{A}^T = I_k\} / U(k)$$

gdzie $\text{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)_{inj}$ oznacza przekształcenia będące monomorfizmami. Każdy element grassmanianu ma jednoznaczne przedstawienie jako macierz górnotrójkątna zredukowana. Na $G(k, n)$ działa przechodnio $GL_n(\mathbb{C})$. Podgrupa B_- macierzy dolnotrójkątnych działa ze skończoną ilością orbit. Np w $G(2, 4)$ orbity są postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Torus diagonalny $T_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ działa ze skończoną ilością punktów stałych. Jest ich $\binom{n}{k}$. Są indeksowane k -elementowymi podzbiorami $[1, n]$

Rozkład BB dla $\mathbb{C}^* \simeq \text{diag}(t, t^2, \dots, t^n)$: na przykład

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^2* & 0 & t^4* \\ 0 & 0 & t^3 & t^4* \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & t* & 0 & t^3* \\ 0 & 0 & 1 & t* \end{pmatrix}$$

Przy $t \rightarrow 0$ zbiega do punktu stałego. Wniosek: Orbity działania B_- są równe plus-komórkom BB.

1.14 Uwaga

$$G(2, 4) = \{m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23} = 0\}$$

jest kwadryką w $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{P}^5$, via Plücker, m_{ij} to (ij) -ty minor.

Dopełnienie dużej komórki jest zadane równaniem $m_{12} = 0$. To jest rozmaitość Schuberta kowymiaru 1 w $G(2, 4)$. We współrzędnych rzutowych $m_{13}, m_{14}, m_{23}, m_{24}, m_{34}$ jest zadana równaniem $m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23} = 0$. Jest to stożek nad kwadryką w \mathbb{P}^3 . Zatem ma punkt osobliwy.

2 Podstawy

2.1 Niech $T = (S^1)^r$. Niech $\mathfrak{t} = i\mathbb{R}^r \subset \mathbb{C}^r$. Odwzorowanie $\exp : \mathbb{C}^r \rightarrow (\mathbb{C}^*)^r$ zadaje ciąg dokładny

$$0 \rightarrow N \rightarrow \mathfrak{t} \rightarrow T \rightarrow 0,$$

gdzie $N = 2\pi i\mathbb{Z}^r \subset i\mathbb{R}^r = \mathfrak{t}$.

2.2 Homomorfizmy $\text{Hom}(T, S^1)$ są nazywane charakterami. Każdy homomorfizm jest postaci

$$(t_1, t_2, \dots, t_r) \mapsto t_1^{w_1} t_2^{w_2} \dots t_r^{w_r}.$$

Ciąg $(w_1, w_2, \dots, w_r) \in \mathbb{Z}^r$ nazywamy wagą.

$$\mathbf{Wagi} = \mathbf{Charaktery} \simeq \mathbb{Z}^r$$

Możemy uwolnić się od układu współrzędnych.

$$N = \ker(\mathfrak{t} \rightarrow T), \quad \text{gdzie } \mathfrak{t} \text{ jest uniwersalnym nakryciem } T$$

Każdy homomorfizm $\phi : T \rightarrow S^1$ podnosi się jednoznacznie do homomorfizmu $\tilde{\phi} : \mathfrak{t} \rightarrow i\mathbb{R}$ takiego, że $\tilde{\phi}(N) \subset 2\pi i\mathbb{Z} = \ker(i\mathbb{R} \rightarrow S^1)$. Wagi/charaktery zwykle oznacza się przez $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$.

2.3 Ponadto mamy bijekcję $\text{Hom}_{alg}(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^*) \simeq M$.

2.4 Liniowe działanie T na przestrzeni wektorowej \mathbb{C}^n diagonalizuje się.

Dow.:

Element skończonego rzędu diagonalizuje się.

Rodzina elementów skończonego rzędu ma wspólną diagonalizację, bo jest przemienna.

Rodzina elementów skończonego rzędu jest gęsta w T .

2.5 Załóżmy, że $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$. Liniowe działanie $T_{\mathbb{F}} = (\mathbb{F}^*)^r$ na przestrzeni wektorowej \mathbb{F}^n diagonalizuje się.

Dow: tjw, tylko trzeba brać elementy rzędu względnie pierwszego z $\text{char}(\mathbb{F})$ oraz w $T_{\mathbb{F}}$ topologię Zariskiego.

2.6 Z dokładnością do izomorfizmu każde liniowe działanie T jest zadanie przez (multi)zbiór wag. Ponadto mamy rozkład na przestrzenie wagowe

$$V = \bigoplus_{w \in M} V_w.$$

Rozkład można rozdrobnić do rozkładu na składniki liniowe (już niejednoznacznie)

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\dim V} L_{w_i}.$$

Element (klasa Eulera) $\prod_{i=1}^{\dim V} w_i \in \text{Sym}^{\dim V}(M)$ nie zależy od rozkładu. Także produkt (klasa Cherna) $\prod_{i=1}^{\dim V} (1 + w_i) \in \text{Sym}(M)$ nie zależy od rozkładu.

2.7 W geometrii algebraicznej działanie \mathbb{F}^* na rozmaitości afinicznej $\text{Spec}(A)$ jest równoważne zadaniu homomorfizmu algebr

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \otimes \mathbb{F}[t, t^{-1}] \\ a &\mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \otimes t^i \end{aligned}$$

spełniającego pewne własności. Ćwiczenie: sprawdzić, że te własności są równoważne temu, że

$$a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i, \quad a_i b_j = (ab)_{i+j}.$$

Zatem działanie \mathbb{F}^* na $\text{Spec}(A)$ jest tym samym co \mathbb{Z} -gradacja.

2.8 Jeśli A ma \mathbb{N} -gradację, $\text{Proj}(A)$ jest rozmaitością rzutową. Działanie na $\text{Proj}(A)$ jest równoważne zadaniu bigradacji indeksowanej przez $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

2.9 Niech X będzie rozmaitością z gładkim działaniem torusa T . Przypuśćmy, że $x \in X^T$. Wtedy T działa na $T_x X$.

2.10 Stw. Istnieje otocznie $x \in U \subset X$ i odwzorowanie ekwiwariantne $f : U \rightarrow T_x X$, które jest izomorfizmem na obraz.

Dow. Wybieramy T -niezmienniczą metrykę riemannowską na X , $f = \exp^{-1}$.

2.11 Jeśli x jest izolowany, to wagi działania na $T_x X$ są niezerowe.

2.12 Rozkład na przestrzenie wagowe zadaje rozkład wiązki normalnej do X^T .

2.13 Orbita, stabilizator: Niech $x \in X$, stabilizator $T_x = \{t \in T \mid tx = x\}$.

Orbita $Tx \simeq T/T_x$.

Stabilizator działa na wiązkę normalną do orbity. W szczególności na $(N_{X/T_x})_x = T_x X/T_x(Tx)$

2.14 Wiązka stowarzyszona: Niech V reprezentacja grupy G , oraz niech G działa wolno (z lewej) na P z ilorzem $Y = P/G$. Definiujemy

$$P \times^H V = P \times V / \{(ph, v) \sim (p, hv)\}.$$

Rzutowanie $P \times^H V \rightarrow P/H = X$ jest wiązką wektorową.

2.15 Slajs: Zakładamy, że X jest gładka. Niech $V = (N_{X/T_x})_x$ z działaniem T_x . Każda orbita ma otoczenie ekwiwariantnie homeomorficzne z $T/T_x \simeq \{0\} \times^{T_x} T \subset V \times_{T_x} T$.

Dow. Homeomorfizm zadany przez \exp :

$$T \times V \rightarrow X$$

$$(t, v) \mapsto t \cdot \exp(v).$$

\exp jest T_x -niezmienniczy, tzn $\exp(t \cdot v) = t \cdot \exp(v)$ dla $t \in T_x$. Zatem odwzorowanie faktoryzuje się do $V \times^{T_x} T \rightarrow X$. Jest dyfeo w otoczeniu orbity. Ponieważ orbita jest zwarta mamy dyfeo na wiązce dysków o dostatecznie małym promieniu.

2.16 Twierdzenie jest ogólniejsze:

- T nie musi być torusem, może być grupą zwartą G ,
- X nie musi być rozmaitością, wtedy slajs V jest pewną przestrzenią z działaniem stabilizatora G_x
- w geometrii algebraicznej trzeba założyć, że grupa jest reduktywna, działa na rozmaitości afinicznej, a orbita domknięta. Otoczenie jest w topologii étalnej.

2.17 Będziemy rozważać przestrzenie X z działaniem T (lub ogólniej grupy Lie G)

- gładkie rozmaitości z gładkim działaniem
- ekwiwariantne CW-kompleksy

$$X_{-1} = \emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N$$

takie, że

$$X_i = X_{i-1} \cup_\phi (G \times^H D^{n_i}),$$

gdzie D^{n_i} jest dyskiem w reprezentacji liniowej $H \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^{n_i})$, $\phi : G \times^H S^{n_i-1} \rightarrow X_{i-1}$.

(Słaba topologia jak w CW-kompleksach.)

2.18 Przykład: S^2 ze standardowym działaniem S^1 ma 3 komórki $0, \infty$ i $S^1 \times D^1$.

2.19 Ćw: znaleźć ekwiwariantny CW-rozkład \mathbb{P}^n . Wsk, triangulacja obrazu odwzorowania momentu.

3 Przestrzenie klasyfikujące

Kohomologie ekwiwariantne dla G -przestrzeni X : plan działania

- model topologiczny $H_G^*(X) = H^*(EG \times^G X)$
- model różniczkowy gdy X jest rozmaitością $H_{G,dR}^*(X) = H^*(\Omega^*(X, G))$
- Twierdzenie deRhama $H_G^*(X) \simeq H_{G,dR}^*(X)$

3.1 Dla uproszczenia zakładamy, że G jest zwartą grupą. Uniwersalna G -wiązka główna $E \rightarrow B = E/G$

$$\{G\text{-wiązki główne na } X\} = [X, B]$$

dla X CW-kompleksu

- Jeśli $E_1 \rightarrow B_1$ i $E_2 \rightarrow B_2$ dwie uniwersalne wiązki, to są włókniscie słabo homotopijnie równoważne. Oznaczenie $EG \rightarrow BG$.
- Jeśli E jest przestrzenią ściągającą z wolnym działaniem G , to $E \rightarrow E/G$ jest uniwersalną wiązką. Dow. Budujemy przekształcenie $X \rightarrow BG$ rozszerzając po szkieletach.

$$\begin{array}{ccccc} & & \curvearrowright & & \\ G \times S^{n-1} & \longrightarrow & G \times D^n & \dashrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^{n-1} & \longrightarrow & D^n & \dashrightarrow & BG \\ & & \curvearrowright & & \end{array}$$

Wystarczy rozszerzyć przekształcenie $\{1\} \times S^{n-1} \rightarrow EG$ do $\{1\} \times D^n \rightarrow EG$ i użyć działania G .

3.2 Wniosek: $\pi_k(BG) \simeq \pi_{k-1}(G)$

3.3 Przykład:

$$ES^1 = S^\infty \rightarrow \mathbb{P}^\infty = BS^1 \text{ (to jest typu } K(\mathbb{Z}, 2))$$

$$E(S^1)^r = (S^\infty)^r \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^r = B(S^1)^r$$

$$BU(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} G(n, N)$$

3.4 Dla $G = T$ lub $U(n)$ można aproksymować BG zwartymi rozmaitościami mającymi rozkłady na parzysto-wymiarowe komórki.

3.5 Istnieje rozwłóknienie $G/H \rightarrow BH \rightarrow BG$ (przyjąć model $EG = EH$)

3.6 Jeśli $H \triangleleft G$, $K = G/H$ to istnieje rozwłóknienie $BH \rightarrow BG \rightarrow BK$.

(Wybrać model $EH := EG$, oraz $E'G = EG \times EK$, rozważyć rzutowanie $E'G/G \rightarrow EK/K$. Włókno jest izomorficzne z $EG \times^G G/H = BH$.)

3.7 Klasy charakterystyczne dla n -wymiarowych wiązek to naturalne transformacje funktorów

$$Vect_n(-) \rightarrow H^*(-).$$

Lemat Yonedy dla funktorów reprezentowalnych $F_A, F_B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S} \sqcup f$ (kontrawariantnych)

$$Mor_{funktory}(F_A, F_B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B) = F_B(A).$$

Przekształcenie zadane przez

$$(\Theta : F_A \rightarrow F_B) \mapsto \Theta(Id_A) \in Mor_C(A, B)$$

$$(\phi : A \rightarrow B) \mapsto (f \in Mor_C(X, A) \mapsto \phi \circ f).$$

Zatem

$$\text{Klasy charakterystyczne} = H^*(BU(n))$$

$$\mathbf{3.8} \quad H^*(BS^1) = \mathbb{Z}[t],$$

Wniosek

$$\{\text{wiązki liniowe nad } X\} = H^2(X)$$

$$\{\text{klasy charakterystyczne wiązek liniowych}\} = H^*(\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}[t]$$

$$\mathbf{3.9} \quad H^*(BT) = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_r]$$

$$\mathbf{3.10} \quad H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n] = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{S_n}$$

3.11 W dowodzie powyższej równości korzystamy z tw Hirscha oraz z następujących własności rozwłóknień:

Niech $F \rightarrow E \rightarrow B$ będzie rozwłóknieniem takim, że baza i włókno ma rozbitcie na komórki parzystego wymiaru. Wtedy

- Mamy rozkład na komórki E zgodny z rozkładami F i B , włożenie włókna indukuje monomorfizm $H_*(F) \rightarrow H_*(E)$.
- $H^*(E) \rightarrow H^*(F)$ jest epi, i jest rozszczepialne.

