ROZMAITOŚCI ZESPOLONE
Plan wykładu

1 Wstęp

1.1 Definicja rozmaitości zespolonych.

1.2 Przestrzenie rzutowe.

1.3 Grassmanniany, mapy afiniczne, zanurzenie Plückera, $Gr(2,4)$ jako kwadryka w $\mathbb{P}^5$.

1.4 Hiperpowierzchnie w $\mathbb{P}^n$.

1.5 Z Twierdzenia Riemanna o uniformizacji każda krzywa zespolona jest ilorazem $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{D} \simeq \mathbb{H}$ przez działanie wolne i całkowicie nieciągle grupy dyskretnej, bądź jest izomorficzna z $\mathbb{P}^1$, która to krzywa nie dopuszcza ilorazów.

1.6 $Aut(\mathbb{P}^1) = PGL_2(\mathbb{C})$ tzn. każdy automorfizm jest zadany formułą liniową. Każdy automorfizm ma punkt stały, zatem nie ma nietrywialnych podgrup $Aut(\mathbb{P}^1)$ działających bez punktów stałych. Stąd nie ma nietrywialnych ilorazów. (Dowód topologiczny: Nie ma nietrywialnych nakryć $\mathbb{P}^1 \simeq S^2 \to C$ poza $C = \mathbb{RP}^2$. Ale rzeczywista płaszczyzna rzutowa $\mathbb{RP}^2$ jest nieorientowalna, więc nie może być rozmaitścią zespoloną.)

1.7 Autotomorfizmami $\mathbb{C}$ są jedynie przekształcenia afiniczne. Bez punktów stałych działają jedynie przesunięcia. Zwartymi ilorazami są krzywe eliptyczne $\mathbb{C}/\Lambda$. Zanurzenie $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^2$ — patrz funkcja $\wp$ Weierstrassa w ćwiczeniach.

1.8 Autormorfizmy dysku, bądź górnej pópłaszczyzny $\mathbb{H}$: $Aut(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$. Ilorazy $\mathbb{H}/G$ przez podgrupy $PSL_2(\mathbb{R})$ działające w sposób całkowicie nieciągły na górnej półpłaszczyźnie są krzywymi zespolonymi genusu > 1.

– $Aut(\mathbb{D})$ =Homografie dowodzimy z lematu Schwarza.

2 Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa i pierścień lokalny

Teoria lokalna — odsyłacze do §1 Huybrechtsa.

2.1 Operator Cauchy'ego-Riemanna $\partial\bar{z}$ oraz różniczkowanie zespolone ∂z.

2.2 Twierdzenia dla jednej zmiennej (wzór Cauchy'ego, zasada maksimum, zasada identyczności, rozwijalność w szereg, rezidua).

2.3 Twierdzenie o reziduach: dla funkcji meromorficznej na powierzchni zwartej suma reziduów jest równa zero — dowód z twierdzenia Stokes'a.

2.4 Holomorficznośc funkcji zespolonych wielu zmiennych

2.5 Formuła całkowa Cauchy'ego po wpółrzędnych.

2.6 Twierdzenie Hartogsa.

2.7 Zbiór zer funkcji holomorficznych ($f \not\equiv 0$) ma kowymiar rzeczywisty równy 2 lub jest pusty. (Uwaga, z twierdzenia Łojasiewicza zbiór zer funkcji analitycznej jest triangulowalny, więc nie ma problemu z pojęciem wymiaru.)

2.8 Uogólnienie wzoru na ilość zer funkcji holomorficznej w dysku: Jeśli $f(z) \neq 0$ dla $|z| = \epsilon$, to dla $\ell \geq 0$ mamy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\epsilon} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\xi^\ell d\xi = \sum_{|\alpha|<\epsilon,\ f(\alpha)=0} \alpha^\ell.$$

2.9 Elementarne funkcje symetryczne σ_k można wyrazić przez sumy potęg p_k.

2.10 Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa (Th. 1.1.6).

2.11 Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa w wersji dzieleniowej (Prop 1.1.17).

2.12 Pierścień lokalny $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ jest pierścieniem z jednoznacznym rozkładem (Prop 1.1.15)

3 Lokalne włacności c.d.

3.1 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ jest noetherowski

3.2 Kiełki zbioru $Z(J)$ zadanych przez ideał $J \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$.

3.3 Ideał funkcji zerujących się na kiełku zbioru $I(X)$. Mamy $J \subset I(Z(J))$.

3.4 Kiełek zbioru jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy gdy $I(X)$ jest ideałem pierwszym.

3.5 Lemat: Niech $X \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem zer ideału pierwszego $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Wtedy można znaleźć układ współrzędnych w $\mathbb{C}^n$ taki, że rzutowanie na pierwszych d wpółrzędnych $\pi : X \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$ jest suriekcją kiełków oraz algebra $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/\mathfrak{p}$ jest skończenie generowana jako $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d,0}$-moduł. ($d = \dim X$)

3.6 Gdy $\mathfrak{p} = (g)$ dla kiełka nierozkładalnego $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, to $d = n-1$ i lemat wynika z twierdzenia Weierstrassa w wersji dzieleniowej: zakładamy, że g jest wielomainem Weierstrassa, niech $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, $\bar{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(g)$, $f = gh + r$, $\bar{f} = \bar{r}$. Zatem jednomiany $1, z_1, \ldots, z_1^{d-1}$ rozpinają $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(g)$.

3.7 Twierdzenie Hilberta o zerach dla kiełków funkcji analitycznych dowodzimy z powyższego lematu — (Huybrechts p.20).

GAGA *J-P.Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6: 1-42, (1956)*

3.8 Niech $(X, \mathcal{O}_X)$ będzie rozmaitością algebraiczną nad $\mathbb{C}$. Stowarzyszamy z nią rozmaitość analityczną $(X_{an}, \mathcal{O}_{X_{an}})$.

– Mamy morfizm przestrzeni opierścienionych $\iota : X_{an} \to X$, $\iota^{-1}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X_{an}}$. To daje funktor kategorii snopów

$$(-)^{an} : Sh(X) \to Sh(X_{an})$$
$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an} = \mathcal{O}_{X_{an}} \otimes_{\iota^{-1}(\mathcal{O}_X)} \iota^{-1}(F)\,.$$

3.9 Definicja: Niech $(Y, \mathcal{O}_Y)$ będzie przestrzenią upierścienioną. Mówimy, że snop $\mathcal{O}_Y$ modułów $\mathcal{F}$ jest koherentny jeśli

1) Istnieje lokalnie suriektywne odwzorowanie $(\mathcal{O}_Y^N)_{|U} \to \mathcal{F}_{|U}$ dla pewnego N (tzn $\mathcal{F}$ jest lokalnie skończenie generowany),

2) Dla każdego odwzorowania $\mathcal{O}_Y^M \to \mathcal{F}$ jądro jest lokalnie skończenie generowane.

Przez $Coh(X_{an})$ oznaczamy kategorię analitycznych snopów koherentnych.

