Zadania o rozmaitościach zespolonych

Zadania zrobione oznaczone są przez ♠

1

1.1 Opisać dyskretne podgrupy w $\mathbb{R}^2$.

1.2 ♠ Wykazać, grupa $\mathbb{Z}^2$ nie jest izomorficzna z dyskretną podgrupą $SL_2(\mathbb{R})$.

1.3 ♠ Wykazać, że każda zwarta krzywa zespolona genusu 1 jest izomorficzna z $\mathbb{C}/\Lambda$, gdzie Λ jest kratą w $\mathbb{C}$.

1.4 ♠ Niech ϕ będzie ciągłym automorfizmem sfery S^2. Wykazać, że jeśli ϕ zachowuje orientację, to ma punkt stały. Wykazać, że jedyna nietrywialna grupa działająca w sposób wolny na S^2 to $\mathbb{Z}_2$.

1.5 ♠ Niech Γ i Γ' będą podgrupami $PSL_2(\mathbb{R})$ działającymi w sposób wolny na górnej półpłaszyźnie $\mathbb{H}$. Wykazać, że jeśli $\mathbb{H}/\Gamma \simeq \mathbb{H}/\Gamma'$ (jako rozmaitości zespolone) to Γ i Γ' są sprzężone w $PSL_2(\mathbb{R})$.

1.6 ♠ Niech $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ oraz $\mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle \simeq \mathbb{C}/\langle 1, \tau'\rangle$. Wykazać, że τ i τ' leżą w jednej orbicie działania $PSL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathbb{H}$.

1.7 ♠ Opisać topologicznie przestrzeń $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$. Czy jest homeomorficzna z jakąś powierzchnią? Uwaga: $PSL_2(\mathbb{Z})$ nie działa wolno na $\mathbb{H}$. Jakie mogą być stabilizatory?

1.8 ♠ Udowodnić, że obraz zanurzenia Plückera $Gr(2,4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$ jest kwadryką.

1.9 ♠ Udowodnić, że obraz zanurzenia Veronese $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ jest kwadryką.

1.10 ♠ Udowodnić, że obraz zanurzenia Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ jest kwadryką.

1.11 ♠ Niech $\alpha \in \Lambda^k V \setminus \{0\}$. Definiujemy

$$F(\alpha) = \{v \in V | v \wedge \alpha = 0\}\,.$$

Wykazać, że $\dim F(\alpha) \leq k$ oraz, że zbiór α takich, że $\dim F(\alpha) = k$ jest równy obrazowi zanurzenia Plückera.

1.12 ♠ Niech Λ będzie kratą w $\mathbb{C}$. Niech

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{w \in \Lambda\setminus\{0\}} \left((z-w)^{-2} - w^{-2}\right)$$

będzie funkcją Weierstrassa. (Uzasadnić, że szereg jest zbieżny i można go różniczkować wyraz po wyrazie.) Sprawdzić, że $\wp(z)$ jest funkcją periodyczną ze względu na przesunięcia o wektory z kraty Λ. Ponadto

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3\,,$$

gdzie

$$g_2 = 60 \sum_{w \in \Lambda\setminus\{0\}} w^{-4}\,,$$

$$g_3 = 140 \sum_{w \in \Lambda\setminus\{0\}} w^{-6}\,.$$

Udowodnić, że

$$z \mapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1]$$

zadaje ciągłe odwzorowanie $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^2$, zanurzenie, którego obrazem jest krzywa zadana formą

$$Q(x,y,z) = y^2 z - 4x^3 + g_2 x + g_3 = 0\,.$$

(patrz Kirwan, Complex Algebraic Curves, roz 5)

– Uzasadnić, że $\wp$ jest okresowa. Uzasadnić, że szereg definiujący $\wp$ można różniczkować wyraz po wyrazie.

– Wykazać, że jeśli $\wp(z_1) = \wp(z_2)$, to $z_1 = \pm z_2$ modulo Λ.

– Uzasadnić, że w otoczniu 0 $\wp(z) = z^{-2} + \lambda z^2 + \mu z^4 + \dots$.

– Niech $k(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20\lambda\wp(z) + 28\mu$. Sprawdzić, że $k(z)$ jest funkcją holomorficzną, $k(0) = 0$ oraz k jest Λ-okresowa. Wywnioskować, że $k(z) = 0$.

– Wyliczyć współczynniki λ i μ.