Stosując tw Leray-Hirsha:

- $H^*(E)$ jest wolnym modulem na $H^*(B)$ o bazie indeksowanej komórkami F , $H^*(E) \simeq H^*(B) \otimes H^*(F)$
- $H^*(F) \simeq H^*(E)/(H^{>0}(B))$ jako algebra (można też napisać $H^*(F) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{H^*(B)} H^*(E)$)

3.12 Rozkład komórkowy $G(k, n)$. Komórki są indeksowane ciągami indeksów na których stoi 1 w zredukowanej macierzy

$$0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \quad i_1 = 1, i_2 = 3$$

Równoważnie

$$(n - k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0) = \text{ilości } * \text{ w rzędach zredukowanej macierzy.}$$

3.13 Obliczenie $H^*(BU(n))$. Baza rozwłóknienia $U(n)/T \rightarrow BT \rightarrow BU(n)$ ma rozkład na komórki parzystowymiarowe, włókno też, zatem $H^*(BU(n)) \rightarrow H^*(BT)$ jest monomorfizmem. Obraz jest niezmienniczy ze względu na S_n . Liczymy rangi (lub wymiary nad \mathbb{Q}):

- $\dim H^{2k}(BU(n)) =$ ilość ciągów $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ bez ograniczenia na wartość λ_1 , takich, że $\sum_i \lambda_i = k$ (ilość podziałów liczby k o długości $\leq n$)
- $\dim H^{2k}(BT)^{S_n} = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]_k^{S_n} =$ ilość jednomianów stopnia k o niemalejących wykładnikach.

Rangi są równe, więc $H^{2k}(BU(n)) = H^{2k}(BT)^{S_n}$

Ponadto $H^*(Fl(n)) = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]/(H^{>0}(BU(n)))$ jest beztorsyjne. Zatem $H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{S_n}$

3.14 Pierścień kohomologii $H^*(Fl(n)) \simeq \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]/(\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]_{>0}^{S_n})$

3.15 Ćw: Obliczyć pierścień kohomologii $H^*(G(k, n))$ korzystając z rozwłóknienia $G(k, n) \rightarrow B(U(k) \times U(n-k)) \rightarrow BU(n)$.

3.16 Jeśli G jest spójna, $T = NT/T$ torus maksymalny, W grupa Weyla to $H^*(BG; \mathbb{Q}) = H^*(BT; \mathbb{Q})^W$ jest pierścieniem wielomianów od zmiennych w parzystych gradacjach. Np $H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n]$, $H^*(BO(2n)) = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots, p_n, e]/(e^2 = p_n)$.

4 Ekwiwariantne kohomologie

Przypomnienie o klasach Cherna

4.1 $c_1 \in \text{Mor}_{\text{funktor}}(\text{Vect}_1, H^2(-, \mathbb{Z})) = H^2(K(\mathbb{Z}, 2)) = H^2(BS^1) = H^2(\mathbb{P}^\infty) = H^2(\mathbb{P}^1)$ Wybieramy generator $H^2(\mathbb{P}^1)$ tak by $c_1(\mathcal{O}(1)) = [pt]$. (Wiązka $\mathcal{O}(1) = \gamma^*$ to wiązka dualna do tautologicznej.)

4.2 Aksjomaty klas Cherna $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_{rk(E)}(E)$.

– funktorialność

– dla wiązek liniowych $c(L) = 1 + c_1(L)$

– formuła Whitneya $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$

4.3 Dodatkowo dla wiązek liniowych $c_1(L_1) \otimes c_1(L_2) = c_1(L_1)c_1(L_2)$

4.4 Jeśli L jest holomorficzną wiązką liniową nad rozmaitością zespoloną, s przekrój wiązki, generycznie transwersalny do przekroju zerowego, to $c_1(L)$ jest klasą Poincaré dualną do $\text{Zero}(s)$.

4.5 *Projective bundle theorem.* Jeśli $E \rightarrow B$ wiązka wektorowa, $\mathbb{P}(E) \rightarrow B$ urzutowanie, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$ wiązka tautologiczna, wtedy $H^*(\mathbb{P}(E))$ jest modułem wolnym nad $H^*(B)$ o bazie $\zeta^i = c_1(L)^i$ dla $i = 1, 2, \dots, r-1 = rk(E) - 1$. Piszemy

$$\zeta^r + a_1\zeta^{r-1} + \dots + a_{r-1}\zeta + a_r = 0.$$

Wtedy $a_i = c_i(E)$.

4.6 Wniosek: znając klasy Cherna E i pierścień kohomologii $H^*(B)$ umiemy policzyć pierścień kohomologii

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = H^*(B)[\zeta]/(\zeta^r + c_1\zeta^{r-1} + \dots + c_{r-1}\zeta + c_r).$$

4.7 Zasada rozszczepiania: dla każdej wiązki wektorowej $E \rightarrow B$ istnieje $q : B' \rightarrow B$, takie, że q^*E jest sumą wiązek liniowych oraz f^* jest mono na kohomologiach:

$$B' = \text{Flagi}(E) = B \times_{BU(n)} BT,$$

gdzie T jest maksymalnym torusem w $U(n)$.

4.8 Konstrukcja Borela $X_G = EG \times^G X$.

4.9 Dla $H \subset G$, $X = G/H$ mamy $X_G = EG \times^G G/H \simeq EG/H \sim BH$.

(bo mamy przekształcenie $EG/H \rightarrow EG \times^G G/H$, $[e] \mapsto [(e, [1])]$)

4.10 Kohomologie ekwiwariantne dla przestrzeni topologicznej

$$H_G^*(X) := H^*(X_G) = H^*(EG \times^G X)$$

To jest moduł nad $H_G^*(pt) = H^*(BG)$

4.11 Przykład $H_T^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[t_0, t_2, \dots, t_n, \zeta] / (\prod_{i=0}^n (t_i + \zeta))$

4.12 Przykład: S^1 działające na S^2 przez z^2

$X_T = \mathbb{P}(\gamma \oplus \mathbb{1})$, $H_T^*(S^2) = \mathbb{Z}[h, t] / (h^2 + hc_1 + c_2)$, $c_2 = 0$, $c_1 = 2t$, gdzie t jest generatorem $H^2(BT)$, $h = c_1(\mathcal{O}(1))$ czyli $= \mathbb{Z}[h, t] / (h^2 + 2th)$. To jest wolny moduł nad \mathbb{Z} . 1 i h generuje, bo $th \in \mathbb{Z}[t] + \mathbb{Z}[t]h$.

4.13 Funktorialność kontrawariantna ze względu na X i G (kowariantna), bo biorąc $EH := EG$ mamy $X_H = EG \times^H X \rightarrow EG \times^G X$.

4.14 Jeśli G działa wolno, to $X_G \rightarrow X/G$ jest rozwłóceniem ze ściągającym włóknem EG , więc $H_G^*(X) = H^*(X/G)$.

(Bo dla ustalonego $[x] \in X/G$ odwzorowanie $EG \ni e \mapsto [(e, x)] \in EG \times^G X$ jest mono).

$([(e, x)] = [(e', gx)]) \equiv ((e, x) = (e'g^{-1}, x)) \equiv (g = 1)$

4.15 Jeśli X ma rozbitcie na kohomologie jedynie parzystego wymiaru to $H_T^*(X, \mathbb{Z})$ jest wolnym modułem nad $H_T^*(pt; \mathbb{Z})$.

4.16 Wniosek: przy założeniu jak wyżej

- $H^*(X) \otimes H_T^*(pt) \simeq H_T^*(X)$
- $H_T^*(X) \otimes_{H_T^*(pt)} \mathbb{Q} \simeq H^*(X)$

5 Ekwiwariantna formalność, lokalizacja

5.1 Można uogólnić 4.15 na przypadek gdy $H^{odd}(X) = 0$, ale trzeba zakładać, że $H^*(X)$ bierzemy kohomologie o współczynnikach w \mathbb{Q} .

5.2 Def: Przestrzeń ekwiwariantnie formalna dla działania torusa, kohomologie o współczynnikach w \mathbb{Q} (lub \mathbb{R} , \mathbb{C})

- $H_T^*(X) \rightarrow H^*(X)$ jest epi
 - $H_T^*(X)$ jest wolnym modułem nad $H_T^*(pt)$ i $H_T^*(X) \otimes_{H_T^*(pt)} \mathbb{Q} \simeq H^*(X)$ jako moduł nad $H_T^*(pt)$.
- (z Twierdzenia Leray-Hirscha te warunki są równoważne).

5.3 Ćwiczenie. Trzeci warunek równoważny:

- $H_T^*(X)$ jest wolny nad $H_T^*(pt)$.

5.4 Twierdzenie. Jeśli X jest gładką zwartą rozmaitością algebraiczną, na której działa torus algebraiczny $T_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^r$ to X jest ekwiwariantnie formalna.

5.5 Twierdzenie (pojęcia będą wyjaśnione później). Jeśli X jest rozmaitością symplektyczną, na której torus działa hamiltonowsko to X jest ekwiwariantnie formalna.

5.6 Korespondencje:

$$\text{Hom}(H^*(Y), H^*(X)) \simeq (H^*(Y))^* \otimes H^*(X) \stackrel{\text{Poincaré}}{\simeq} H^*(Y) \otimes H^*(X) \stackrel{\text{Künneth}}{\simeq} H^*(X \times Y).$$

Mając klasę w kohomologiach $a \in H^k(X \times Y)$ definiujemy $\phi_a : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(Y) & & H^i(X \times Y) & & H^{i+k}(X \times Y) & & H^{i+k-\dim Y}(X) \\ y & \mapsto & \pi_Y^* y & \mapsto & a \cup (\pi_Y^* y) & \mapsto & \pi_{X*}(a \cup (\pi_Y^* y)). \end{array}$$

Odwzorowanie π_{X*} definiowane jest przez izomorfizm Poincaré.

Jeśli $a = [\text{graph}(f)]$ dla $f : X \rightarrow Y$, to $k = \dim Y$ i $\phi_a = f^*$.

Nie trzeba zakładać, że X jest zwarta.

5.7 5.4 Dowód: niech $B_n T = (\mathbb{P}^n)^r$, $X_{T,n} = (\mathbb{C}^{n+1} - 0)^r \times^T X$ jest aproksymacją konstrukcji Borela. Dowodzimy, że $H^*(X_{T,n}) \rightarrow H^*(X)$ jest epi i ponadto, że $H^*(X_{T,n+1}) \rightarrow H^*(X_{T,n})$ Wiązka $(\mathbb{C}^{n+1} - 0)^r \rightarrow (\mathbb{P}^n)^r$ jest trywialna nad zbiorem otwartym w topologii Zariskiego U :

$$U \times X \subset X_{T,n}.$$

Rzutowanie $U \times X \rightarrow X$ rozszerza się do korespondencji $\phi : X_{T,n} \rightarrow X$ (cyklu w produkcie $X_{T,n} \times X$)

$$a = [\text{domknięcie}(\text{graph}(U \times X \rightarrow X))].$$

Korespondencja a zadaje przekształcenie $\phi_a : H^*(X) \rightarrow H^*(X_{T,n})$.

$$\begin{array}{ccccc} & & H^*(U \times X) & \longleftarrow & H^*(X_{T,n}) \\ (\phi_a)|_{U \times X} = \pi_X^* & & \uparrow & & \uparrow & \phi_a \\ & & H^*(X) & = & H^*(X) \end{array}$$

$i^* \phi^* = \text{id}_{H^*(X)}$ bo $i^* \pi_X^* = \text{id}_{H^*(X)}$

Z Leray-Hirsha wynika, że $H^*(X_{T,n})$ jest generowane przez $\phi^*(H^*(X))$ i $H^*(B_n T)$, zatem system odwrotny

$$\dots \longleftarrow H^*(X_{T,n}) \longleftarrow H^*(X_{T,n+1}) \longleftarrow \dots$$

jest systemem epimorfizmów. Zatem $H^*(X_T) \rightarrow H^*(X)$ jest epi. Stąd $H_T^*(X) = H^*(X_T)$ jest modulem wolnym nad $H_T^*(pt)$.