3.10 Twierdzenie Oki mówi, że $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_{an}}$ jest koherentny.

3.11 (Serre) Niech $f : X \to Y$ będzie rzutowym morfizmem rozmaitości algebraicznych. Wtedy f indukuje funktor

$$f_*^{an} : Coh(X_{an}) \to Coh(Y_{an})$$

oraz

$$(f_*F)^{an} = f_*^{an} F^{an}$$
$$(R^k f_* F)^{an} = R^k f_*^{an} F^{an}$$

Ponadto jeśli X jest rozmaitością rzutową, to $(-)^{an}$ ograniczone do podkategorii snopów koherentnych jest równoważnością kategorii.

3.12 **Uwaga:** Dla zbioru otwartego $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}^n$, $n > 0$ pierścień funkcji $\mathcal{O}_{U_{an}}$ nie jest noetherowski!

3.13 Wniosek: Każda podrozmaitość analityczna $\mathbb{P}^n$ jest opisana równaniami wielomianowymi.

4 Struktura zespolona

Formy różniczkowe i kohomologie de Rhama - podsumowanie wiadomości:

★ Formy różniczkowe na C^∞-rozmaitości X oznaczamy przez $A^\bullet(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} A^k(X)$.

★ to jest algebra przemienna (jako algebra z gradacją $ab = (-1)^{\deg(a)\deg(b)} ba$)

★ różniczka spełnia formułę Leibniza $d(ab) = ad(b) + (-1)^{\deg(a)} b$

★ przestrzeń liniowa $A^k(X)$ jest równa przekrojom globalnym snopa $\mathcal{A}^k_X$.

★ $\underline{\mathbb{R}}_X \hookrightarrow \mathcal{A}^0_X \to \mathcal{A}^1_X \to \mathcal{A}^2_X \to \dots$ jest miękką rezolwentą snopa stałego $\underline{\mathbb{R}}_X$, dlatego

$$H^k(A^\bullet(X), d) = H^k(X; \underline{\mathbb{R}}_X) \simeq H^k_{sing}(X)\,.$$

Grupy te (przestrzenie wektorowe) będą oznaczne przez $H^k(X)$

★ mnożenie form indukuje mnożenie w kohomologiach $H^k(X) \times H^\ell(X) \to H^{k+\ell}(X)$

★ gdy rozmaitość X jest zwarta, $n = \dim X$ oraz X ma wybraną orientację, to całka n-form różniczkowych indukuje przekształcenie $\int_X : H^n(X) \to \mathbb{R}$. Gdy X jest spójna, to $\int_X$ jest izomorfizmem

★ gdy X jest zwarta, zorientowana, wymiaru n, to forma

$$\int_X - \wedge - : H^k(X) \times H^{n-k}(X) \to \mathbb{R}$$

jest niezdegenerowaną formą 2-liniową (Dualność Poincaré)

★ gdy X jest zorientowana (nie koniecznie zwarta), to zamiast zwykłych kohomologii rozważamy formy i kohomologie o zwartych nośnikach $H^k_c(X) = H^k(A^\bullet_c(X))$, wtedy

$$\int_X - \wedge - : H^k_c(X) \times H^{n-k}(X) \to \mathbb{R}$$

jest niezdegenerowaną formą 2-liniową

★ wprowadzenie metryki Riemanna pozwala zdefiniować formy harmoniczne $\mathcal{H}^k(X)$ (o najmniejszej normie w swojej klasie kohomologii). Gdy X jest zwarta, to formy te są zamknięte i odwzorowanie $\mathcal{H}^k(X) \to H^k(X)$ jest izomorfizmem. Jednak produkt from harmonicznych nie musi być formą harmoniczną.

Półtoraliniowa algebra

4.1 Struktura zespolona $I^2 = -id$. Przestrzenie własne struktury zespolonej

$$V_{\mathbb{C}} = V_i + V_{-i}\,.$$

4.2 Rozkład przestrzeni sprzężonej: Formy liniowe typu (1,0) i (0,1) (tzn $\mathbb{C}$ liniowe i antyliniowe).

$$V^*_{10} := (V^*)_i = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})\,,$$

$$V^*_{01} := (V^*)_{-i} = Hom_{\mathbb{C}}(V, \overline{\mathbb{C}})\,.$$

We współrzędnych $e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ takich, że $I(e_k) = f_k$: bazę dualną oznaczamy:

$$dx_k := e^*_k\,, \quad dy_k := f^*_k\,.$$

Definiujemy

$$dz_k := dx_k + idy_k\,, \quad d\overline{z}_k := dx_k - idy_k\,.$$

Formy dz_k są bazą V^*_{10}, a $d\overline{z}_k$ są bazą V^*_{01}.

4.3 Izomorfizm liniowy $(V^*, I) \overset{\phi}{\simeq} (V_{10}, i)$, $\phi(f)(v) = f(v) - if(Iv))$
$\phi(If)(v) = f(Iv) - if(I^2v) = f(Iv) + if(v) = i(f(v) - if(Iv)) = i\phi(f)(v)$

Izomorfizm antyliniowy: $(V^*, I) \overset{\psi}{\simeq} (V_{01}, i)$, $\psi(f)(v) = f(v) + if(Iv))$
$\psi(If)(v) = f(Iv) + if(I^2v) = f(Iv) - if(v) = -i(f(v) + if(Iv)) = -i\psi(f)(v)$

4.4 Formy antysymetryczne typu (p,q):

$$\Lambda^k V^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{pq}\,, \qquad \Lambda^{pq} := \Lambda^p V^*_{10} \wedge \Lambda^q V^*_{01}\,.$$

– $\overline{\Lambda^{pq}} = \Lambda^{qp}$.
– Operator I działa $\Lambda^{p,q}V^*$ poprzez mnożenie przez $i^{(p-q)}$

Hermitowska algebra liniowa

4.5 Iloczyn hermitowski $\langle\langle -,-\rangle\rangle = \langle -,-\rangle - i\omega(-,-)$ zadje:
– I-niezmienniczy iloczyn skalarny $\langle -,-\rangle$,
– formę symplektyczną $\omega(-,-) = \langle I(-),-\rangle = -\langle -, I(-)\rangle$.

4.6 Forma objętości: we wspórzędnych ortonormalnych:
– gdy $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k = \tfrac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k\,.$$

$$\omega^n = n!vol\,.$$

gdzie

$$vol = (\tfrac{i}{2})^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \cdots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) = (dx_1 \wedge dy_1) \wedge \cdots \wedge (dx_n \wedge dy_n)$$

(Uwaga: forma ω należy do $\Lambda^2 V^* \cap \Lambda^{11} V^* \subset \Lambda^2 V^*_{\mathbb{C}}$.)

4.7 Ćw: sprawdzić, że $\Lambda^{10} \perp \Lambda^{01}$

4.8 Operator Lefschetza $L = \omega \wedge -$. „Trudne Lefschetza w wersji liniowej”

$$L^k : \Lambda^{n-k}V \xrightarrow{\simeq} \Lambda^{n+k}V$$

jest izomorfizmem. (Można podać elementarny dowód, dość uciążliwy. Nasz dowód będzie via reprezentacje algebry Lie $\mathfrak{sl}(2)$.)