– Załóżmy, że $\Lambda = \langle 1, \tau\rangle$, $im(\tau) > 0$. Niech $\alpha = \wp(1/2)$, $\beta = \wp(\tau/2)$, $\gamma = \wp((1+\tau)/2)$. Wykazać, że równaie krzywej jest postaci

$$Q(x,y,z) = y^2 z - 4(x - \alpha z)(x - \beta z)(x - \gamma z) = 0.$$

Uzasadnić, że Q zadaje nieosobliwą krzywą.

– Znaleźć granicę $\lim_{z\to 0}[\wp(z) : \wp'(z) : 1]$ w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^2$.

– Wykazać, że funkcja $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $\phi(z) = [\wp(z) : \wp'(z) : 1]$ odpowiednio zdefiniowane dla $z = 0$ jest różnowartoćiowa. Z przyczyn ogólnych będzie wynikać, że jest to homeomorfizm.

2

2.1 ♠ Definiujemy operator działający na funkcjach określonych na otoczeniu jednostkowego dysku w $\mathbb{C}$

$$If(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_D \tfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Sprawdzić, że

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(If) = f.$$

Wskazówki/kroki:

– pokazać, że cała jest zbieżna

– uzasadnić, że można założyć, że f ma zwarty nośnik zawarty we wnętrzu dysku. Wtedy

$$If(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \tfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \tfrac{f(\xi + z)}{\xi} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

– wywnioskować

$$\tfrac{\partial If}{\partial \bar{z}}(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_D \tfrac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \tfrac{1}{2\pi i}\int_D d\left(\tfrac{f}{\xi - z} d\xi\right).$$

– zastosować twierdzienie Stokesa dla $D \setminus D_\varepsilon$

2.2 ♠ Znaleźć wielomian Weierstrassa dla $f(z_1, z_2) = z_1^3 z_2 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^2 + z_1 z_2^3$.

2.3 ♠ Niech $f, g \in O_{\mathbb{C}^n,0}$ i niech f będzie funkcją nierozkładalną. Wykazać, że jeśli $Z(f) \subset Z(g)$, to $f|g$.

2.4 ♠ Udowodnić, że jeśli U jest spójny, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorficzna, to $U \setminus Z(f)$ spójny i gęsty.

2.5 ♠ Niech $f : U \to V$ będzie funkcją holomorficzną, która jest bijekcją. Udowodnić, że f^{-1} jest holomorficzna. Wsk: rozumując nie wprost, indukcyjnie ze względu na wymiar, stosując tw o funkcji uwikłanej, doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie pochodne f zerują się.

2.6 Wykazać, że $Aut^0(\mathbb{D}\times\mathbb{D}, 0)$ (składowa identyczności grupy automorfizmów produktu dysków jednostkowych $\mathbb{D}\times\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2$) zachoujących 0 jest abelowa. Wywnioskować, że $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ nie jest holomorficznie równoważny z kulą w $\mathbb{C}^2$. [Shabat, Intro to Complex Analysis II, roz I.4.10, Th.2]

2.7 ♠ Niech $f = f_{z'} \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[z_1]$ będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa. Wykazać, że istnieje właściwy kiełek zbioru analitycznego $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ taki, że dla $z' \notin X$ wielomian $f_{z'}$ nie ma pierwiastków wielokrotnych. (Wsk: jeśli f jest nierozkładalny w $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[z_1]$, to f jest nierozkładalny w $K[z']$, gdzie K jest ciałem ułamków $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[z_1]$. Zatem $af + bf' = 1$ dla pewnych $a, b \in K[z']$.)

2.8 Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, xy, e^y xy)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Wykazać, że zbiór $f(A)$ nie może być opisany przez układ równości i nierówności funkcji analitycznych. ([Remmert, 1957] zawsze się da opisać obraz odwzorowania właściwego rozmaitości zespolonych.)

2.9 Powierzchnia Hopfa: ustalamy $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| > 1$, $G = \{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^*$. Grupa $\mathbb{C}^*$ działa na $\mathbb{C}^2$ przez mnożenie skalarne. Niech $H_q = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/G$. Czy H_q można zanurzyć w przestrzeń rzutową? (Trudniejsze: Czy H_q jest rozmaitością algebraiczną?)

2.10 ♠ Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym. Jeśli $\{e_k\}$ jest bazą ortonormalną w V, to deklarujemy, że $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ jest bazą ortonormalną w $\Lambda^k V$. Podać związek pomiędzy iloczynem skalarnym w $\Lambda^k V$ a wyznacznikiem Grama. Zinterpretować wzór Pitagorasa.