5.8 Przykład przestrzeni, która nie jest ekwiwariantnie formalna: $X = T/G$, gdzie $G \neq T$:

$$H_T^*(T/G) = H^*(ET \times^T T/G) = H^*(ET/G) = H^*(BG).$$

Niech T_1 będzie składową spójności G . Możemy wybrać podtorus $T_2 \subset T$ taki, że $T = T_1 \times T_2$. Gdy współczynniki są \mathbb{Q} , to $H^*(BG) = H^*(BT_1)$. Działanie drugiego czynnika w

$$H^*(BT) = H^*(BT_1 \times BT_2) = H^*(BT_1) \otimes H^*(BT_2)$$

jest trywialne. Zatem $H_T^*(T/G)$ jest torsyjnym $H_T^*(pt)$ modulem.

5.9 Lokalizacja. Niech X będzie skończonym ekwiwariantnym CW kompleksem dla działania torusa T . Wtedy jądro i kojądro odwzorowania obciążenia $H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(X^T)$ są torsyjnymi $H_T^*(pt)$ -modułami.

5.10 Inne sformułowanie: niech $\Lambda = H_T^*(pt)$, K =ciało ułamków: obciążenie indukuje izomorfizm

$$K \otimes_{\Lambda} H_T^*(X) \simeq K \otimes_{\Lambda} H_T^*(X^T).$$

5.11 Niech M będzie Λ -modułem (gdzie Λ jest dziedziną). Lokalizacja

$$K \otimes_{\Lambda} M = \left\{ \frac{m}{a} \mid a \neq 0 \right\} / \sim$$

$$\frac{m_1}{a_1} \sim \frac{m_2}{a_2} \Leftrightarrow \exists b \in \Lambda^* \quad ba_2m_1 = ba_1m_2.$$

5.12 Lemat: Funktor lokalizacji jest dokładny (także dla innych systemów multiplikatywnych).

5.13 Dowód 5.9 Wystarczy pokazać, że jeśli X powstaje z Y poprzez doklejenie komórki typu $T \times_G D$, gdzie $G \neq T$ to $H_T^*(X, Y)$ jest torsyjnym Λ -modułem:

$$H_T^*(X, Y) \simeq H_T^*(T \times_G D, T \times_G S) \simeq H_G^*(D, S).$$

Tu działanie Λ faktoryzuje się przez działanie $H_T^*(T/G) = H_G^*(pt) = \Lambda / (\text{charaktery zerujące się na } G)$, zatem jest torsyjne.

5.14 Uwaga (Ćwiczenie): To całkowicie nie działa dla grup nieprzemiennej, bo naogół orbity nie mają torsyjnych kohomologii. (np $GL_n(\mathbb{C})/T_n$)

5.15 Przkład: \mathbb{P}^1 z działaniem naturalnym $T = (S^1)^2$

$$H_T^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[t_0, t_1, \zeta] / ((t_0 + \zeta)(t_1 + \zeta))$$

5.16 Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, to wszystkie odwzorowania w poniższym kwadracie są morfizmami

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(X) & \longrightarrow & H_T^*(X^T) \simeq \bigoplus_{x \in X^T} \Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \otimes_{\Lambda} H_T^*(X) & \xrightarrow{\simeq} & K \otimes_{\Lambda} H_T^*(X^T) \simeq \bigoplus_{x \in X^T} K \end{array}$$

5.17 Załóżmy, że X jest ekwiwariantnie formalna, $|X^T| < \infty$. Pytanie: jak opisać obraz $H_T^*(X) \hookrightarrow \bigoplus_{x \in X^T} \Lambda$? (odpowiedź będzie później: GKM grafy).

5.18 Przykład: (ćwiczenie) $X = \mathbb{P}^n$, T tak jak zawsze, obraz

$$H_T^*(\mathbb{P}^n) \hookrightarrow \bigoplus_{k=0}^n \Lambda = \Lambda^{n+1}$$

skła się z takich ciągów $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_n]^{n+1}$, że $t_i - t_j$ dzieli $x_i - x_j$.

5.19 Załóżmy, że X jest ekwiwariantnie formalna, $|X^T| < \infty$. Pytanie: jak odtworzyć element α znając obciążenia $\alpha_{\{x\}} \in \Lambda$?

Odpowiedź – Twierdzenie Beline-Vergne, Atiyah-Bott. Załóżmy, że X jest zwartą rozmaitością.

$$\alpha = \sum_{x \in X^T} (i_x)_* \left(\frac{i_x^* \alpha}{e(T_x X)} \right)$$

gdzie $i_x : \{x\} \rightarrow X$. Jeśli $T_x X = \bigoplus_{i=1}^{\dim(X)} L_i$, składnik $L_i \simeq \mathbb{C}$ z działaniem T przez charakter w_i , to $e(T_x X) = \prod_{i=1}^{\dim(X)} w_i$, patrz 2.6.

5.20 Wniosek (przy założeniach jak wyżej):

$$\int_X \alpha = \sum_{x \in X^T} \frac{i_x^* \alpha}{e(T_x X)}.$$

5.21 Przykład: $X = \mathbb{P}^n$, $\alpha = (c_1(\mathcal{O}(1)))^n$

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-t_i)^n}{\prod_{j \neq i} (t_j - t_i)} = ?$$

6 Lokalizacja II

6.1 Wniosek: Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, to $H^{even}(X) \simeq H^{even}(X^T)$ i $H^{odd}(X) \simeq H^{odd}(X^T)$

6.2 Niech $f : X \rightarrow Y$ odwzorowanie zorientowanych rozmaitości. gdzie $f_* : H^*(X) \rightarrow H_T^*(Y)$ odwzorowanie otrzymane przez dualność Poincaré

$$PD_X : H^k(X) \rightarrow H_{\dim X - k}(X)$$

$$a \mapsto a \cap [X],$$

Definiujemy f_* jako złożenie

$$\begin{array}{ccccccc} H^k(X) & \xrightarrow{\cong} & H_{\dim X - k}(X) & \rightarrow & H_{\dim X - k}(Y) & \xrightarrow{\cong} & H^{\dim Y - \dim X + k}(Y) \\ a & \mapsto & a \cap [X] & \mapsto & f_*(a \cap [X]) & \mapsto & f_*(a) \end{array}$$

6.3 Inna konstrukcja f_* dla włożenia. Niech U będzie otoczeniem tubularnym X w Y , tzn U jest dyfeomorficzne z przestrzenią wiązki normalnej $\pi : \nu \rightarrow X$, $c = \text{codim} X$. Niech $\tau \in H^c(U, U \setminus X)$ będzie klasą Thoma. Oznacza to, że τ obciąża do włókna wiązki normalnej $U \simeq \nu \rightarrow X$ jest generatorem $H^c(\mathbb{R}^c, \mathbb{R}^c \setminus \{0\})$. Definiujemy f_* :

$$H^k(X) \xrightarrow{\text{Thom}} H^{c+k}(U, U \setminus X) \simeq H^{c+k}(Y, Y \setminus X) \rightarrow H^{c+k}(Y).$$

Wykorzystuje się tu izomorfizm Thoma $H^k(X) \xrightarrow{\cong} H^{c+k}(U, U \setminus X)$, $a \mapsto \pi^*(a) \cup \tau$.

6.4 Żeby udowodnić, że obie konstrukcje są równoważne trzeba pokazać, że $\tau \cap [U] = [X] \in H_{\dim X}(U) \simeq H_{\dim X}(X)$. Tu $[U] \in H_{\dim Y}(\bar{U}, \partial U)$ jest klasą orientacji.

6.5 Niech $e(\nu) \in H^c(X)$ będzie klasą Eulera

$$e(\nu) = i^*(\tau).$$

Mamy $i^* i_*(a) = a \cup e(\nu)$.

Rachunek w kohomologiach U : Bo $i^* i_*(a) = i^*(\pi^*(a) \cup \tau) = i^* \pi^*(a) \cup i^* \tau = a \cup e(\nu)$.

6.6 Jeśli $X \subset Y$ niezmiennicza podrozmaitość. Definiujemy i_* tak jak w (6.3). Definiujemy ekwiwariantną klasę fundamentalną jako $i_*(1_X)$.

6.7 Załóżmy, że X jest rozmaitością z działaniem torusa, $i : X^T \rightarrow X$ włożenie,

$$i^* : K \otimes_{\Lambda} H_T^*(X) \xrightarrow{\cong} K \otimes_{\Lambda} H_T^*(X^T).$$

Złożenie $i_* i^*$ jest mnożeniem przez klasę Eulera wiązki normalnej do X^T . (Nad każdą składową punktów stałych ta wiązka ma inny wymiar.)

6.8 Lemat podstawowy: $e(\nu) \in H_T^*(X)$ jest elementem odwracalnym w $K \otimes_\Lambda H_T^*(X)$. Trzeba to sprawdzić na każdej składowej $F \subset X^T$.

6.9 Jeśli $F = \{x\}$ jest punktem,

$$e(\nu)|_F = \prod_i w_i \in Z[t_1, t_2, \dots, t_r],$$

gdzie w_1, \dots, w_c są wagami działania na $\nu_F = T_x X$. Wagi są niezerowe, więc ich produkt jest odwracalny w ciele.

6.10 Dowód dla sytuacji ogólnej: Mamy rozkład $\nu = \bigoplus_{w \in \mathcal{W}} \nu_w$. Możemy założyć, że ν_w jest wiązką zespoloną. Każdą z wiązek ν_w dopełniamy do wiązki trywialnej μ_w .

$$\nu_w + \mu_w = \mathbb{1}^{d_w} \quad \text{z działaniem } T \text{ przez } w$$

Niech $\mu = \bigoplus_w \mu_w$ Wtedy

$$e(\nu \oplus \mu) = \prod_{w \in \mathcal{W}} w^{d_w}$$

$$e(\nu) \cdot \left(e(\mu) / \prod_{w \in \mathcal{W}} w^{d_w} \right) = 1.$$

6.11 Twierzenie o lokalizacji (Atiyah-Bott, Berline-Vergne, dowód wg Edidin-Graham lub Anderson). Załóżmy, że X jest zwartą T -rozmaitością, która jest ekwiwariantnie formalna. Wtedy dla $a \in H_T^* * X$

$$a = \sum_F (i_F)_* \left(\frac{i_F^*(a)}{e(\nu(F))} \right).$$

Sumowanie jest po składowych X^T , $i_F : F \rightarrow X$ jest włożeniem.

Dw. Niech ϕ będzie złożeniem

$$K \otimes_\Lambda H_T^*(X) \xrightarrow{i_*} \bigoplus_F K \otimes_\Lambda H_T^*(F) \xrightarrow{1/e(\nu)} \bigoplus_F K \otimes_\Lambda H_T^*(F).$$

Zauważmy, że $i_* \circ \phi = Id$. Skoro $K \otimes_\Lambda H_T^*(X)$ jest skończenie wymiarową przestrzenią nad K , zatem mamy też $\phi \circ i_* = Id$. Czyli mamy równość w $K \otimes_\Lambda H_T^*(X)$. Ale $H_T^*(X) \subset K \otimes_\Lambda H_T^*(X)$.

6.12 Z poprzedniego wykładu wiemy, że i^* jest izomorfizmem dla przestrzeni zwartej. Tu otrzymaliśmy inny dowód dla rozmaitości.

6.13 Rozmaitość X nie musi być zwartą, może być wnętrzem zwartej rozmaitości z brzegiem, ale zakładamy, że X^T jest zawarta.

6.14 Nie trzeba odwracać wszystkich elementów Λ , wystarczy charaktery wiązki normalnej do X^T

6.15 Wniosek, formuła całkowa: Niech $p_X : X \rightarrow pt$. Przy założeniach jak wyżej (X zwarta, zorientowana)

$$\int_X a := (p_X)_*(a) = \sum_F (p_F)_* \left(\frac{i_F^*(a)}{e(\nu(F))} \right) \in \Lambda.$$

(Uwaga: wynik jest w Λ choć składniki są w K .)

6.16 W szczególności gdy $|X^T| < \infty$

$$\int_X a = \sum_{p \in X^T} \frac{a|_p}{\epsilon(T_p X)}$$

6.17 Żeby zastosować efektywnie powyższą formułę trzeba znać wagi działania na przestrzeni stycznej.

6.18 Przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^{n-1} = G(n-1, n)$. Niech $Q = \mathbb{1}^n / \gamma = \mathcal{O}(1)$ będzie wiązką ilorazową:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^{n-1}} c_1(Q)^{k+n-1} &= \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{k+n-1}}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z=t_i} \frac{z^{k+n-1}}{\prod_{i=1}^n t_i - t_j} = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{z^{k+n-1}}{\prod_{i=1}^n (z - t_j)}. \end{aligned}$$

Zamieniamy zmienne $z = 1/w$ i patrzymy na współczynnik przy w w

$$\frac{w^{-(k+n-1)}}{\prod_{i=1}^n (1/w - t_j)} = \frac{w^{-(k-1)}}{\prod_{i=1}^n (1 - wt_j)} = w^{-(k-1)} \prod_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} (wt_j)^\ell$$

Czyli współczynnik przy w^k w

$$\prod_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} (wt_j)^\ell$$

Wynik:

$$h_k = \sum_{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = k} t_1^{\ell_1} t_2^{\ell_2} \dots t_n^{\ell_n}$$

To jest *pełna funkcja symetryczna*.