5

5.1 Definiujemy $H \in End(\Lambda V^*)$ jako mnożenie skalarne przez $k-n$ na $\Lambda^k V$ (zakładamy, że $n = \dim V$). Mamy $[H,L] = 2L$.

Sprawdzenie: dla $a \in \Lambda^k$: $HLa - LHa = (k+2-n)La - (k-n)La = 2La$.

5.2 Definiujemy operator sprzężony L^*

$$\langle L\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, L^*\beta\rangle$$

L^* zmniejszają gradację o 2. Mamy
– $[H,L] = 2L, \quad [H,L^*] = -2L^*$
– $[L,L^*] = H$.

Przestrzeń ΛV^* jest reprezentacją $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, tzn skonstruujemy

$$\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}) \to End(\Lambda V^*), \qquad \rho(h) = H, \qquad \rho(x) = L, \qquad \rho(y) = L^*\,,$$

gdzie

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3 Przypomnienie z teorii reprezentacji:
– Reprezentacje proste (nie zawierające właściwych podreprezentacji) są postaci $S_k = Sym^k(\mathbb{R}^2)$.
– Każdą reprezentację $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ można rozłożyć na sumę reprezentacji prostych.
– Wartości własne h są liczbami całkowitymi, x^k zadaje izomorfizm $W_{-k} \to W_k$ $(k \geq 0)$.
– $x : W_k \to W_{k+2}$ jest mono dla $k < 0$, epi dla $k + 2 > 0$
– Rozkład Lefschetza: Definiujemy dla $k \geq 0$ elementy prymitywne

$$P_{-k} = \{w \in W_{-k} \,|\, x^{k+1}w = 0\}.$$

Mamy

$$W_{-k} = P_{-k} \oplus xP_{-k-2} \oplus x^2P_{-k-4} \oplus \dots .$$

5.4 Formy prymitywne (uwaga na przesuniętą gradację): dla $0 \leq k \leq n$ definiujemy

$$P^{n-k} = \{\alpha \in \Lambda^{n-k}V^* \mid L^{k+1}\alpha = 0\}$$

$$P^{p,q} = \Lambda^{p,q} \cap P^{p+q}_{\mathbb{C}}.$$

Mamy

$$P^{n-k}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n-k} P^{p,q}.$$

5.5 Rozkład Lefschetza:

$$\Lambda^{n-k}V^* = P^{n-k} \oplus L(P^{n-k-2}) \oplus \dots \oplus L^j(P^{n-k-2j}) \oplus \dots .$$

5.6 Gwiazdka Hodge'a dla rzeczywistych przestrzeni z iloczynem skalarnym i orientacją. Dana forma objętości $vol \in \Lambda^d W^*$, gdzie $d = \dim W$. Definiujemy gwiazdkę Hodge'a jako funkcję liniową $* : \Lambda^k W^* \to \Lambda^{d-k}W^*$ spełniającą $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle\, vol$. W bazie ortogonalnej, jeśli

$$\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_{d-k}\} = \{1, 2, \dots, d\},$$

to

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_k} = \pm\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_{d-k}}.$$

5.7 Ćw: niech $d = \dim W$:
(i) $\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(d-k)} \langle *\alpha, \beta \rangle$,
(ii) $*^2 = (-1)^{k(d-k)}$ na k-formach.

Teoria Hodge'a dla rozmaitości $\mathbb{C}^\infty$

5.8 Operator formalnie sprzężony $d^* = (-1)^{d(k+1)+1} * d * : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$.

5.9 Dla rozmaitości zwartych bez brzegu $a \in A^{k-1}(M)$, $b \in A^k(M)$

$$\langle da, b \rangle_X = \langle a, db \rangle_X$$

Dowód

$$0 = \int_X d(a \wedge b) = \int_X da \wedge b + (-1)^{k-1} \int_X a \wedge db.$$

$$\begin{aligned}
\langle a, d^*b \rangle_X &= \int_X \langle a, (-1)^{d(k+1)+1} * d * b \rangle \\
&= (-1)^{d(k+1)+1} \int_X a \wedge * * d * b && \deg(*d*b) = k-1 \\
&= (-1)^{d(k+1)+1+(k-1)(d-k+1)} \int_X a \wedge d * b && d(k+1) + 1 + (k-1)(d-k+1) \equiv_2 k \\
&= (-1)^k \int_X a \wedge d * b = \int_X \langle da, b \rangle vol
\end{aligned}$$

5.10 Laplasjan $\Delta = dd^* + d^*d$ tzn ,,super-komutator" $[d, d^*]_s$. (Superkomutator elementów algebry z gradacją $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A^k$ definiujemy jako $[\phi, \psi]_s = \phi\psi - (-1)^{k\ell}\psi\phi$ jeśli $\phi \in A^k$, $\psi \in A^\ell$.)

5.11 Formy harmoniczne: $\mathcal{H} = ker\Delta$.

5.12 Przykład: Rozwiązać równanie ciepła $\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\Delta\alpha(t)$ gdy $M = S^1$ dla 0-form:
$*1 = dx$, $*dx = 1$,
Dla 1-form $d^* = (-1)^{d(k+1)+1} * d* = - * d*$
Dla 0-form $\Delta(f) = d^*df = d^*f'dx = -f''$
Dla 1-form $\Delta(fdx) = dd^*fdx = -df' = -f''dx$
Wektory własne laplasjanu na S^1 to funkcje $\sin(nx)$ i $\cos(nx)$ o wartości własniej n^2.
Rozwiązanie równania ciepła o warunku początkowym

$$f(x) = a + \sum_{n>0} b_n \sin(nx) + \sum_{n>0} c_n \cos(nx)$$

$$f_t(x) = a + \sum_{n>0} e^{-tn^2} b_n \sin(nx) + \sum_{n>0} e^{-tn^2} c_n \cos(nx)$$

Przy $t \to \infty$

$$f_t(x) \to a.$$

6

6.1 Dla zwartych C^∞-rozmaitościach mamy:
1) $\mathcal{H} = ker(d) \cap ker(d^*)$
2) $\mathcal{H} = ker(d) \cap ker(d^*) = ker(d) \cap im(d)^\perp$
3) podprzestrzenie $\mathcal{H}$, $im(d)$ i $im(d^*)$ są prostopadłe.

Dow:
1) Dla $a \in ker(\Delta)$:

$$0 = (0, a) = (dd^*a, a) + (d^*da, a) = (d^*a, d^*a) + (da, da) = ||d^*a||^2 + ||da||^2$$

2) $da = 0$ to $0 = (da, b) = (a, d^*b)$, więc $a \in im(d^*)^\perp$
Jeli $a \in im(d)^\perp$ to $0 = (a, d^*da) = ||da||^2$.
3) $a \in \mathcal{H}$ to $da = 0$, więc $a \perp im(d^*)$ etc
$(d^*a, db) = (a, d^2b)$.