2.11 Załóżmy, że V jest liniową przestrzenią zespoloną z iloczynem hermitowskim. Sprawdzić, że $\Lambda^{10} \perp \Lambda^{01}$

2.12 Załóżmy, że V jest liniową przestrzenią zespoloną z iloczynem hermitowskim. Wykazać, że naturalne przekształcenie przestrzeni ze strukturą zespoloną $\phi : (V^*, I) \to (V^*_{10}, i)$, dane wzorem $\phi(f)(v) = f(v) - if(I(v))$ nie jest izometrią.

2.13 ♠ Dana jest parazwarta rozmaitość różniczkowa ze strukturą symplektyczną (tzn dana jest zamknięta niezdegenerowana 2-forma różniczkowa ω). Wykazać, że istnieje struktura zespolona I na wiązce stycznej oraz iloczyn hermitowski taki, że ω jest jego częścią urojoną. Czy warunek zamkniętości jest konieczny?

2.14 Niech $P \to X$ będzie G wiązką główną, $H \subset G$. Mówimy, że H dopuszcza redukcję do H-wiązki, jeśli $P \simeq P' \times_H G$ dla pewnej H wiązki głównej. Wskazać bijekcję pomiędzy redukcjami a przekrojami wiązki stowarzyszonej $P \times_G G/H$.

3

Następujące zadania składają się na częściowy dowód twierdzenia opisującego postać reprezentacji algebry $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$. Niech V będzie zespoloną reprezentacją algebry $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ (przyjmujemy standardową bazę: X, Y, $H = [X, Y]$). Przypuśćmy, że H działa półprosto, tzn $V \bigoplus V_\lambda$ jest sumą prostą swoich przestrzeni własnych. Ponadto zakładamy, że $\dim V < \infty$.

3.1 ♠ Przypuśćmy, że $Xv = 0$, $v \in V_\lambda$. Mamy $XYv = [X, Y]v = \lambda v$. Dalej: $XY^2v = [X, Y]Yv + YXYv = HYv + \lambda Yv = (\lambda - 2 + \lambda)Yv$. Znaleźć związek pomiędzy $XY^m v$ a $Y^{m-1}v$.

3.2 ♠ Udowodnić, że λ wartości własne operatora H są liczbami całkowitymni.

3.3 ♠ Udowodnić, że jeśli n jest największą wartością własną H, to $n \geq 0$ oraz najmniejszą wartością wąsną jest $-n$.

3.4 ♠ Niech v będzie wektorem własnym H o największej wartości własnej (równej n). Udowodnić, że $lin\{v, Yv, Y^2v, \ldots Y^n v\}$ jest podreprezentacją, która jest składnikiem prostym w V.

3.5 Rozłożyć $\Lambda(\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}})$ na nierozkądalne reprezentacje $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ dla $n = 1, 2, 3$.

3.6 ♠ Rozwiązać równanie ciepła na S^1 z warunkiem początkowym $f = \delta_1$ (delta Diracka).

3.7 (i) $*^2 = (-1)^{k(d-k)}$ na k-formach.
(ii) $\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(d-k)} \langle *\alpha, \beta \rangle$,

3.8 Sprawdzić, że rozkład k-form na (p,q)-formy jest ortogonalny i * zachowuje ten rozkład.

3.9 Jakie jest spektrum laplasjanu na S^n $(n = 2, 3, \dots)$? (To jest raczej temat na referat: patrz funkcje sferyczne, spherical harmonics.)

3.10 Opisać formy harmoniczne na torusie $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ z płaską metryką.

3.11 Rozwiązac równanie ciepła na $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ z warunkiem początkowym $\alpha = \delta_0^{(n)} dx$, gdzie $\delta_0^{(n)}$ jest n-tą pochodną delty Diracka. Czy $\alpha(t)$ jest formą gładką dla $t > 0$?

3.12 Niech $\alpha(t)$ będzie rozwiązaniem równania ciepła o warunku początkowym $\alpha(0) = \alpha$. Wykazać, że $|\alpha(t)|$ jako funkcja od t jest nierosnąca. (Z wykładu wiemy: jeśli $d\alpha = 0$, do dla każdego t forma $\alpha(t)$ jest zamknięta i reprezentuje tę samą klasę kohomologii.) Wykazać, że $\lim_{t\to\infty} \alpha(t)$ jest reprezentantem klasy kohomologii $[\alpha]$ o najmniejszej normie.