7 Rachunki na funkcjach symetrycznych

7.1 Wynika z formuły ABBV wzór na charakterystykę Eulera $\chi(X) = \chi(X^T)$ (także gdy punkty nie są izolowane).

7.2 Elementarne funkcje symetryczne σ_i , oznaczane przez e_i . Pierścień funkcji symetrycznych

$$\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_n]$$

gdzie $e_k = \sigma_k(t_1, t_2, \dots, t_n)$ jest elementarną funkcją symetryczną, $e_0 := 1$

$$\prod_{i=1}^n (1 - t_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i e_i.$$

7.3 Mamy

$$\sum_{i \geq 0} h_i \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i e_i = 1$$

7.4 Przestrzeń styczna do grassmannianu $G(k, n)$: niech $\gamma \subset \mathbb{1}^n$ będzie wiązką tautologiczną. Określamy przekształcenie wiązek

$$\operatorname{Hom}(\gamma, \mathbb{1}^n) \rightarrow TG(k, n)$$

Definiujemy krzywą

$$x_f(t) \mapsto \text{obraz}(t + tf)$$

(dobrze określona dla małych t). Przekształcenie wiązek zadane jest wzorem

$$\Phi(f) = \dot{x}_f(0).$$

Przekształcenie jest określone globalnie, niezmienniczo ze względu na przekształcenia \mathbb{C}^n . Lokalnie sprawdzamy, że jest epimorfizmem: jeśli $V \in G(k, n)$, $\mathbb{C}^n = V \oplus W$, to każda podprzestrzeń w otoczeniu V jest wykresem pewnego przekształcenia $V \rightarrow W$. Jądrem Φ jest $Hom(\gamma, \gamma)$. Zatem mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \rightarrow Hom(\gamma, \gamma) \rightarrow Hom(\gamma, \mathbb{1}^n) \rightarrow TG(k, n) \rightarrow 0$$

Punkty stałe $G(k, n)$ są indeksowane przez podzbiory k -elementowe $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Wagi działania torusa w p_I to $\{t_j - t_i\}_{i \in I, j \in I^V}$

7.5 Niech $L = \Lambda^k Q$ na $G(k, n)$. To jest $\mathcal{O}(1)$ przy zanurzeniu Plückera.

$$\int_{G(k, n)} c_1(L)^k = \sum_{I \subset \underline{n} \mid |I|=k} \frac{(\sum_{i \in I} t_i)^{k(n-k)}}{\prod_{i \in I} \prod_{j \in I^V} (t_j - t_i)}$$

7.6 Niech $a \in H_T^*(G(k, n))$ będzie dane jako wielomian $W(c_1(\gamma), c_2(\gamma), \dots, c_k(\gamma), c_1(Q), c_2(Q), \dots, c_{n-k}(Q))$ zapisany jako funkcja symetryczna ze względu na dwie grupy zmiennych. Tu $Q = \mathbb{1}^n/\gamma$ jest wiązką ilorazową. Wtedy

$$\int_{G(k, n)} a = \sum_{I \subset \underline{n} \mid |I|=k} \frac{W(t_I, t_{I^V})}{\prod_{i \in I} \prod_{j \in I^V} (t_j - t_i)}$$

gdzie $I^V = \underline{n} \setminus I$.

7.7 Punkty stałe przestrzeni flag $Fl_n = GL_n(\mathbb{C})/B_+$ są indeksowane permutacjami. Punkt odpowiadający identycznościowej permutacji to standardowa flaga. Mamy odwzorowanie ilorazowe $GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow Fl_n$. Jest ono ekwiwariantne ze względu na działanie torusa na $GL_n(\mathbb{C})$ przez sprzężenia. W przeciwobrazie standardowej flagi V_0 jest I . Na przestrzeniach stycznych mamy

$$T_{V_0} Fl_n = T_I GL_n(\mathbb{C})/T_1 B_+.$$

To jest izomorfizm ekwiwariantny. Zatem wagi działania torusa na $T_{V_0} Fl_n$ są takie jak $T_I GL_n(\mathbb{C}) = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ pod przekątną. Czyli $t_j - t_i$ dla $i < j$.

7.8 $X = Fl(\mathbb{C}^n)$, całkujemy klasę kohomologii $\prod_{i=1}^n c_1(L_i)^{\alpha_i}$

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \frac{\prod_{i=1}^n t_{\sigma(i)}^{\alpha_i}}{\prod_{i < j} (t_{\sigma(j)} - t_{\sigma(i)})} = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{\alpha_1} & t_1^{\alpha_2} & \dots & t_1^{\alpha_n} \\ t_2^{\alpha_1} & t_2^{\alpha_2} & \dots & t_2^{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n^{\alpha_1} & t_n^{\alpha_2} & \dots & t_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1^{n-1} & t_1^{n-2} & \dots & 1 \\ t_2^{n-1} & t_2^{n-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n^{n-1} & t_n^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}}$$

Jeśli brać ciągi rosnące, to dostajemy funkcje Schura S_λ indeksowane ciągami nierosnącymi

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & < & \alpha_2 & < & \alpha_3 & < & \dots < & \alpha_n \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & & \parallel \\ \lambda_n & & \lambda_{n-1} + 1 & & \lambda_{n-2} + 2 & & \dots & \lambda_1 + n - 1 \end{array}$$

$$\alpha_{k+1} = \lambda_{n-k} + k$$

To jest baza funkcji symetrycznych, indeksowana podziałami $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0)$

$$S_\lambda = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{n-1+\lambda_1} & t_1^{n-2+\lambda_2} & \dots & t_1^{\lambda_n} \\ t_2^{n-1+\lambda_1} & t_2^{n-2+\lambda_2} & \dots & t_2^{\lambda_n} \\ \vdots & & & \\ t_n^{n-1+\lambda_1} & t_n^{n-2+\lambda_2} & \dots & t_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1^{n-1} & t_1^{n-2} & \dots & 1 \\ t_2^{n-1} & t_2^{n-2} & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ t_n^{n-1} & t_n^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\text{Uogólniony Vandermonde}}{\text{Vandermonde}}$$

[Kiedyś robiłem to na GALu z *].

7.9 Ćw: Przyjmujemy konwencję $h_i = 0$ dla $i < 0$

$$S_\lambda = \det(h_{\lambda_i + j - i})$$

8 Przestrzenie GKM (bąbelkowe)

8.1 Lemat [Chang, Skjellbred] Niech $F = X^T$, Y – suma jednowymiarowych orbit. Obraz lokalizacji: jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, to

$$0 \rightarrow H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(F) \rightarrow H_T^{*+1}(Y, F)$$

jest dokładny.

Lemat jest równoważny stwierdzeniu

$$\ker(H_T^*(F) \rightarrow H_T^{*+1}(Y, F)) = \ker(H_T^*(F) \rightarrow H_T^{*+1}(X, F)).$$

Nie dowodzimy tego lematu w pełnej ogólności, ale dla przestrzeni „bąbelkowych”. Żeby dowiedzieć się więcej patrz np: Matthias Franz, Volker Puppe, Exact sequences for equivariantly formal spaces, arXiv:math/0307112

8.2 Przestrzenie GKM (czyli bąbelkowe): X zwarta rozmaitość zespolona z działaniem torusa zespolonego $(\mathbb{C}^*)^r$. Zakładamy, że $|X^T| < \infty$ oraz istnieje skończenie wiele orbit jednowymiarowych. Dodatkowo zakładamy, że X jest ekwiwariantnie formalna (np X jest algebraiczna).

8.3 Gdy $|X^T| < \infty$ oraz dla każdego $x \in X^T$ żadne dwie wagi reprezentacji $T_x X$ nie są proporcjonalne, to istnieje skończenie wiele orbit T jednowymiarowych. (Odwrotnie wyznikanie też zachodzi.)

Dw. Bo analitycznie lokalnie (X, p) z polami wektorowymi pochodzącymi od działania zwartego torusa T jest izomorficzna z $T_x X$.

8.4 Graf GKM (V, E, w) ,

- $V = X^T$ wierzchołki
- E krawędzie to orbity 1-wymiarowe. Po ustaleniu izomorfizmu orbity z \mathbb{C}^* graf jest skierowany.
- krawędzie ℓ markowane są charakterami T $w_\ell : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ poprzez które T działa na orbity.

8.5 Lemat podstawowy: gdy $X = \mathbb{P}^1$, T działa przez charakter $f \in \Lambda$. Wtedy

$$H_T^*(X) = \{(u_0, u_\infty) \in \Lambda^2 \mid u_0 \equiv u_\infty \pmod{f}\}$$

8.6 Dowod Lematu Changa-Skjelbreda w szczególnej sytuacji, dla przestrzeni GKM.

1. Na każdej orbicie jednowymiarowej T działa przez charakter $w_\ell \in \Lambda = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \dots, t_r]$.
2. Niech $w = w_\ell$ dla pewnej orbity ℓ . Definiujemy $X_w = X^T \cup$ (suma orbit jednowymiarowych z działaniem T poprzez kw , $k \in \mathbb{Q}$).

Przy naszych założeniach $X_w = X^T \cup$ (rozłączna suma \mathbb{P}^1)

3. $\phi :=$ produkt wszystkich charakterów pojawiających się w punktach stałych (nie odróżniamy proporcjonalnych), $\psi := \phi/w$
4. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ będzie bazą nad Λ wolnego modułu $H_T^*(X)$. (Jest wolny z założenia.) Utożsamiamy ten moduł z podmodułem $H_T^*(X^T) \simeq \bigoplus_{x \in X^T} \Lambda$. Układ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ jest też bazą $K \otimes_\Lambda H_T^*(X^T) = K \otimes_\Lambda H_T^*(X)$ nad K . Niech $\{u_x\} = \sum \frac{r_i}{s_i} \varepsilon_i$ będzie zapisem z nieskracalnymi ułamekami $\frac{r_i}{s_i}$ (zapis jest jednoznaczny z dokładnością do skalarów z \mathbb{Q}). Czynniki mianowników s_i to charaktery (mamy $\phi_{\frac{r_i}{s_i}} \in \Lambda$, ale nie korzystamy z tego w dowodzie).

5. Niech $\{u_x\} := \{u_x\}_{x \in X^T} \in H_T^*(X^T) \simeq \bigoplus_{x \in X^T} \Lambda$ spełnia warunek podzielności dla każdej krawędzi ℓ

$$w_\ell \mid u_{s(\ell)} - u_{t(\ell)},$$

gdzie $s(\ell)$ oznacza koniec krawędzi, a $t(\ell)$ początek.

6. Twierdzimy, że iloczyn $\{\psi u_x\}$ należy do $H_T^*(X)$, a dokładniej należy do obrazu $H_T^*(X_w) \rightarrow H_T^*(X)$.

Rzeczywiście: jeśli z punktu x nie wychodzi orbita z charakterem proporcjonalnym do w , to składnik ψu_x jest równy $(\iota_x)_*(\psi/e(x) u_x)$, gdzie $e(x)$ jest klasą Eulera w x . Jeśli punkty x i y są połączone krawędzią odpowiadającą orbicie, na której T działa przez charakter kw , to $e(\nu_x) = e(x)/kw$ i $e(\nu_y) = e(y)/kw$ są klasami Eulera wiązki normalnej do \mathbb{P}^1 : $e(\nu_x) = e(\nu)|_x$, $e(\nu_y) = e(\nu)|_y$. Zatem

$$w \mid (e(\nu_x) - e(\nu_y)) \tag{1}$$

Niech $\psi_x = \psi/e(\nu_x)$, $\psi_y = \psi/e(\nu_y)$. Mamy $\psi_x e(\nu_x) = \psi_y e(\nu_y)$, oraz w nie dzieli żadnego z czynników. Z (1) wynika

$$w \mid (\psi_x - \psi_y).$$

Wobec założenia

$$w \mid (u_x - u_y)$$

mamy

$$w \mid (\psi_x u_x - \psi_y u_y).$$

Wnioskujemy, że $\{\psi_x u_x, \psi_y u_y\}$ definiuje element nad \mathbb{P}^1 . Jego push-forward do X obcięty do punktów x, y jest równy $\{\psi u_x, \psi u_y\}$. \diamond

7. Zatem $\psi\{u_x\} = \sum \frac{\psi r_i}{s_i} \varepsilon_i$ ma współczynniki z Λ . Ale w nie dzieli ψ , więc nie dzieli s_i . Skoro w jest dowolne, to $s_i = 1$.