6.2 Rozkład Hodge'a $\mathcal{A}^*(M) = im(d) \oplus \mathcal{H} \oplus im(d^*)$.
Rozkład Hodge'a wynika z ogólnej własności samosprzężonych operatorów eliptycznych, której nie będziemy dowodzić (bo wymagałoby to wprowadzenia przestrzeni Sobolewa):

$$\mathcal{A}^*(M) = \hat{\bigoplus}_{\lambda\in Spec(\Delta)} A^*(M)_\lambda\,,$$

(rozkład na wartości własne)

$$\mathcal{A}^*(M) = ker(\Delta) \oplus im(\Delta)\,.$$

Ponadto $\dim(ker(\Delta)) < \infty$.
Mamy $im(\delta) \subset im(d) \oplus im(d^*)$, z powyższego wynika,

$$im(\Delta) = im(d) \oplus im(d^*)$$

6.3 Wniosek 1: $\mathcal{H} \to H^*(M)$ jest izomorfizmem.
Ponadto: jeśli $\Delta(a) = 0$ $a' = a + db$, to $||a'|| \geq ||a||$.
Czyli: Forma harmoniczna jest formą o najmniejszej normie w swojej klasie kohomologii.

6.4 Wniosek 2: Dualność Poincaré: dla każdej klasy kohomologii $[\alpha] \neq 0$ istnieje klasa $[\beta]$ w dopełniającym wymiarze taka, że $\int_M \alpha \wedge \beta \neq 0$.

Zakładamy, że α jest harmoniczna i przyjmujemy $\beta = \alpha^*$.

6.5 Równanie ciepła $\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\Delta\alpha(t)$, $\alpha(0) = \alpha$ (bez dowodów, patrz Arapura §7)

– równanie ciepła ma rozwiązanie dla $t \geq 0$

– $lim_{t\to\infty}\alpha(t)$ istnieje i jest formą harmoniczną, oznaczamy α_H,

Uwaga: Laplasjan ma zawsze warttości własne nieujemne, więc lim istnieje.

– $\alpha = \alpha_H + \Delta G(\alpha)$, gdzie $G(\alpha) = \int_0^\infty (\alpha(t) - \alpha_H)dt$ jest operatorem Greena.

Sprawdzenie dla wektora własnegp $\Delta\alpha = \lambda\alpha$, $\lambda \neq 0$:

$$\Delta\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t^2}\alpha dt\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda\alpha\, dt = \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda\, dt\right)\alpha = \alpha\,.$$

6.6 Jeśli $\beta(t)$ jest rozwiązaniem z warunkiem początkowym β, to $d\beta(t)$ jest rozwiązaniem z warunkiem początkowym $d\beta$, bo $d\Delta = ddd^* + dd^*d = dd^*d = dd^*d + d^*dd = \Delta d$.

$\alpha = \alpha_H + d\beta$ to $\alpha_t = \alpha_h + d\beta_t$.

6.7 Jeśli $d\alpha = 0$, $d\alpha_t = 0$ i $[\alpha_t] = [\alpha]$

Dw $\alpha = \alpha_h + d\beta$, $(\alpha_t - \alpha_h)' = -\Delta(d\beta_t) = -d\Delta(\beta_t)$

Algebra liniowa → rozmaitości różniczkowe

6.8 Rozmaitość niemal zespolona to para$(X, I \in End(TX))$, gdzie X jest rozmaitośćią (rzeczywistą) oraz $I^2 = -id$.

6.9 Formy różniczkowe rozkładają się na sumę prostą $\mathcal{A}^k(X)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k}\mathcal{A}^{p,q}(X)$. W ogólności różniczka d ograniczona do form typu (1,0) może mieć składową typu (0,2). Gdy struktura niemal zespolona pochodzi od holomorficznego układu współrzędnych, to nie ma skądowej typu (0,2).

6.10 [Huybrechts 2.6.17] Warunek $(d\alpha)_{02} = 0$ dla $\alpha \in A^{10}(X)$ jest równoważny iwolutywności dystrybucji $TX_{01} \subset TX_{\mathbb{C}}$:

$$\forall u, v \in \Gamma(TX_{01}) \quad [u, v] \in \Gamma(TX_{01}).$$

Dowód z formuły Cartana:

$$d\alpha(u, v) = u\alpha(v) - v\alpha(u) - \alpha([u, v]) = \alpha([u, v])$$

dla $\alpha \in \mathcal{A}^{10}(X)$ warunek $d\alpha \in A^{20}(X) \oplus A^{11}(X)$ jest równoważny:

$$\text{dla dowolnych } u, v \in TX_{01} \text{mamy } \alpha([u, v]) = 0.$$

Stąd $d(A^{10}) \subset A^{20}(X) \oplus A^{11}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{dla dowolnych } u, v \in TX_{01} \text{ mamy } [u, v] \in TX_{01}\,.$$

To jest warunekm inwolutywności dystrybucji (tzn podwiązki) $TX_{01} \subset TX_{\mathbb{C}}$.

6.11 Niech $P = \frac{1}{2}(iI + id)$ będzie rzutowaniem na formy typu (0,1). Warunek iwolutywności jest równoważny:

$$(***) \qquad \forall u, v \in \Gamma(TX) \quad P[Pu, Pv] = [Pu, Pv].$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy tensor Nijenhuisa:

6.12 Dla $I \in End(TX)$ definiujemy tensor Nijenhuisa

$$N_I(X, Y) = -I^2[X, Y] + I([IX, Y] + [X, IY]) - [IX, IY]\,.$$

6.13 Twierdzenie Newlandera–Nirenberga: Struktura niemal zespolona I na $\mathbb{R}^{2n}$ pochodzi od współrzędnych zespolonych wtedy i tylko wtedy gdy $N_I = 0$. (Warunek $N_I = 0$ jest równoważny (***), co łatwo sprawdzić algebraicznie.)

6.14 Związek z twierdzeniem Frobeniusa: całkowalność $\Leftrightarrow$ inwolutywność dystrybucji.

6.15 Jeśli X jest rozmaitością zepoloną, to

$$d(\mathcal{A}^{p,q}(X)) \subset \mathcal{A}^{p+1,q}(X) \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(X)$$

$$d = \partial + \overline{\partial}, \quad \partial^2 = 0 = \overline{\partial}^2, \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0\,.$$

6.16 Kompleks Dolbeault: dla każdego $0 \leq p \leq \dim_{\mathbb{C}} X$ mamy kompleks

$$0 \to \mathcal{A}^{p,0}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,\dim X}(X) \to 0,,$$

$$ker(\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,0}(X) \to \mathcal{A}^{p,1}(X)) = \Omega^p(X)\,.$$

gdzie $\Omega^p(X)$ oznacza formy typu $(p,0)$ z holomorficznymi współczynnikami.

6.17 Definiujemy kohomologie Dolbeault jako kohomologie tego kompleksu:

$$H^q_{Dol}(X;\Omega^p) := ker(\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X))/im(\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q-1}(X) \to \mathcal{A}^{p,q}(X))\,.$$

6.18 Holomorficzny Lemat Poincaré: ciąg snopów

$$0 \to \Omega^p_X \to \mathcal{A}^{p,0} \to \mathcal{A}^{p,1} \to \mathcal{A}^{p,2} \to \ldots$$

jest dokładny. Ozacza to, że jeśli $\bar{\partial}\alpha = 0$, to loklnie istnieje forma β taka, że $\bar{\partial}\beta = \alpha$.

