Topologia obliczeniowa

Przestrzenie skierowane i trwałe homologie

Andrzej Weber, Krzysztof Ziemiański

Seminarium magisterskie 2013/2014

Przestrzenie skierowane

Definicja

Przestrzeń skierowana to para $(X, \vec{P}(X))$, gdzie

- X jest przestrzenią topologiczną,
- $\vec{P}(X)$ jest rodziną dróg na X zwanych drogami skierowanymi,

która spełnia następujące warunki:

- stałe drogi są skierowane,
- rosnące reparametryzacje dróg skierowanych są skierowane,
- złączenia (konkatenacje) dróg skierowanych są drogami skierowanymi.

Zastosowanie:

- Punkty to stany w których może znajdować się program
- Drogi to możliwe (częściowe) wykonania programu

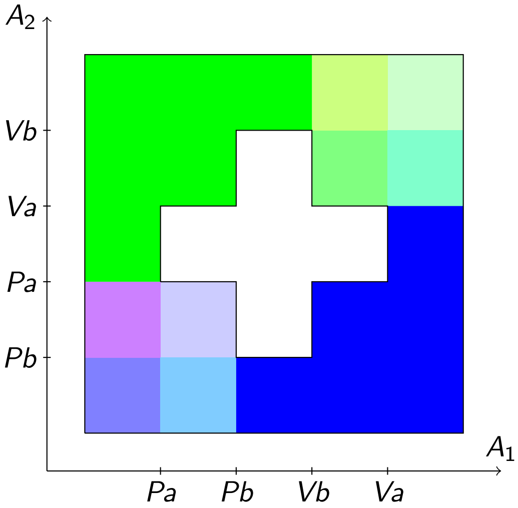
Przestrzenie skierowane - niezmienniki

Celem seminarium będzie omówienie własności przestrzeni skierowanych i badanie ich algebraicznych niezmienników m.in.

- Kategoria podstawowa (odpowiednik grupy podstawowej)
- Kategoria składowych (odpowiednik zbioru składowych spójności przestrzeni)
- Przestrzenie dróg skierowanych (odpowiednik przestrzeni pętli)

Przykład: procesy używające semaforów

Procesy: $A_1 :\ Pa\ Va, \quad A_2 :\ Pa\ Va$



Trwałe homologie (Persistent homology)

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $h : X \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Zdefiniujmy

$$X_c = \{x \in X : \ f(x) \leqslant c\}.$$

Problem: W jaki sposób zmieniają się typy homotopijne przestrzeni X_c w zależności od parametru $c \in \mathbb{R}$?

Niech $A(X_c)$ będzie pewnym niezmiennikiem homotopijnym przestrzeni X_c. Można zdefiniować *trwałość* elementu $\alpha \in A(X_c)$, która mierzy, dla jakiego przedziału wartości $c \in [c - r, c + r']$ element α jest zachowywany.

Przykład - analiza obrazu

Dany jest pewien zwarty zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Losujemy pewną ilość punktów $x_1, \ldots, x_n$ należących do K.

Zadanie

Odtworzyć kształt zbioru K na podstawie punktów $x_1, \ldots, x_n$.

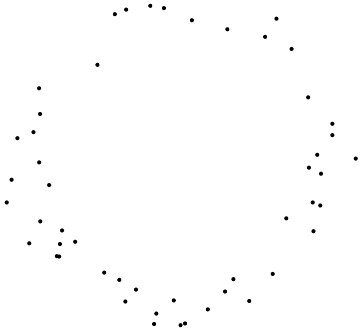
Idea rozwiązania: Przyjmujemy $X = \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \text{odległość od najbiższego w punktów } x_i$$

i badamy trwałość elementów grup homologii przestrzeni X_c.

Przykład - analiza obrazu (2)

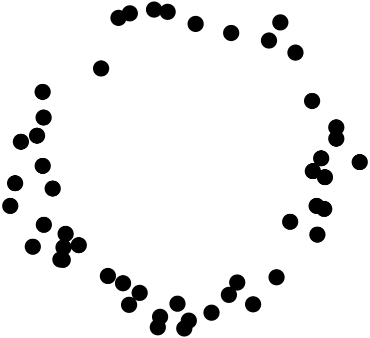
$X_{0.2}$:



$\dim H_0(X_{0.2}) = 50 \qquad \dim H_1(X_{0.2}) = 0$

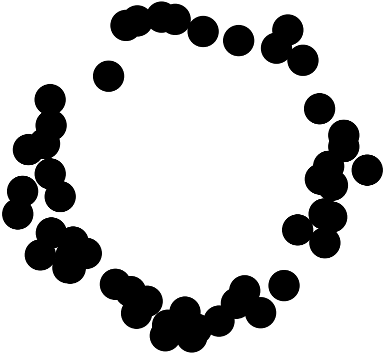
Przykład - analiza obrazu (3)

X_1 :



$$\dim H_0(X_1) = 36 \qquad \dim H_1(X_1) = 0$$

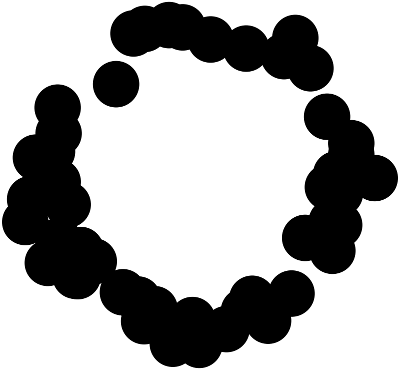
X_2 :



$$\dim H_0(X_2) = 13 \qquad \dim H_1(X_2) = 2$$

Przykład - analiza obrazu (5)

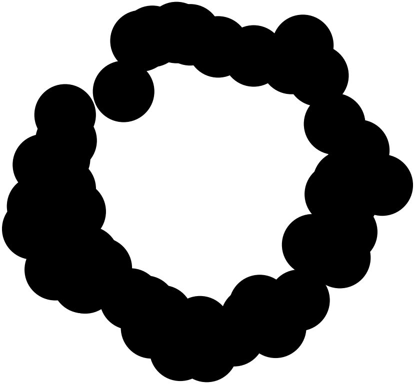
X_3 :



$\dim H_0(X_3) = 4 \qquad \dim H_1(X_3) = 1$

Przykład - analiza obrazu (6)

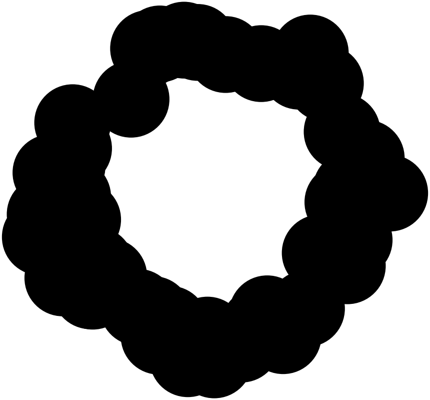
X_4 :



$$\dim H_0(X_4) = 1 \qquad \dim H_1(X_4) = 0$$

Przykład - analiza obrazu (7)

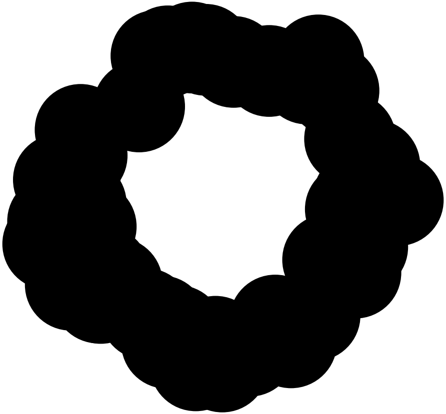
X_5 :



$$\dim H_0(X_5) = 1 \qquad \dim H_1(X_5) = 1$$

Przykład - analiza obrazu (8)

X_6 :



$$\dim H_0(X_6) = 1 \qquad \dim H_1(X_6) = 1$$

Przykład - analiza obrazu (9)

Ostatecznie otrzymujemy dwa generatory (jeden w H_0 i jeden w H_1), które mają "dużą" trwałość. Wobec tego badany zbiór punktów ma kształt zbliżony do okręgu.

Literatura dotycząca przestrzeni skierowanych

- M. Grandis
  Directed Homotopy Theory, I. The Fundamental Category
  Cah. Topol. Géom. Diff. Catég. 44 (2003), 281-316
- M. Grandis
  Directed Homotopy Theory, II. Homotopy Constructs
  Theory and Applications of Categories 10 (2002) no. 14, pp. 369–391
- L. Fajstrup, M. Raussen, E. Goubault, E. Haucourt
  Components of the Fundamental Category
  Applied Categorical Structures 12 (2004) no. 1, pp, 81-108
- M. Raussen
  Invariants of Directed Spaces
  Applied Categorical Structures 15 (2007) no. 4 pp 355–386