8.7 Opis $H_T^*(X)$ gdy działa zespolony torus ze skończoną ilością orbit 0 i 1 wymiarowych:

$$0 \rightarrow H_T^*(X) \rightarrow \bigoplus_{x \in F} \Lambda \rightarrow \bigoplus_{1\text{-orbits}} \Lambda/w_\ell$$

gdzie T działa na orbicie poprzez charakter w_ℓ . Bo mamy

$$H_T^{*+1}(\mathbb{P}^1, \{0, \infty\}) = H_T^*(S^1) = \Lambda/(w_\ell).$$

8.8 Algebra GKM stowarzyszona z grafem $(V, E, w : E \rightarrow T^\vee)$

$$\ker \left(\bigoplus_{v \in V} \Lambda \rightarrow \bigoplus_{e \in E} \Lambda/(w_e) \right)$$

$$\{a_v\}_{v \in V} \mapsto \{a_{s(e)} - a_{t(e)}\}_{e \in E}$$

[Goresky-Kotwitz-MacPherson Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem §6, Fulton-Anderson wykład 5]

9 Różniczkowa interpretacja kohomologii ekwiwariantnych

9.1 $\Omega^*(X)^T$ ma takie same kohomologie jak $\Omega^*(X)$.

Dw: dla każdego elementu $t \in T$, $[\omega] \in H^*(X)$, $[t^*(\omega)] = [\omega]$. Stąd $I([\omega]) = [\int_T t^*(\omega)] = [\omega]$. Ponadto $I^2 = I$. Stąd teza. (Dowód działa dla dowolnej zwartej grupy spójnej, później podamy inny.)

9.2 v pole wektorowe, tożsamość Cartana $\mathcal{L}_v = d\iota_v + \iota_v d = [d, \iota_v]_s$ (superkomutator)

9.3 Niech X rozmaitość gładka z działaniem $T = S^1$, $v_0 \in \mathfrak{t} = T_1 T$. Definiujemy pole fundamentalne

$$v(x) = \frac{d}{dt}(\exp(tv_0) \cdot x) \in T_x X.$$

Innaczej można to zapisać

$$v(x) = D\gamma(0)(v_0),$$

gdzie $\gamma : T \rightarrow X$, $t \mapsto t \cdot x$.

9.4 Niech $\iota = \iota_v$ będzie zwięzieniem z polem fundamentalnym. The operator jest przemienny z f^* dla odwzorowań ekwiwariantnych. Mamy

$$\iota \circ \iota = 0$$

$$\iota(\alpha \wedge \beta) = \iota\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \iota\beta, ,$$

zatem ι jest różniczkowaniem algebry z gradacją Ω_X . Konstrukcja pola fundamentalnego uogólnia się do odwzorowania dla G -rozmaitości

$$\mathfrak{g} = T_1 G = \{\text{pola wektorowe lewo-niezmiennicze na } G\} \rightarrow \{\text{pola wektorowe na } X\}.$$

to przekształcenie zachowuje komutator pól.

9.5 Niech $p : X \rightarrow B = X/G$ będzie wiązką główną, G spójna. Definiujemy formy bazowe

$$\Omega^*(X)_{bas} = \{\alpha \in \Omega^*(X) \mid \forall v_0 \in \mathfrak{g} \mathcal{L}_v \alpha = 0, \iota_v \alpha = 0\} = \{\alpha \in \Omega^*(X) \mid \forall v_0 \in \mathfrak{g} \iota_v \alpha = 0, \iota_v d\alpha = 0\}.$$

To jest podkompleks.

9.6 Twierdzenie

$$\Omega^*(X)_{bas} = p^* \Omega^*(B) \simeq \Omega^*(B).$$

9.7 Dla X z działaniem $T = S^1$ definiujemy

$$(\Omega^*(X)^T[h], d_h) \quad d_h(\omega) = d - h\iota.$$

To jest „deformacja” zwykłej różniczki, jeśli podstawić pod h liczbę, np \hbar . (Konstrukcja pochodzi od Cartana, pojawia się też później u Wittena.) Jeśli h jest traktowane jako liczba, to $H^*(\Omega^*(X)^T, d_h)$ ma jedynie \mathbb{Z}_2 -gradacje.

9.8 Definiujemy $H_{T,dR}^*(X) = H^*(\Omega^*(X)^T[h], d_h)$. To jest moduł na $\mathbb{R}[h]$. Gdy $X = pt$ to $H_{T,dR}^*(X) = \mathbb{R}[h]$.

9.9 Mamy odwzorowanie $\mathbb{R}[h] \rightarrow \Omega^2(\mathbb{P}^n)$, $h \rightarrow \omega_n$, gdzie $[\omega_n]$ jest generatorem kohomologii $H^2(\mathbb{P}^n)$. Można przyjąć $(\omega_n)|_{\mathbb{P}^{n-1}} = \omega_{n-1}$ (np biorąc formę $U(n+1)$ niezmienniczą, Fubini-Study).

Niech $X_{T,n} = S^{2n+1} \times^T X$. Formy $\Omega^*(X_{T,n})$ są $\mathbb{R}[h]$, h działa jak mnożenie przez ω_n .

9.10 Skonstruujemy odwzorowanie $\mathbb{R}[h]$ modułów:

$$\Omega^*(X)^T[h] \rightarrow \Omega^*(X_{T,n}) = \Omega^*(S^{2n+1} \times X)_{bas}$$

Pierwsze podejście:

$$\Omega^*(X)^T \ni \alpha \mapsto p_X^* \alpha,$$

gdzie $p_X : S^{2n+1} \times X \rightarrow X$ jest rzutowaniem.

Czy $p_X^* \alpha$ jest T -niezmiennicze? (OK)

Czy $\iota(p_X^* \alpha) = 0$? (Niestety NIE.) Zrobimy poprawkę w drugim podejściu.

9.11 Będzie potrzebna koneksja wiązki głównej $X \rightarrow X/T$, czyli T -niezmiennicze rzutowanie $T_x X \rightarrow T_x(G_x) \simeq T_1 G = \mathfrak{g}$. Jeśli wybrać jednostkowy wektor $v \in \mathfrak{g}$, to koneksja jest zadana przez T -niezmienniczą formę θ taką, że $\theta(v) = 1$, gdzie v jest polem fundamentalnym działania T . Taką formę można skonstruować jeśli mamy T -niezmienniczą metrykę:

$$\theta(w) = \frac{(v, w)}{(v, v)}.$$

Ćw: sprawdzić, że $d\theta$ jest formą bazową, $[d\theta] \in H^2(X/T)$ jest pierwszą klasą Cherna wiązki liniowej stowarzyszonej z X .

9.12 Drugie podejście: Niech $\theta \in \Omega^1(S^{2n+1} \setminus 0)^T$, takie że $\iota\theta = 1$. Utożsamiamy θ z pullbackiem na $X \times S^{2n+1}$. To jest forma koneksji, $d\theta = \tilde{\omega}_n$ jest pullbackiem generatora $[\omega_n] \in H^2(\mathbb{P}^n)$. Także pomijamy p_X^* w notacji.

Niech

$$\alpha' = \alpha - \theta \wedge \iota\alpha.$$

Teraz mamy

$$\iota\alpha' = \iota\alpha - (\iota\theta) \wedge \iota\alpha = \iota\alpha - 1 \wedge \iota\alpha = 0.$$

Jak działa różniczka:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \mapsto & \alpha' = \alpha - \theta \wedge \iota\alpha \\ d_h \downarrow & & \downarrow d \text{ w } S^{2n+1} \times X \\ d\alpha - h \iota\alpha & \mapsto & (d\alpha - \theta \wedge \iota d\alpha) - \omega_n \wedge (\iota\alpha - \theta \wedge \iota\alpha) \\ & & \parallel \\ & & d\alpha - \theta \wedge \iota d\alpha - \omega_n \wedge \iota\alpha \end{array}$$

i mamy

$$d(\alpha') = d\alpha - d(\theta \wedge \iota\alpha) = d\alpha - \omega_n \wedge \iota\alpha + \theta \wedge d\iota\alpha$$

oraz dla niezmienniczej α

$$d\iota\alpha = -\iota d\alpha.$$

Zatem

$$d(\alpha') = (d_h\alpha)'$$

9.13 Twierdzenie: Powyżej opisane odwzorowanie

$$(\Omega^*(X)^T[h], d_h) \rightarrow \lim_{\leftarrow} \Omega^*(X_{T,n})$$

jest izomorfizmem na kohomologiach (qis).

(Dowód później)

9.14 Uzupełnienie. Trzy definicje całki.

Niech M będzie gładką, zwartą zorientowaną rozmaitością

1) Całkowanie form różniczkowych maksymalnego stopnia zdaje odwzorowanie

$$\int : H^{\dim M}(X; \mathbb{R}) \simeq H_{dR}^{\dim M}(X) \rightarrow \mathbb{R}.$$

2) Ewaluacja na cyklu podstawowym $[M] \in H_{\dim M}(M, \mathbb{Z})$ (lub z innymi dowolnymi współczynnikami A)

$$H^*(M, A) \ni \alpha \mapsto \alpha \cap [M] \in H_0(M; A) \rightarrow H_0(pt; A) \simeq A.$$

3) Homotopijny push-forward zdefiniowany dla dowolnej teorii kohomologii h i M , która ma ma stabilną wiązkę normalną orientowalną w teorii h^* . Konstrukcja poprzez zanurzenie w sferę $S = S^N$

$$h^*(M) \rightarrow h^{*+N-\dim M}(S, S \setminus M) \rightarrow \tilde{h}^{*+N-\dim M}(S) \rightarrow {}^{*- \dim M}(pt).$$

Oczywiście dowód równoważności definicji jest pozostawiony czytelnikowi.

9.15 Powyższe konstrukcje uogólniają się na przypadek rozwłóknienia $f : X \rightarrow Y$ z włóknem, które jest zwartą zorientowaną rozmaitością. Dodatkowo trzeba zakładać, że rozwłóknienie jest zorientowane. Dostajemy

$$f_* : H^*(X) \rightarrow H^{*-d}(Y),$$

gdzie d jest wymiarem włókna.

9.16 Ponadto mamy definicję snopową: niech $\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}_Y$ będą snopami stałymi na X i Y . Mamy $f^*\mathbb{Z}_Y = \mathbb{Z}_X$. Niech Rf_* będzie pełnym funktorem pochodnym. Mamy

$$H^*(X; \mathbb{Z}_X) = H^*(Y; Rf_*\mathbb{Z}_X).$$

Obiekt kategorii pochodnej $Rf_*\mathbb{Z}_X$ jest reprezentowany przez kompleks snopów na Y , który ma najwyższe kohomologie w gradacji d . Zatem istnieje odwzorowanie

$$Rf_*\mathbb{Z}_X \rightarrow R^d\mathbb{Z}_X[-d],$$

które jest izomorfizmem na d -tych kohomologiach źdźbeł. Snop $R^d f_*\mathbb{Z}_X$ jest lokalnie stały ze źdźbłem \mathbb{Z}^k , gdzie k jest liczbą składowych włókna. Jeśli $R^d f_*\mathbb{Z}_X \simeq^* \mathbb{Z}^k$, to dostajemy odwzorowanie

$$\begin{aligned} H^*(X; \mathbb{Z}_X) &\simeq H^*(Y; Rf_*\mathbb{Z}_X) \rightarrow \\ &\rightarrow H^*(Y; R^d f_*\mathbb{Z}_X[-d]) \simeq H^{*-d}(Y; R^d f_*\mathbb{Z}_X) \simeq^* H^{*-d}(Y; \mathbb{Z}_Y^k) \xrightarrow{\Sigma} H^{*-d}(Y; \mathbb{Z}_Y). \end{aligned}$$

9.17 Ekwiwariantny push-forward może być otrzymany przez

- konstrukcję Borela, która redukuje wszystko do rozwłóknienia nad BG
- można też wykonywać wszystkie powyższe konstrukcje ekwiwariantnie.

10 Teoria de Rhama – Cartana

10.1 Konstrukcja koneksji θ i formy $\omega = d\theta$ dla \mathbb{P}^n .

Niech $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ działa na $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ przez mnożenie.

Pole fundamentalne

$$v(z) = \frac{d}{dt} (e^{2\pi i t} z) |_{t=0} = 2\pi i z.$$

Rzutowanie na

$$\text{lin}(v) = \frac{\langle -, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \frac{1}{\|v\|^2} \text{Re}(\langle -, v \rangle) v,$$

gdzie $\langle w, v \rangle$ to jest iloczyn hermitowski. (A część urojona, to rzutowanie na kierunek działania \mathbb{R}_+ .)

Zatem

$$\theta(z) = \frac{1}{(2\pi\|z\|)^2} \text{Re} \left(\sum 2\pi i \bar{z}_k dz_k \right) = \frac{1}{2\pi\|z\|^2} \text{Im} \left(\sum \bar{z}_k dz_k \right).$$

Forma $\omega = d\theta$ jest bazowa, więc pochodzi z \mathbb{P}^n .