6.19 Kohomologie o współczynnikach w snopie (patrz podręcznik z algebry homologicznej)

$$H^k(X;\mathcal{F}) = H^k(\Gamma(A^\bullet))\,,$$

gdzie

$$\mathcal{F} \to A^0 \to A^1 \to A^2 \to \ldots$$

jest dostatecznie ,,dobrą" rezolwentą $\mathcal{F}$. Można zakładać warunek miękkości: dla każdego przekroju $\mathcal{F}$ na zbiorze domkniętym można przedłużyć do przekroju globalnego. (Zakładamy, że X jest przestrzenią parazwartą.)

6.20 Snop $\mathcal{A}^0$ funkcji $\mathbb{C}^\infty$ na rozmaitości różniczkowej jest miękki.

6.21 Każdy snop $\mathcal{A}^0$–modułów jest miękki. W szczególności $\mathcal{A}^{p,q}$ jest miękki. Zatem rezolwenty

$$\Omega^p_X \to \mathcal{A}^{p,\bullet}$$

są miękkie. Stąd

$$H^k(X;\Omega^p) = H^k(\mathcal{A}^{p,\bullet}(X))$$

tzn kohomologie Dolbeault są kohomologiami snopowymi w sensie algebry homologicznej.

6.22 Gdy X jest rozmaitością zespoloną, to $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}$. Dla $p \geq 0$ definiujemy filtrację Hodge'a na poziomie snopów form różniczkowych

$$F^p\mathcal{A}^k = \bigoplus_{p'+q=k,\, p'\geq p} \mathcal{A}^{p',q}\,.$$

oraz filtrację w kohomologiach $H^k(X;\mathbb{C}) = H^k\big(\mathcal{A}^\bullet(X)_{\mathbb{C}}\big)$

$$F^pH^k(X;\mathbb{C}) = im(H^k(F^p\mathcal{A}^\bullet(X)) \to H^k\big(\mathcal{A}^\bullet(X)_{\mathbb{C}})\big)\,.$$

6.23 Mamy

$$F^p\mathcal{A}^k/F^{p+1}\mathcal{A}^k \simeq \mathcal{A}^{p,k-p}\,.$$

$$H^{p+q}((F^p\mathcal{A}^k/F^{p+1}\mathcal{A}^k)(X)) = H^q(X;\Omega^p_X)\,.$$

7

7.1 Addytywny Proplem Cousina: Szukamy globalnej funkcji meromorficznej o zadanych lokalnie częściach meromorficznych.

Dane pokrycie X zbiorami otwartymi $X = \bigcup U_i$. Na każdym U_i dana funkcja meromorficzna f_i taka, że różnice $g_{ij} = (f_i)_{|U_i \cap U_j} - (f_j)_{|U_i \cap U_j}$ są funkcjami holomorficznymi. Czy istnieje globalna funkcja meromorficzna f taka, że $f_{|U_i} - f_i$ jest funkcją holomorficzną?

7.2 Multiplikatywny Problem Cousina: Szukamy funkcji meromorficznej o zadanych biegunach.

Zakładamy, że f_i/f_j jest funkcją holomorficzną na $U_i \cap U_j$ i szukamy globalnej f takiej, że f/f_i jest holomorficzna na U_i. Odpowiedź zależy od klasy kocyklu w $H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$.

7.3 Odpowiedź w języku kohomologii. Dla pokrycia $\mathscr{U} = \{U_i\}$ definiujemy kompleks Čecha:

$$\check{C}^k(\mathscr{U}) = \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}) \,.$$

W formułach używamy multiindeksów $I = \{i_0 < i_1 < \cdots < i_k\}$, $U_I = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ Dla $\{s_I\} \in \check{C}^{k-1}(\mathscr{U})$ definiujemy różniczkę

$$d(\{s_I\})_J = \sum_{a=1}^{k} (-1)^a (s_{J \setminus j_a})_{|U_J}$$

Np

$$d(\{s_i\})_{j_0,j_1} = (s_{j_1})_{|U_{j_0,j_1}} - (s_{j_0})_{|U_{j_0,j_1}}$$

$$d(\{s_{i_0,i_1}\})_{j_0,j_1,j_2} = s_{j_1,j_2} - s_{j_0,j_2} + s_{j_0,j_1} \qquad \text{obcięte do } U_{j_0,j_1,j_2}$$

7.4 Definiujemy kohomologie Čecha $\check{H}^k(\mathscr{U}; \mathcal{F}) = H^k(\check{C}^\bullet(\mathscr{U}; \mathcal{F}), d)$.

7.5 Pierwszy problem Cousina: $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, układ funkcji $\{g_{i,j}\} \in \check{C}^1(\mathscr{U}; \mathcal{O}_X)$ spełnia warunek kocyklu: $g_{ij} - g_{ik} + g_{jk} = 0$, zatem zadaje on element kohomologii Čecha pokrycia $H^1(\{U_i\}; \mathcal{O}_X)$. Ten element jest zerowy (tzn kocykl jest kobrzegiem) wtedy i tylko wtedy, gdy problem Cousina ma rozwiązanie. Dokładniej: istnieją takie funkcje holomorficzne h_i na U_i, że $g_{ij} = h_j - h_i$, wtedy funkcje meromorficzne $\tilde{f}_i = f_i + h_i$ są zgodne na przecięciach i zadają funkcję globalną. Dla rozwiązania problemu Cousina można założyć, że pokrycie jest dowolnie drobne.

7.6 Drugi problem Cousina: pytanie czy 1-kocykl o wartościach w snopie $\mathcal{O}_X^*$ jest kobrzegiem.

7.7 Rozdrobnienie pokrycia indukuje morfizm kohomologii Čecha (nie zależy od funkcji wpisującej).

7.8 Twierdzenie:

$$\varinjlim_{\mathscr{U}} \check{H}^k(\mathscr{U}; \mathcal{F}) \simeq H^k(X; \mathcal{F})$$

7.9 Jeśli pokrycie jest acykliczne (tzn $H^k(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}; \mathcal{F}) = 0$ dla każdego multiindeksu i $k > 0$) to

$$H^k(\{U_i\}; \mathcal{F}) \simeq H^k(X; \mathcal{F}).$$

Patrz (7.19). O kohomologiach Čecha można przeczytać też w [Szabat, Wstęp do analizy zespolonej, jest też wydanie angielskie: B. V. Shabath, Introduction to complex analysis].

7.10 Pokrycia acykliczne dla snopów lokalnie stałych (dla przestrzeni topologicznych): np. takie, że każde przecięcie U_I jest ściągalne.