4

4.1 Sprawdzić z definicji, że kohomologie Dolbeault $H^k(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \mathcal{O}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}) = 0$ dla $k > 0$.

4.2 Obliczyć $H^*(\mathbb{P}^1; \Omega^p)$ dla $p \geq 0$.

5 Rozmaitości Kählerowskie

5.1 ♠ Dla płaskiej metryki na $X = \mathbb{C}^n/(krata)$ wyprowadzić wzory na operatory L^*, ∂^* i $\bar{\partial}^*$. Dla uproszczenia założyć, że $\omega = i\sum_k dz_k \wedge d\bar{z}_k$. (Patrz 8.11 w notatkach do wykładu).

5.2 ♠ Sprawdzić tożsamość $[L^*, \partial] = i\bar{\partial}^*$ dla $X = \mathbb{C}^n/(krata)$ z płaską metryką.

5.3 ♠ Metryka Fubini-Study: iloczyn hermitowski w $T_{[w]}\mathbb{P}^n$ jest zdefiniowana jako

$$< \alpha, \beta >= \frac{1}{\pi} \frac{< w, w >< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > - < \tilde{\alpha}, w >< w, \tilde{\beta} >}{< w, w >^2},$$

gdzie $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T_w\mathbb{C}^{n+1}$ są podniesieniami wektorów $\alpha, \beta \in T_{[w]}\mathbb{P}^n$. Sprawdzić, że wzór nie zależy od wyboru poniesień i reprezentanta w. Sprawdzić, że to jest iloczyn skalarny, niezmienniczy ze względu na strukturę zespoloną. Zatem indukuje iloczyn hermitowski. Sprawdzić, że w lokalnych współrzędnych na $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ formę symplektyczną można zapisać jako

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} log(1 + \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2)$$

.

5.4 ♠ Wykazać, Metryka Fubini-Study jest jedyną z dokładnością do stałej metryką riemannowską niezmienniczą ze względu na działanie grupy $U(n+1)$.

5.5 Niech $X_t \subset \mathbb{P}^n$ będzie ciągłą rodziną zespolonych podrozmaitości (np $\mathcal{X} = \bigcup_{t\in Dysk} X_t \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ jest zespoloną podrozmaitością). Wykazać, że objętość $vol(X_t)$ jest stała.

5.6 Pokazać, że każda rozmaitość zespolona dopuszcza metrykę hermitowską, ale są rozmaitości, które nie dopuszczają metryki kählerowskiej. (Wsk: powierzchnia Hopfa $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/q^{\mathbb{Z}}$).

5.7 Sprawdzić, że dla formy kählerowskiej ω na rozmaitości zwartej i dla każdej formy harmonicznej α iloczyn $\omega \wedge \alpha$ jest formą harmoniczną. Czy iloczyn dowolnych form harmonicznych jest formą harmoniczną?

6

6.1 Temat na referat: Opisać strukturę Hodge'a w kohomologiach powierzchni K3. (To takie powierzchnie, których wiązka $\Lambda^2 TX$ jest trywialna i X jest jednospójna.) Trzeba użyć twierdzenie Hirzebrucha o sygnaturze, formułę Noether i formułę Wu [Barth-Hulek-Chris-Van de Ven, Compact complex surfaces, §VIII.3].

6.2 Znaleźć sygnaturę kwadryki (hiperpowierzchni zadanej formą kwadratową) w $\mathbb{P}^{2n+1}$.

6.3 Wykazać, że suma spójna $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ nie może mieć struktury kählerowskiej.

6.4 Niech $N \subset M$ będzie podrozmaitością zespoloną kowymiaru c w rozmaitości Kählera. Wykazać, że klasa dualna do klasy fundamentalnej $PD^{-1}([N]) \in H^{2c}(M; \mathbb{C})$ jest typu (c, c) i jest niezerowa, gdy $N \neq \emptyset$.

6.5 Niech $\mathcal{K}_X \subset H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \omega)$ będzie zbiorem klas $[\omega]$ takich, że ω jest (minus) częścią urojoną metrykę kählerowskiej. Udowodnić, że $\mathcal{K}_X$ jest zbiorem otwartym, stożkowym, oraz żadna prosta postaci $\{\alpha + t\beta \mid t \in \mathbb{R}\}$ nie jest w nim zawarta.