10.2 Dla $n = 1$ obliczymy $\omega = d\theta$ we współrzędnych afinicznych na \mathbb{P}^1 . Formę obcinamy $\text{Re}(d\theta)$ obcinamy do obrazu przekroju $\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $[1, z] \mapsto (1, z)$:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} d \text{Im} \left(\frac{1}{1+|z|^2} \bar{z} dz \right) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(d \left(\frac{1}{1+|z|^2} \right) \wedge \bar{z} dz + \frac{1}{1+|z|^2} d(\bar{z} dz) \right).$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{-z d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \wedge \bar{z} dz + \frac{1}{(1+|z|^2)} d(\bar{z} dz) \right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{-z\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} + \frac{1}{(1+|z|^2)} \right) d\bar{z} \wedge dz \right) . \\
&= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(1+|z|^2)^2} d\bar{z} \wedge dz \right) .
\end{aligned}$$

We współrzędnych rzeczywistych

$$d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2idx \wedge dy ,$$

(ta forma jest czysto urojona) więc

$$\omega = \frac{1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

(ta forma jest rzeczywista). Klasa $[\omega] \in H^2(\mathbb{P}^1)$ jest zdeterminowana przez wartość całki

$$\int_{\mathbb{P}^1} \omega = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r dr d\varphi}{(1+r^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2r dr}{(1+r^2)^2} = -\frac{1}{1+r^2} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Zatem $[\omega]$ jest generatorem przychodzącym z $H^2(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z})$.

10.3 Forma θ dla \mathbb{C}^* wiązki głównej $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ jest równa

$$\frac{1}{2\pi i} \partial \ln(|z|^2) = \frac{1}{2\pi i} \partial \ln(z\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sum \bar{z}_k dz_k}{|z|^2} .$$

10.4 Ten wzór ma sens dla dowolnej wiązki głównej nad rozmaitością zespoloną powstałej z wiązki liniowej $L \rightarrow B$ przez usunięcie przekroju zerowego z wybraną metryką hermitowską na włóknach. Przez z rozumiemy wartość przekroju $s : B \dashrightarrow L \setminus 0$. Różniczkową definicję klasy Cherna:

$$c_1(L) = \left[\frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \ln(|s(b)|^2) \right] .$$

Jeśli $L' = f^*L$ i na L' jest metryka indukowana z L , to $\theta'_L = f^*\theta_L$.

Ćw: sprawdzić, że forma nie zależy od wybranego przekroju, a klasa kohomologii nie zależy od wyboru metryki hermitowskiej.

Skoro dla wiązki hopfa $[d\theta] = \text{generator } H^2(\mathbb{P}^1)$, to $[d\theta] = \pm c_1(L)$. Znak jest „-” bo $\int_{\mathbb{P}^1} c_1(\mathcal{O}(-1)) = -1$. Stąd

$$c_1(L) = \left[-d\left(\frac{1}{2\pi i} \partial \ln(|s(b)|^2)\right) \right] = \left[-\bar{\partial}\left(\frac{1}{2\pi i} \partial \ln(|s(b)|^2)\right) \right] = \left[\frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \ln(|s(b)|^2) \right]$$

Wracamy do teorii ekwiwariantnej

10.5 Szukamy podniesienia $\omega \in \Omega^2(\mathbb{P}^1)$ do kompleksu ekwiwariantnego.

$$\tilde{\omega} = \omega + hf, \quad d\tilde{\omega} = 0 \Leftrightarrow \iota\omega = df .$$

Podniesienie jest niejednoznaczne; do f można dodać stałą. Obliczenia robimy w mapie afinicznej $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Pole fundamentalne

$$v(x, y) = 2\pi \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) ,$$

$$\iota\omega = \frac{1}{\pi} \iota \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2} = 2 \frac{-y \iota_x(dx \wedge dy) + x \iota_y(dx \wedge dy)}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{2(ydy + xdx)}{(1+x^2+y^2)^2} = d \left(\frac{1}{(1+x^2+y^2)} \right) .$$

Zatem przyjmijmy $f(z) = \frac{1}{(1+|z|^2)} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)}$. Dla $z = 1/w \rightarrow \infty$

$$f(1/w) = \frac{1}{(1+|1/w|^2)} = \frac{|w|}{(|w|^2+1)} \rightarrow 0.$$

Sprawdzamy, czy działa tw o lokalizacji:

$$\tilde{\omega}|_0 = hf(0) = h, \quad \tilde{\omega}|_\infty = hf(\infty) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{P}^1} \omega = \int_{\mathbb{P}^1} \tilde{\omega} = \frac{h}{h} + \frac{0}{-h} = 1.$$

Przy innym wyborze $f := \frac{1}{(1+|z|^2)} + c$:

$$\tilde{\omega}|_0 = hf(0) = h(1+c), \quad \tilde{\omega}|_\infty = hf(\infty) = hc,$$

$$\int_{\mathbb{P}^1} \omega = \int_{\mathbb{P}^1} \tilde{\omega} = \frac{h(1+c)}{h} + \frac{hc}{-h} = 1.$$

ok

G^* -algebry

10.6 Algebry Lie z gradacją.

- a) $[X, Y] = -(-1)^{|X||Y|}[Y, X]$
b) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{|X||Y|}[Y, [X, Z]]$

10.7 Działanie algebry pól wektorowych na formach różniczkowych działające na formach różniczkowych.

Dla dowolnej podalgebry Lie \mathfrak{g} zawartej w algebrze pól wektorowych definiujemy

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \iota_X \in \mathfrak{g}_{-1} \simeq \mathfrak{g}, \quad \mathcal{L}_X \in \mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{g}, \quad d \in \mathfrak{g}_1 \simeq \mathbb{R}.$$

Spełnione są formuły

$$[\iota_X, d] =: L_X$$

$$[d, L_X] = 0$$

$$[\iota_X, \iota_Y] = 0$$

$$[d, d] = 0$$

$$[\iota_X, L_Y] = \iota_{[X, Y]}$$

Dow. Operacje te spełniają regułę Leibniza, $\Omega^\bullet(M)$ jest generowana przez 0 formy i 1-formy df :

$$[\iota_X, L_Y]df = \iota_X dL_Y f - L_Y df(X) = L_X L_Y f - L_Y L_X f = L_{[X, Y]}f = \iota_{[X, Y]}df$$

11 G^* -moduły, lokalna wolność

11.1 Algebra różniczkowań algebry z gradacją. Moduły i algebry z gradacją nad algebra Lie z gradacją oraz dg-moduły i algebry nad dg-algebrami Lie.

11.2 Algebra $\Omega^\bullet(M)$ dla G -rozmaitości przykładem algebry z gradacją nad algebra Lie (z gradacją)

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}[-1], \quad \text{gdzie } \mathbb{R}[-1] = \langle d \rangle$$

11.3 Algebra $\Omega^\bullet(M)$ dla G -rozmaitości przykładem dg-algebry nad $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}$.

11.4 Definicja G^* -algebry: dg-algebra z działaniem G i zgodnym działaniem algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$.

11.5 Inny dowód, że $H^*(\Omega^*(X)^T) = H^*(\Omega^*(X))$, w sytuacji ogólniejszej. Dla zwartych grup Lie $H^*(A) = H^*(A^G)$, w szczególności $H^*(\Omega^\bullet(M)^G) = H^*(\Omega^\bullet(M))$.

Dowód w notacji dla torusa. $H^*(A) = \bigoplus H^*(A)_\chi = \bigoplus H^*(A_\chi)$. Niech $a \in A_\chi$, $da = 0$. Dla jedno-parametrowej podgrupy generowanej przez $\lambda \in \mathfrak{t}$ mamy $\exp(t\lambda) \cdot a = t^{\langle \chi, \lambda \rangle} a$. Wtedy $L_\lambda a = \langle \chi, \lambda \rangle a$. Z drugiej strony $L_\lambda a = d\iota_\lambda a$. Jeśli $\langle \chi, \lambda \rangle \neq 0$ to forma a jest dokładna.

11.6 Lokalnie wolne działanie - warunek (C) \Leftrightarrow istnieje forma koneksji $\theta \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})^G$. Przy wyborze bazy $\{\lambda_a\}$ przestrzeni \mathfrak{g} : mamy składowe składowych θ^a , $\theta^a(\lambda_b) = \delta_b^a$.

Ćw: udowodnić, że definicja nie zależy od wyboru bazy \mathfrak{g} .

11.7 Elementy horyzontalne i bazowe G^* -algebry, dla lokalnie wolnego działania. (Gdy G^* moduł jest równy $\Omega^*(M)$, to już sprawdzaliśmy, że $\Omega^*(M)_{bas} = p^*\Omega^*(M/G)$.)

Literatura do ogólnej sytuacji: Guillemin-Sternberg §2. **Założenie znacznie upraszczające formuły: $G = T$ jest torusem**

11.8 Kompleks Koszula $\Lambda(V) \otimes S(V)$, $d(x \otimes 1) = 1 \otimes x$ dla $x \in V$. Acykliczność: homotopia $Q(1 \otimes x) = x \otimes 1$, $[Q, d] = (k + \ell)Id$ na $\Lambda^k(V) \otimes S^\ell(V)$.

11.9 Acykliczna lokalnie wolne T^* -algebry:

– $\Omega_\infty := \varprojlim_n \Omega^\bullet((S^{2n+1})^r)$

– jego oszczędny model - algebra Weila $W(\mathfrak{t}) = \Lambda(\mathfrak{t}^*) \otimes S(\mathfrak{t}^*)$, która jest kompleksem Koszula dla $V = \mathfrak{t}^*$, ma strukturę T^* -algebra z działaniem ι_λ tylko na pierwszy czynnik.

11.10 Ćw. Każda lokalnie wolna T^* -algebra ma strukturę $W(\mathfrak{t})$ -algebry.

11.11 Niech B będzie T^* -algebrą. Ekwiwariantne kohomologie definiujemy jako

$$H_T^*(B) := H^*((E \otimes B)_{bas}),$$

gdzie E jest lokalnie wolną acykliczną T^* -algebrą.

Twierdzenie: definicja nie zależy od wyboru lokalnie wolnej acyklicznej algebry E .

11.12 Zgodność z definicją topologiczną dla $B = \Omega^\bullet(M)$.

Różniczkowa definicja klas Cherna: John Milnor & James D. Stasheff: Characteristic Classes. (AM-76), Volume 76. Appendix C.

12 Skręt Mathai-Quilena, geometria symplektyczna

12.1 Skręt Mathai-Quilena: dla T^* -algebr A i B , A lokalnie wolna

$$\phi = \exp(\gamma) \in \text{Aut}(A \otimes B)$$

$$\gamma = \sum \theta^a \otimes \iota_{\lambda_a}.$$

Dobrze określony, bo $\gamma^{r+1} = 0$ dla $r = \dim(T)$.

12.2 γ więc i ϕ są T -niezmiennicze oraz dla każdego $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\phi \circ (\iota_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \iota_\xi) \circ \phi^{-1} = \iota_\xi \otimes 1$$

$$\phi \circ (d \otimes 1 + 1 \otimes d) \circ \phi^{-1} = (d \otimes 1 + 1 \otimes d) - \sum \mu^a \otimes \iota_{\lambda_a} + \sum \theta^a \otimes L_{\lambda_a}$$

gdzie $\mu^a = d\theta^a$

Dowód pierwszej formuły dla $T = S^1$: wtedy $\phi = 1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota$. Najpierw zauważmy:

$$[\iota, \theta]x = \iota(\theta x) + \theta \iota x = (x - \theta \iota x) + \theta \iota x = x$$

(możemy zapisać $[\iota, \theta] = 1$).

$$\begin{aligned} \phi \circ (\iota \otimes 1 + 1 \otimes \iota) \circ \phi^{-1}(x \otimes y) &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota) \circ (\iota \otimes 1 + 1 \otimes \iota) \circ (1 \otimes 1 - \theta \otimes \iota)(x \otimes y) &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota) \circ (\iota \otimes 1 + 1 \otimes \iota)(x \otimes y - (-1)^x \theta x \otimes \iota y) &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota)((\iota x \otimes y - (-1)^x \iota(\theta x) \otimes \iota y) + (-1)^x x \otimes \iota y) &= \\ ((\iota x \otimes y - (-1)^x \iota(\theta x) \otimes \iota y) + (-1)^x x \otimes \iota y) + (-1)^{x-1}(\theta \iota x \otimes \iota y) &= \iota x \otimes y. \end{aligned}$$

W rachunkach nie trzeba było używać argumentów x i y . Dowód drugiej formuły: wiemy, że $[d, \iota] = \mathcal{L}$. Zobaczmy jak działa komutator $[d, \theta]$.

$$d(\theta x) + \theta dx = (d\theta)x - \theta dx + \theta dx = \mu x.$$

Skrócenie pierwszej składowej różniczki:

$$\begin{aligned} \phi \circ (d \otimes 1) \circ \phi^{-1} &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota)(d \otimes 1)(1 \otimes 1 - \theta \otimes \iota) &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota)(d \otimes 1 - d\theta \otimes \iota) &= \\ d \otimes 1 - d\theta \otimes \iota - \theta d \otimes \iota &= \\ d \otimes 1 - \mu \otimes \iota & \end{aligned}$$

Skrócenie drugiej składowej różniczki:

$$\begin{aligned} \phi \circ (1 \otimes d) \circ \phi^{-1} &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota)(1 \otimes d)(1 \otimes 1 - \theta \otimes \iota) &= \\ (1 \otimes 1 + \theta \otimes \iota)(1 \otimes d + \theta \otimes d\iota) &= \\ 1 \otimes d + \theta \otimes d\iota + \theta \otimes \iota d &= \\ 1 \otimes d + \theta \otimes \mathcal{L} & \end{aligned}$$

W sumie

$$\phi(d \otimes 1 + 1 \otimes d)\phi^{-1} = (d \otimes 1 + 1 \otimes d) - \mu \otimes \iota + \theta \otimes \mathcal{L}.$$

12.3 Po skręceniu:

$$\phi((A \otimes B)_{hor}) = A_{hor} \otimes B$$

Dla $A = W(\mathfrak{t})$

$$\phi((A \otimes B)_{bas}) = S(\mathfrak{t}) \otimes B$$

z różniczką

$$\tilde{d} = 1 \otimes d - \sum \lambda^a \otimes \iota_{\lambda_a}$$

To jest **model Cartana** ekwiwariantnych kohomologii.