7.11 Pokrycia acykliczne dla snopów koherentnych w geometrii algebraicznej: np. gdy U_I są zbiorami afinicznymi.

7.12 Pokrycia acykliczne dla snopów koherentnych analitycznych: np. gdy U_I są zbiorami Steina.
Definicja: $U \subset M$ jest Steina jeśli
– dla każdej pary punktów $p, q \in U$ istnieje funkcja analityczna $f \in \mathcal{O}_U$ taka, że $f(p) \neq f(q)$.
– (holomorficzna wypukłość) dla zbioru zwartego $K \subset U$ zbiór

$$\bar{K} := \{p \in U \mid \forall f \in \mathcal{O}_U \ |f(p)| \leq sup_{q \in K} |f(q)| \ \}$$

jest zwarty.

7.13 W problemach Cousina można brać pokrycie dowolnie drobne. Skoro $H^1(\mathbb{P}^n; \mathcal{O}_X) = 0$, więc na $\mathbb{P}^n$ problem Cousina ma zawsze pozytywne rozwiązanie. Dla krzywych rodzaju > 0 problem Cousina nie zawsze ma rozwiązanie pozytywne.

Ciągi spektralne
Przykładowe źródło: C. Weibel - An Introduction to Homological Algebra, roz. 5

$$d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}, \qquad E^{r+1}_{p,q} = ker(d^r_{p,q})/im(d^r_{p+r,q-r+1})$$

Napis $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ oznacza, że w H_* jest filtracja malejąca taka, że

$$F_p H_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q} \simeq E^\infty_{p,q} \, .$$

7.14 Homologiczny ciąg spektralny związany z filtracją kompleksu łańcuchowego. Definiujemy

$$A^r_{p,\bullet} = \{x \in F_p C_\bullet \mid d(x) \in F_{p-r} C_\bullet\},$$

$$Z^r_{p,\bullet} = \text{obraz } A^r_{p,\bullet} \text{ w } F_p C_\bullet / F_{p-1} C_\bullet,$$

$$B^r_{p,\bullet} = \text{obraz } d(A^{r-1}_{p+r-1,\bullet}) \text{ w } F_p C_\bullet / F_{p-1} C_\bullet,$$

$$E^r_{p,\bullet} = \frac{Z^r_{p,\bullet}}{B^r_{p,\bullet}} = \frac{A^r_{p,\bullet} + F_{p-1}C_\bullet}{d(A^{r-1}_{p+r-1,\bullet}) + F_{p-1}C_\bullet} = \frac{A^r_{p,\bullet}}{d(A^{r-1}_{p+r-1,\bullet}) + A^{r-1}_{p-1,\bullet}} \, .$$

Gradacja na współrzędnej q jest tak dobrana, że

$$B^r_{p,q} \subset Z^r_{p,q} \subset F_p C_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} \, .$$

Różniczka w $C_\bullet$ indukuje różniczkę $E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ (Ćw). Jest spełniony warunek $H_*(E^r_{*,*}) = E^{r+1}_{*,*}$ (Ćw). Zatem $E^r_{p,q}$ jest podilorazem (ilorazem podobiektu) $F_p C_{p+q}$.

7.15 Ciąg spektralny przestrzeni topologicznej z filtracją

$$E^0_{p,q} = C_{p+q}(X_p, X_{p-1}), \qquad E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X) \, .$$

Różniczka

$$E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$$

czyli

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to H_{p-1+q}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

jest różniczką z długiego ciągu dokładnego homologii trójki

$$(X_p, X_{p-1}, X_{p-2}) \, .$$

7.16 Kohomologiczny ciąg spetralny, struktura multiplikatywna

$$d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r, \qquad E^{r+1}_{p,q} = ker(d^r_{p,q})/im(d^r_{p-r,q+r-1})$$

$$E^{p,q}_r \times E^{p',q'}_r \to E^{p+p',q+q'}_r \, .$$

7.17 Ciąg spektralny indukowany przez filtrację malejącą w kompleksie kohomologicznym

$$E_0^{p,q} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}, \qquad E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pC^\bullet/F^{p+1}C^\bullet)\,, \qquad \dots\,.$$

7.18 Ciąg spektralny Frölichera: dla rozmaitości zespolonej rozważamy filtrację Hodge'a w $A^\bullet(M)$. Mamy

$$E_1^{p,q} = H^q(M;\Omega_M^p) \Rightarrow H^{p+q}(X;\mathbb{C})$$

związany z filtracją Hodge'a w $\mathcal{A}^\bullet_{\mathbb{C}}(M)$. (Dla ciągów spektralnych kohomologicznych rozważamy filtracje malejące.)

– gdy M jest afiniczna to $E_1^{p,q} = 0$ dla $q > 0$, więc $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$, zatem $H^*(M;\mathbb{C}) = H^*(\Omega^\bullet(M))$,

– gdy M Kählera, to $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

7.19 Ciąg spektralny Čech-do-globalne dla skończonego pokrycia

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{|I|=p+1} H^p(U_I;\mathcal{F}) = \check{C}^p(\mathscr{U};H^q(-;\mathcal{F})), \qquad E_2^{p,q} = H^p(\mathscr{U};H^q(-;\mathcal{F})), \qquad \dots\,.$$

W szczególności, gdy pokrycie jest acykliczne, to ciąg ma niezerowe wyrazy jedynie w zerowym rzędzie począwszy bod E_1. Zatem kohomologie $H^*(X;\mathcal{F})$ są równe kohomologiom $E_1^{\bullet,0}$.

8 Teoria Hodge'a dla rozmaitości zespolonych hermitowskich

8.1 Dla przestrzeni hermitowskich bierzemy $W = V_{\mathbb{R}}$, więc $d = 2n$. Mamy $vol = \frac{1}{n!}\omega^n$. Rozszerzamy gwiazdkę Hodge'a $\mathbb{C}$-liniowo

$$*dz = *(dx{+}idy) = dy{-}idx = -i(dx{+}idy) = -idx\,, \qquad *d\bar{z} = *(dx{-}idy) = dy{+}idx = i(dx{-}idy) = id\bar{z}$$

$$* : \Lambda^{p,q} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^{n-q,n-p}$$

Czasem użyteczna jest

$$\bar{*} : \Lambda^{p,q} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^{n-p,n-q}, \qquad \bar{*}(\alpha) = *\bar{\alpha} = \overline{*\alpha}\,.$$

8.2 Przymujemy L^*=operator sprzężony, tzn $\langle L\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha, L^*\beta\rangle$. Mamy

$$L^* = *^{-1}L* = (-1)^{\deg} * L *\ .$$

(ponieważ d jest parzyste). W literaturze często L^* jest oznaczane przez Λ, co może się mylić z potęgą zewnętrzną.

8.3 Dla rozmaitości zespolonej z iloczynem hermitowskim L, $L^* = (-1)^{\deg} * L*$, $H = [L, L^*] = (\deg -n)id$ działające na C^∞-formach różniczkowych $A^*(X)$ i ich $\mathbb{C}$ liniowe rozszerzenia na $A^*(X)_{\mathbb{C}}$. W ten sposób $A^*(X)$ i $A^*(X)_{\mathbb{C}}$ stają się reprezentacją $\mathfrak{sl}(2)$.