12.4 Postać różniczki zapisana bez wyboru bazy dla modelu kohomologii ekwiwariantnych

$$(W(\mathfrak{t}) \otimes \Omega^*(M))_{bas} = S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^*(M)^T = \text{Funkcje wielomianowe na } \mathfrak{t} \text{ o wartościach w } \Omega^*(M)^T$$

$$d(\omega)(\lambda) = d(\omega(\lambda)) - \iota_{\lambda}(\omega(\lambda)).$$

12.5 (Bez szczegółów i dowodu) Dla grupy nieprzemiennej mamy podobną konstrukcję: niech $\{\lambda_a\}$ będzie bazą \mathfrak{g} , w kompleksie Koszula $W(\mathfrak{g}) = \Lambda\mathfrak{g}^* \otimes S\mathfrak{g}^*$ mamy $\theta^a = \lambda^a \otimes 1$, $\mu_a = d\theta^a = 1 \otimes \lambda^a$. Odwzorowanie $\tilde{d} = 1 \otimes d - \iota_{\lambda_a} \otimes \mu^a \in \text{End}(S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega^*(M))$ jest różniczką po obcięciu do $(S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega^*(M))^G$. Kohomologie tego kompleksu, to $H_G^*(M; \mathbb{R})$.

12.6 Kohomologie punktu $H_G^*(pt; \mathbb{R}) = H^*(BG; \mathbb{R})$ są równe $(S\mathfrak{g}^*)^G$. Grupa $H_G^*(M; \mathbb{R})$ jest $(S\mathfrak{g}^*)^G$ -modułem.

Literatura: Guillemin-Sternberg §3-4

12.7 Niech $G = T$. Każdy lokalnie wolny T^* -moduł B z wybraną koneksją θ jest w naturalny sposób $W(\mathfrak{t})$ modułem. Homomorfizm $W(\mathfrak{t}) \rightarrow B$ po przejściu do form bazowych daje $S\mathfrak{t}^* \rightarrow B_{bas}$. W ten sposób są skonstruowane elementy reprezentujące klasy charakterystyczne. Ta konstrukcja uogólnia się dla grup nieprzemiennej. Dostajemy

$$(S\mathfrak{g}^*)^G \rightarrow B_{bas}$$

(gdy $B = \Omega^*(M)$ to $B_{bas} = \Omega^*(M/G)$).

12.8 Jeśli działanie G działa na M wolno, to $H_G^*(M; \mathbb{R}) = H^*(M/G; \mathbb{R})$ i mamy odwzorowanie $(S\mathfrak{g}^*)^G \rightarrow H^*(M/G; \mathbb{R})$. To są klasy charakterystyczne G -wiązki głównej $M \rightarrow M/G$. Tzn dla każdego G niezmienniczego elementu $\alpha \in (S\mathfrak{g}^*)^G$ mamy funktorialnie zdefiniowaną klasę $c_\alpha(M) \in H^*(M/G)$. Nawet więcej: jeśli wybierzemy koneksję na wiązce głównej, to mamy formę różniczkową (Teoria Cherna-Weila).

[Guillemin-Sternberg §8]

Uzupełnienie: kroki dowodu twierdzenia mówiącego, że kohomologie ekwiwariantne można liczyć tensurując z dowolną acykliczną lokalnią wolną algebrą.

• Dla lokalnie wolnej T^* -algebry A oraz acyklicznej T^* -algebry B mamy

$$H^*((A \otimes B)_{bas}) = H^*(A_{bas}).$$

Dow: po skręceniu przez ϕ filtrujemy podkompleksami $F^i = (A_{hor}^{\geq i} \otimes B)^T$. Kohomologie ilorazu

$$H^*(F^i/F^{i+1}) = H^*((A_{hor}^i \otimes B)^T) = (A_{hor}^i)^T$$

zatem włożenie $A \hookrightarrow A \otimes B$ indukuje izomorfizm na kohomologiach bazowych.

• Niech E i E' dwa acykliczne lokalnie wolne T^* -algebry. Wtedy $E \otimes B$ jest lokalnie wolną T^* -algebrą, więc $H^*(E' \otimes (E \otimes B)_{bas}) = H^*((E \otimes B)_{bas})$.

Geometria symplektyczna

12.9 Rozamaitości symplektyczne (M, ω) , współrzędne Darboux.

12.10 Przykład: $M = T^*N$ z formą $\omega = d\alpha$, gdzie α jet formą Liouvilla

$$\alpha(\xi)(v) = \xi(\pi_*(v)),$$

gdzie $\xi \in T^*N$, $v \in T(T^*N)$, $\pi : T^*N \rightarrow N$.

12.11 Przykład: $M = \mathbb{P}^n$ (jako rozamaitość rzeczywista) z formą Fubini-Study:

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log(1 + |z|^2)$$

we współrzędnych na części afinicznej. (Czasami pomija się czynnik π w mianowniku). We współrzędnych jednorodnych

$$\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log(|z|^2) \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})_{bas}.$$

To jest forma reprezentująca $c_1(\mathcal{O}(1)) = \gamma^*$. We współrzędnych jednorodnych

$$\omega = d\theta, \quad \theta = \frac{1}{2\pi i} \partial \ln(|z|^2)$$

(oczywiście θ nie jest bazowa).

13 Odwzorowanie momentu

(M, ω) rozamaitość symplektyczna.

13.1 Izomorfizm $TM \simeq T^*M$ zadany przez ω . We współrzędnych Darboux

$$\partial_{x_k} \leftrightarrow dy_k \quad \partial_{y_k} \leftrightarrow -dx_k.$$

13.2 Dana funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Pole hamiltonowskie X_f zdefiniowane przez $\iota_{X_f} \omega = df$, czyli $df(v) = \omega(X_f, v)$ dla każdego v .

13.3 Ćw: Potok pola v zachowuje formę ω wtedy i tylko wtedy gdy $d\nu_v \omega = 0$.

13.4 Przykład: $M = \mathbb{C}^n$, $\omega = \sum dx_k \wedge dy_k$, $f(z) = -\frac{1}{2}|z|^2$.

$$df = -\sum (x_k dx_k + y_k dy_k) \leftrightarrow \sum (x_k \partial_{y_k} - y_k \partial_{x_k}).$$

To pole pochodzi od działania \mathbb{R} przez mnożenie przez skalar e^{it} :

$$\frac{d}{dt} e^{it} z|_{t=0} = iz, \quad v(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n).$$

Po pomnożeniu f przez 2π dostajemy pole fundamentalne działania S^1 .

13.5 Działania hamiltonowskie, to takie, które dopuszczają odwzorowanie momentu $\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(M) & \\ \tilde{\mu} \nearrow & \downarrow & X? \\ \mathfrak{g} & \rightarrow & \Gamma(TM) \end{array}$$

lub równoważnie \mathfrak{g} -niezmiennicza $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ taka, że dla $\lambda \in \mathfrak{g}$

$$\iota_\lambda \omega = d\langle \mu, \lambda \rangle \in \Omega^1(M).$$

W bazie $\mu = (f_1, f_2, \dots, f_r) = \sum f_a \otimes \lambda^a$ mamy

$$\iota_{\lambda_a} \omega = df_a.$$

13.6 Nawias Poissona,

$$\{f, g\} := df(X_g) = \omega(X_f, X_g) = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q}$$

homomorfizm algebr Lie $C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(TM)$

13.7 Działanie hamiltonowskie w mocnym sensie to takie, dla którego $\tilde{\mu}$ jest homomorfizmem algebr.

Dla torusa to oznacza, że nawias Poissona $\{\tilde{\mu}(\lambda_1), \tilde{\mu}(\lambda_2)\} = 0$.

13.8 Jeśli działanie jest hamiltonowskie w silnym sensie, to $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ jest stałe na orbitach.

Dw: bycie momentem w silnym sensie oznacza, że dla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{t}$ nawias Poissona $\{\tilde{\mu}(\lambda_1), \tilde{\mu}(\lambda_2)\} = 0$ (dla torusa). Obliczamy

$$v_{\lambda_1}(\tilde{\mu}(\lambda_2)) = (d\tilde{\mu}(\lambda_2))(v_{\lambda_1}) = \omega(v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}) =: \{\tilde{\mu}(\lambda_1), \tilde{\mu}(\lambda_2)\} = 0.$$

13.9 Działanie naturalne $(S^1)^{n+1}$ na przestrzeni rzutowej ma odwzorowanie momentu $\mu = (f_0, f_1, \dots, f_n) : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^{n+1}$. Znajdziemy wzór na f_a .

Należy znaleźć taką funkcję $f_a : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$\iota_{\lambda_a} \omega = df_a$$

gdzie

$$\lambda_a = 2\pi (y_a \partial_{x_a} - x_a \partial_{y_a}) = 4\pi \operatorname{Re}(iz_a \partial_{z_a})$$

(bo $iz \partial_z = i(x + iy)(\partial_x - i\partial_y)/2 = i(x\partial_x - xi\partial_y + iy\partial_x + y\partial_y)/2 = (-y\partial_x + x\partial_y + i(x\partial_x + y\partial_y))/2$.)

W afinicznych współrzędnych $z_0 = 1$:

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \ln(|z|^2 + 1) = -\frac{i}{2\pi} d\bar{\partial} \ln(|z|^2 + 1) = -\frac{i}{2\pi} d \frac{\sum \bar{z}_k dz}{|z|^2 + 1}$$

tzn

$$\omega = d\theta, \quad \text{gdzie} \quad \theta = -\frac{i}{2\pi} \frac{\sum \bar{z}_k dz}{|z|^2 + 1}$$

Mamy

$$\iota_{\lambda_a} \omega = \iota_{\lambda_a} d\theta = -d\iota_{\lambda_a} \theta$$

bo θ jest \mathcal{L} -niezmiennicza. Formę $-\theta = \frac{i}{2\pi} \frac{\sum \bar{z}_k dz}{|z|^2 + 1}$ Zwiążemy z polem $4\pi iz_a \partial_{z_a}$ (potem weźmiemy Re jeśli będzie trzeba):

$$\frac{4\pi i^2}{2\pi} d \left(\iota_{z_a \partial_{z_a}} \frac{1}{|z|^2 + 1} \sum \bar{z}_k dz_k \right) = -2 d \frac{|z_a|^2}{|z|^2 + 1}$$

Zatem $f_a = -2 \frac{|z_a|^2}{|z|^2 + 1}$ z dokładnością do stałej. Ponadto stała 2 zależy od przyjętych konwencji (według różnych innych konwencji jest to zawsze stała dodatnie).

13.10 Wniosek: Odwzorowanie momentu

$$\mathbb{P}^n \rightarrow \mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mapsto -\frac{2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} (|z_0|^2, |z_1|^2, \dots, |z_n|^2).$$

Obrazem jest sympleks.

13.11 Ćw: Związek odwzorowania momentu z ekwiwariantnymi kohomologiami. Twierdzenie: Niech T działa hamiltonowsko na rozmaitości symplektycznej z funkcją momentu μ . Wtedy $\omega^\# := \omega + \mu$ jest zamkniętą formą w ekwiwariantnym kompleksie de Rhama (model Cartana).