8.4 Definiujemy operatory formalnie sprzężony

$$\partial^* = -*\bar{\partial}* : A^{p,q}(X) \to A^{p-1,q}(X)\,,$$

$$(p,q) \mapsto (n-q, n-p) \mapsto (n-q, n-p+1) \mapsto (p-1, q)$$

oraz

$$\bar{\partial}^* = -*\partial* : A^{p,q}(X) \to A^{p,q-1}(X)\,.$$

Mamy $d^* = \partial^* + \bar{\partial}^*$ (zdefiniowanie w 5.8).

8.5 Definicja: Rozmaitość jest kählerowska gdy jeden z równoważnych warunków jest spełniony:

1) lokalnie, w pewnych współrzędnych $\omega = \frac{i}{2}\sum_k dz_k \wedge d\bar{z}_k + \mathcal{O}(||x||^2)$.

2) $d\omega = 0$

3) lokalnie $\omega = \partial\bar{\partial}f$ dla pewnej funkcji $f : U \to \mathbb{R}$.

Dowód 2) $\Rightarrow$ 1) [Voisin 1, Prop 3.14]

8.6 1) innymi słowy: w każdym punkcie istnieje układ współrzędnych taki, że metryka hermitowska jest standardowa z dokładnością do wyrazów rzędu 2.

8.7 NAJWAŻNIEJSZY PRYKŁAD: Metryka Fubini-Study na $\mathbb{P}^n$

$$< \alpha, \beta >= \frac{1}{\pi} \frac{< w, w >< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > - < \tilde{\alpha}, w >< w, \tilde{\beta} >}{< w, w >^2},$$

gdzie $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T_w\mathbb{C}^{n+1}$ są podniesieniami wektorów $\alpha, \beta \in T_{[w]}\mathbb{P}^n$. W lokalnych współrzędnych na U_0 formę symplektyczną można zapisać jako

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} log(1 + \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2)$$

Spełniony jest warunek Kählera $d\omega = 0$.

8.8 Dla $n = 1$

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(1 + w\bar{w})^2} dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy$$

oraz $\int_{\mathbb{P}^1} \omega = 1$.

8.9 Wniosek: Zespolona podrozmaitość $\mathbb{P}^n$ jest kählerowska.

8.10 Tożsamości Hodge'a:
i) $[\bar{\partial}, L] = [\partial, L] = 0$ (bezpośrednio z warunku $d\omega = 0$)
i') równoważnie przemienność L^* z ∂^* i $\bar{\partial}^*$
ii) $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial$, $[\partial^*, L] = -i\bar{\partial}$
ii') równowżnie $[L^*, \bar{\partial}] = -i\partial^*$, $[L^*, \partial] = i\bar{\partial}^*$ (to istota dowodu wszystkich tożsamości)
iii) $[\partial, \bar{\partial}^*]_s = [\partial^*, \bar{\partial}]_s = 0$ (to już formalne konsekwencje ii))
iv) $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta$ i jest przemienny z ∂, $\bar{\partial}$, ∂^*, $\bar{\partial}^*$, L i L^* (dowód formalny)

8.11 Dowód tożsamości Hodge'a: jeśli $d\omega = 0$ to w każdym punkcie istnieje układ wspólrzędnych, w którym iloczyn hermitowski jest standardowy z dokładnością do wyrazów rzędu conajmniej 2 (tzn $< e_i, e_j >_z = \delta_{i,j} + \mathcal{O}(||z||^2)$). Jest to równoważne temu, że ω jest standardową formą z dokładnością do wyrazów rzędu conajmniej 2.

Tożsamość ii) (lub ii')) jest kluczowa. Wybieramy układ współrzędnych w których $\omega = \omega_0 + \eta$, gdzie ω_0 jest standardową formą symplektuczną, a $\eta \in \mathscr{O}(|z|^2)$. W szczególności $(\frac{\partial}{\partial z_k}\eta)(0) = (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\eta)(0)$. Dowodzimy $[L^*, \partial] = i\bar{\partial}^*$. Wystarczy sprawdzić

$$([L^*, \partial](\alpha))_{z=0} = i(\bar{\partial}^*\alpha)_{z=0}$$

Możemy zastąpić ω przez ω_0 i zbadać tożsamości Kählera na rozmaitoći płaskiej $\mathbb{C}^n/(krata)$. Możemy przyjąć współrzędne takie, że $\omega = i \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$ (bez $\frac{1}{2}$). Rozkładamy $\bar{\partial} = \sum \bar{\partial}_k$ i niech $\omega_k = i\, dz_k \wedge d\bar{z}_k$. Operator sprzężony:

$$L^* = -i \sum_k \iota_{\bar{\epsilon}_k} \iota_{\epsilon_k}$$

Różniczkowania:

$$\partial^* = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \iota_{\epsilon_k}$$
$$\bar{\partial}^* = -\frac{\partial}{\partial z_k} \iota_{\bar{\epsilon}_k}$$

Operatory L_k^* i ∂_ℓ są przemienne dla $k \neq \ell$. Pozostaje zbadać działanie $[L_k^*, \partial_k]$ na $\alpha = f dz_I \wedge d\bar{z}_J$, i rozważając cztery przypadki $k \in$ lub $\notin I$ lub J. Dla przykładu: jeśli $k \notin I$, $k \notin J$

$$[L_k^*, \partial_k] f dz_k \wedge d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J =$$
$$L_k^* \partial_k (f dz_k \wedge d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J) - \partial_k L_k^* (f dz_k \wedge d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J) =$$
$$i\partial_k (f dz_I \wedge d\bar{z}_J) =$$
$$i\frac{\partial}{\partial z_k} (f dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J) =$$
$$-i\frac{\partial}{\partial z_k} \iota_{\bar{\epsilon}_k} (f dz_k \wedge d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J) = i\bar{\partial}^*(....).$$

8.12 U Huybrechtsa: W dowodzie ii') wygodnie jest używać operatora $d^c = I^{-1}dI$ oraz sprzężonego $(d^c)^*$

$$d^c = -i(\partial - \bar{\partial}), \quad (d^c)^* = - * d^c *$$

i dowodzi się ii") $[L^*, d] = -(d^c)^*$. Dowód rachunkowy, korzystający z rozkładu Lefschetza na poziomie form, tzn sprawdzamy dla form postaci $L^k\alpha$.Sprawdzanie jest żmudne, ale skuteczne.

8.13 W dowódz iii) i iv) będę używał superkomutatorów $[a, b] = ab - (-1)^{\deg(a)\deg(b)}ba$. W tej konwencji $\Delta_\partial = [\partial, \partial^*]$.

iii)

$$i[\partial, \bar{\partial}^*] \overset{ii)}{=} [\partial, [L^*, \partial]] = \partial L^* \partial - \partial^2 L^* + L^* \partial^2 - \partial L^* \partial = 0$$

iv)

$$\Delta_\partial = [\partial^*, \partial] \overset{ii)}{=} i[[L^*, \bar{\partial}], \partial] \overset{Leibniz}{=} i([L^*, \underbrace{[\bar{\partial}, \partial]}_{0}] - [[L^*, \partial], \bar{\partial}]) \overset{ii)}{=} [\bar{\partial}^*, \bar{\partial}] = \Delta_{\bar{\partial}}$$

oraz z iii) $\Delta = \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}}$.

$$[L, \Delta_\partial] = [L, [\partial, \partial] \overset{Leibniz}{=} [\underbrace{[L, \partial]}_{0}, \partial^*] + [\partial, [L, \partial^*]] \overset{ii)}{=} i[\partial, -i\bar{\partial}] = 0$$

Kohomologie rozmaitości Kählera

8.14 Wniosek: $H^*(M) \simeq \mathcal{H}$ jest skończenie wymiarową reprezentacją $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$.