13.12 Ćw: Twierdzenie Duistermaata-Heckmana jako szczególny przypadek twierdzenia o lokalizacji: Załóżmy, że S^1 działa hamiltonowsko z funkcją Hamiltona H . Załóżmy, że H ma izolowane punkty krytyczne (równoważnie M^{S^1} jest skończony). Wtedy dla każdego $\hbar \in \mathbb{C}$

$$\int_M e^{-\hbar H} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{p \in M^{S^1}} \frac{e^{-\hbar H(p)}}{\hbar^n eu(p)}$$

gdzie $eu(p)$ jest iloczynem wag reprezentacji stycznej $T_p M$.

13.13 Twierdzenie Atiyah-Guillemina-Sternberga o obrazie odwzorowania momentu:

M zwarta, spójna, symplektyczna, z Hamiltonowskim działaniem torusa (tzn dopuszczające odwzorowanie momentu), zadanym przez

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*.$$

Wtedy zbiór punktów stałych jest sumą podrozmaitości symplektycznych $C_i, i \in I$. Na każdej składowej odwzorowanie μ jest stałe, oraz

$$\mu(M) = Conv\{\mu(C_i) \mid i \in I\}.$$

13.14 Przykład: przestrzeń rzutowa ze standardowym działaniem $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$

$$\mu(\mathbb{P}^n) = \text{sympleks w } \mathbb{R}^{n+1}.$$

13.15 Twierdzenie [McDuff] (dowód trudny): Jeśli działanie torusa na zwartej rozmaitości symplektycznej dopuszcza odwzorowanie momentu, to M jest ekwiwariantnie formalna.

13.16 Jeśli obcinamy działanie do mniejszego torusa, $T' \subset T$, to mamy rzutowanie i nowe odwzorowanie momentu jest złożeniem μ z rzutowaniem $\mathfrak{t}^* \rightarrow (\mathfrak{t}')^*$.

13.17 Działanie $(S^1)^r$ na \mathbb{C}^{n+1} z wagami $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^r$ ma odwzorowanie momentu $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^r$

$$\mu(z) = -\frac{2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} \sum |z_a|^2 w_a \in \mathbb{R}^k$$

13.18 Związek z geometrią algebraiczną zanurzenie ekwiwariantne X do \mathbb{P}^n zadaje odwzorowanie momentu (obciążenie momentu z \mathbb{P}^n .) W punktach stałych $\mu(p)$ przyjmuje wartość równy wadze działania T na $\mathcal{O}(1)_p$ (z dokładnością do stałej; u nas -2).

13.19 Przykład:

– Grasmannian: Zanurzenie Plückera daje przekształcenie $\mu : G(k, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mu(p_I) = \sum_{i \in I} \epsilon_i$; np dla $G(2, 4)$ mamy

$$\mu(G(2, 4)) = \text{conv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

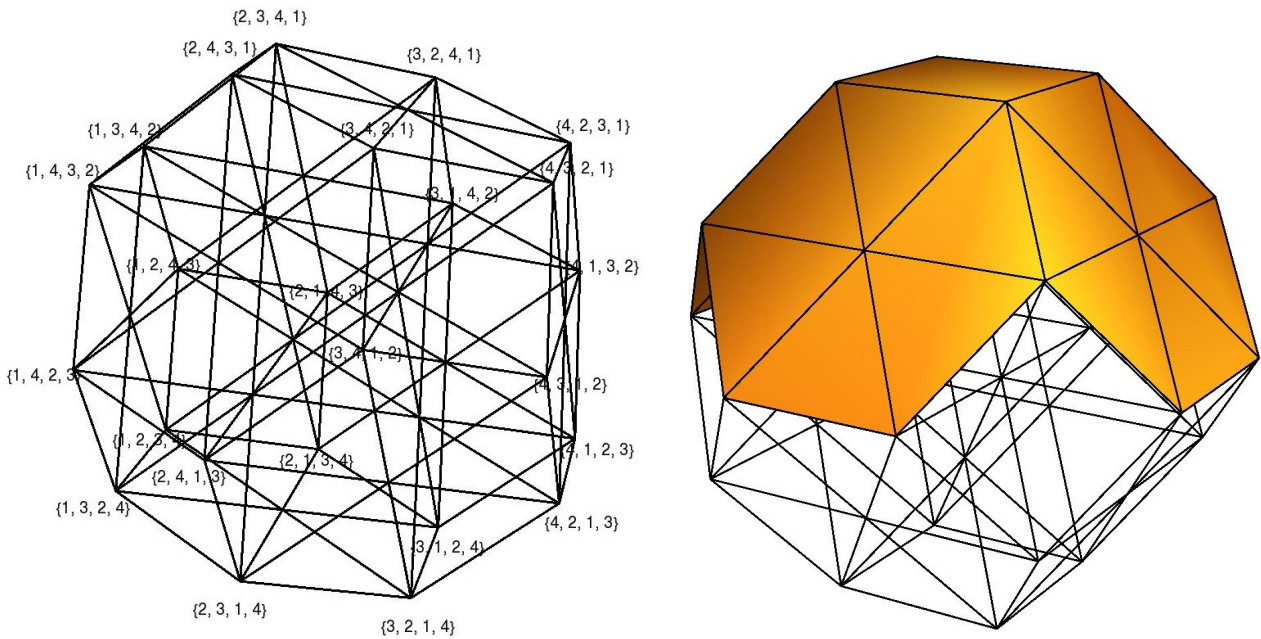
– Przestrzeń flag zanurza się w produkt przestrzeni rzutowych

$$Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} G(k, n) \hookrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n)$$

Mamy dowolność wyboru formy symplektycznej

$$\omega = \sum x_k \omega_k$$

gdzie $x_k > 0$, ω_k jest przeciętna z $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n)$.



Obraz odwzorowania momentu dla $Fl(\mathbb{C}^4)$ przy wyborze $x_1 = x_2 = x_3$.

13.20 Jeśli $M = \mathbb{P}^1$ to obraz $\mu(\mathbb{P}^1)$ jest odcinkiem w \mathfrak{t}^*

13.21 Graf GKM można zrealizować wewnątrz $\mu(M)$, bo gdy Y jest 1-wymiarową orbitą, to $\mu(Y)$ jest odcinkiem otwartym, jego końce to orazy punktów stałych.

13.22 Ćw. Zobaczyć jak wygląda GKM-graf w wielościanie momentu dla $M = Sp_n(\mathbb{C})/B$, tzn dla przestrzeni flag grupy symplektycznej $Sp_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{C})$ dla $n = 2, 3$.

(Inna definicja przestrzeni flag:

$$M = \{(V_1, V_2, \dots, V_n) \in \prod_{k=1}^n G(k, 2n) \mid V_i \subset V_{i+1}, V_n = V_n^\perp\}$$

tzn takie flagi, że V_n jest lagranżowska.)

(O momencie więcej w MacDuff-Salomon *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford 1998, §5.2, tam na str. 165 wytłumaczony związek z „angular momentum” z klasycznej fizyki)

14 Zastosowania twierdzenia o lokalizacji do liczenia $H^0(X; L)$

14.1 Charakter Cherna $ch(E)$

- 1) $ch(L) = exp(c_1 L)$
- 2) $ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$ (addytywność)
- 3) naturalność kontrawariantna ze względu na przekształcenia

Dodatkowo $ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) \cup ch(E_2)$.

14.2 Klasa Todda: niech $f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]]$

- 1) $td(L) = f(c_1 L)$
- 2) $td(E_1 \oplus E_2) = td(E_1) \cup td(E_2)$ mltiplikatywność
- 3) naturalność kontrawariantna ze względu na przekształcenia

14.3 Twierdzenie Hirzebrucha-Riemanna-Rocha: Niech E będzie wiązka holomorficzną na zwartej rozmaitości M . Wtedy

$$\chi(M; E) = \int_M td(TM) ch(E).$$

(szczególne przypadki dla $E = L$

$$\dim C = 1 \quad \chi(C; L) = \int_C \frac{c_1(C)}{2} + c_1(L) = \frac{1}{2}\chi(C) + deg(L)$$

$$\dim S = 2 \quad \chi(S; L) = \int_S \frac{1}{12}(c_1^2(S) + c_2(S)) + \frac{1}{2}c_1(L)(c_1(L) + c_1(S)) = \frac{1}{12}K^2 + \chi_{top}(S) + \frac{1}{2}L \cdot (L - K)$$

14.4 Grothendieck-RR Niech $f : M \rightarrow N$, E wiązka holomorficzna. będzie właściwym przekształceniem rozmaitości zespolonych. Można zdefiniować $f_!$ dla wiązki:

$$f_!(E) = \sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i R^i f_*(E)$$

Jeśli $N = pt$ to $f_!(E) = \mathbb{C}\chi^{(M;E)}$. W ogólności dostajemy element w K-teorii snopów koherentnych, która jest równoważna K-teorii snopów lokalnie wolnych. Mamy $ch : K(M) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$ Naog $ch(f_!(E)) \neq f_*(ch(E))$, ale [Grothendieck-Riemann-Roch]

$$ch(f_!(E)) = f_*(td(T_f) \cup ch(E)),$$

gdzie $T_f = TN - f^*(TM)$. Inna postać HRR

$$td(TN) \cup ch(f_!(E)) = f_*(td(TM) \cup ch(E)).$$

14.5 Jeśli grupa G działa na M , to stosując GRR do aproksymacji $f : EG \times^G M \rightarrow BG$ dostajemy formułę w ekwiwariantnych kohomologiach. (T_f jest tu prawdziwą wiązką, styczną do włókien projekcji.) Dostajemy formułę na charakter ekwiwariantnej wiązki nad punktem. Co to znaczy dla $G = T$? Ekwiwariantna K-teoria punktu to jest pierścień reprezentacji $R(T) = \mathbb{Z}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$
Przekształcenie

$$R(T) = \mathbb{Z}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_r, T_r^{-1}] \rightarrow \hat{H}_T^*(pt) = \prod_{k=0}^{\infty} H_T^k(pt) = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_r]$$

jest postaci

$$T_i \mapsto exp(t_i).$$

14.6 Powyższe przekształcenie można utożsamić z naturalnym przekształceniem

$$R(T) \rightarrow (R(T) \otimes \mathbb{Q})_I^\wedge.$$

gdzie $I = \ker(\dim : R(T) \rightarrow \mathbb{Z})$, a $^\wedge$ oznacza uzupełnienie.

14.7 Przypuśćmy, że $G = T$ i M^T jest słończony, $E = L$. Zastosujemy twierdzenie o lokalizacji. W punkcie stałym $p \in M^T$ wiązka styczna rozpada się na reprezentacje liniowe z wahami $w_i \in H_T^2(pt)$

$$T_p M \simeq \bigoplus \mathbb{C}_{w_i}.$$

Lokalny wkład do $ch(\chi(M; L))$ jest równy

$$\frac{\prod td(\mathbb{C}_{w_i}) \cup ch(L_p)}{\prod w_i} = \frac{\prod \frac{w_i}{1 - \exp(-w_i)}}{\prod w_i} \exp(\mu_p) = \frac{\exp(\mu_p)}{\prod (1 - \exp(-w_i))},$$

gdzie $\mu = c_1(L)|_p \in H_T^2(pt)$. Dostajemy

$$\chi(M; L) = \sum_{p \in M} \frac{\exp(\mu_p)}{\prod (1 - \exp(-w_i(p)))},$$

Utożsamiając T_i z $\exp(t_i)$ dostajemy formułę

$$\chi(M; L) = \sum_{p \in M} \frac{T^{\mu_p}}{\prod (1 - T^{-w_i(p)})}.$$

14.8 Przykład $M = \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}(k)$

$$\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) = \frac{T_0^{-k}}{1 - T_0/T_1} + \frac{T_1^{-k}}{1 - T_1/T_0} = \frac{T_0^{-(k+1)} - T_1^{-(k+1)}}{T_0^{-1} - T_1^{-1}} = \sum_{i=0}^k T_0^{-i} T_1^{-(k-i)}.$$

To jest wiązka szeroka, więc $\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k))$ jako reprezentacja torusa, a nawet GL_2 .

14.9 Ćw \mathbb{P}^n (wygodnie zamienić $T_i = T_i^{-1}$)

$$\chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \sum_{i=0}^n \frac{T_i^k}{\prod_{j \neq i} (1 - T_j/T_i)}.$$

14.10 Przestrzeń flagi $Fl(n) \hookrightarrow \prod_{k=1}^n G(k, n)$ z wiązką

$$L = \sum_i a_i \Lambda^i V_i^* = \sum_i b_i L_i$$

gdzie $b_i = a_i + a_2 + \dots + a_n$ jest ciągiem niemalejącym, tzn $a_i \geq 0$. Wtedy (Twierdzenie Borela-Botta-Weyla) $H^k(Fl(n), L) = 0$ dla $k > 0$, a H^0 jest reprezentacją nierozkładalną GL_n .

$$\chi(Fl(n), L) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\prod_{i=1}^n T_{\sigma(i)}^{b_i}}{\prod_{i > j} (1 - T_{\sigma(j)}/T_{\sigma(i)})}.$$