8.15 Skończenie wymiarowe reprezentacje $\mathfrak{sl}(2)$ są opisane przez (5.3). Stąd

$$L^k : H^{n-k}(M) \to H^{n+k}(M)$$

jest izomorfizmem (**Trudne twierdzenie Lefschetza**). Zatem mamy

$$\dim H^k(M) \leq \dim H^{k+2}(M) \qquad \text{jeśli } k+1 \leq n\,,$$
$$\dim H^k(M) \geq \dim H^{k+2}(M) \qquad \text{jeśli } k+1 \geq n\,.$$

Co więcej mamy

$$\dim H^{p,q}(M) \leq \dim H^{p+1,q+1}(M) \qquad \text{jeśli } p+q+1 \leq n\,,$$
$$\dim H^{p,q}(M) \geq \dim H^{p+1,q+1}(M) \qquad \text{jeśli } p+q+1 \geq n\,,$$

gdzie $H^{p,q}(M) = H^q(M; \Omega^p)$ (wyjaśnienie w następnym wykładzie).

9 Kohomologie rozmaitści Kählera - rozkład na typy (p, q)

9.1 Laplasjan Δ_∂ jest przemienny z rzutowaniem $A^k(X) \to A^{p,q}(X)$, zatem

$$\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}\,, \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{H}^{p,q} = \mathcal{H}^k \cap A^{p,q}\,.$$

9.2 Stąd – $H^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$, gdzie $H^{p,q}(M) = im(\mathcal{H}^{p,q} \to H^{p+q}(M)$.
– $\overline{\mathcal{H}^{p,q}} = \mathcal{H}^{q,p}$ (sprzężenie zespolone)
– $*\mathcal{H}^{p,q} = \mathcal{H}^{n-q,n-p}$, gdzie $n = \dim X$

9.3 Diament Hodge'a $h^{p,q} = h^{n-p,n-q} = h^{q,p}$. Np dla $n = 3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & h^{33} & & & & \\
 & h^{32} & & h^{23} & & & \\
h^{31} & & h^{22} & & h^{13} & & \\
h^{30} & h^{21} & & h^{12} & & h^{03} & \\
h^{20} & & h^{11} & & h^{02} & & \\
 & h^{10} & & h^{01} & & & \\
 & & h^{00} & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & \spadesuit & & \spadesuit & & & \\
\diamondsuit & & \clubsuit & & \diamondsuit & & \\
\square & & \heartsuit & & \heartsuit & & \square \\
\diamondsuit & & \clubsuit & & \diamondsuit & & \\
 & \spadesuit & & \spadesuit & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{array}$$

$$h^{00} \leq h^{11}, \quad h^{10} \leq h^{21}$$

9.4 Ponadto
– Jeśli $k = n - (p+q) \geq 0$ to $L^k : H^{p,q}(X) \to H^{p+k,q+k}(X)$ jest izomorfizmem
– rozkład Lefschetza jeśli $p + q \leq n$

$$H^{p,q}(M) = P^{p,q}(M) \oplus L(P^{p-1,q-1}(M) \oplus L^2(P^{p-2,q-2}(M) \oplus \dots$$

9.5 Rozkład Hodge'a dla form typu $(p, \bullet)$:

$$A^{p,q}(X) = \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial} \oplus im(\bar\partial) \oplus im(\bar\partial^*)\,.$$

Skoro $\Delta_{\bar\partial} = \frac{1}{2}\Delta$, więc

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial} = \mathcal{H}^{p,q}\,.$$

Stąd

$$ker(\bar\partial) = \mathcal{H}^{p,q} \oplus im(\bar\partial)$$
$$H^q(X;\Omega^p) \simeq \mathcal{H}^{p,q}\,.$$

9.6 Wniosek: Ciąg spektralny Frölichera degeneruje się

$$E_1^{p,q} = H^q(X;\Omega^p) = E_\infty^{p,q}\,.$$

9.7 Wniosek zupełnie poboczny: Dla rozmaitości Käklera (przypomnijmy, że zakładamy zwartość) jeśli $\alpha \in \Omega^p(X)$, to $\partial\alpha = 0$.

9.8 Dla rozmaitości Calabi-Yau tzn gdy $\Omega^n \simeq \mathcal{O}_X$ (i dodatkowo zakładamy, że $H^0(X,\Omega^p) = 0$ dla $0 < p < n$) diament Hodge'a wygląda tak ($n = 3$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & \clubsuit & & 0 & \\
1 & & \heartsuit & & \heartsuit & & 1 \\
 & 0 & & \clubsuit & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

Mówimy, że X^* jest kohomologicznym lustrem X gdy $h^{pq}(X^*) = h^{n-p,q}(X)$. Dla 3-rozmaitości oznacza to $h^{12}(X^*) = h^{11}(X)$ i $h^{11}(X^*) = h^{12}(X)$. Symetria lustrzana: to geometryczny sposób znajdowania X^*.

9.9 Dualność Serre'a: iloczyn zewnętrzny

$$\wedge : \Omega^p \times \Omega^q \to \Omega^{p+q}$$

zadaje formę

$$H^k(X;\Omega^p) \times H^\ell(X;\Omega^q) \to H^{k+l}(X;\Omega^{p+q})\,.$$

Gdy $k + \ell = p + q = n$ skąd mamy formę z $\int : H^n(X;\Omega^n) \simeq H^{2n}(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Z dualności Poincaré ta forma jest niezdegenerowana, więc

$$H^k(X;\Omega^p) \simeq H^{n-k}(X;\Omega^{n-p})^*\,.$$

Ogólniej: Mamy niezdegenerowaną formę

$$H^k(X;E) \times H^{n-k}(X;E^* \otimes \Omega^n) \to H^n(X;\Omega^n) \to \mathbb{C}$$

dla snopa lokalnie wolnego. W szczególnym przypadku, gdy $\Omega^p = E$:

$$\Omega^{n-p} \simeq \underline{Hom}(\Omega^p, \Omega^n)$$

Sygnatura

9.10 Relacje Hodge'a-Riemanna: Formę $B(\alpha,\beta)$ na $H^k(X)$ określamy jako:

$$B(\alpha,\beta)=\int_X \alpha\wedge\bar\beta\wedge\omega^{n-k}\,.$$

Ta forma jest półtoraliniowa, jest (anty)symetryczna, tzn $B(\alpha,\beta)=(-1)^k\overline{B(\alpha,\beta)}$. Ponadto jest niezdegenerowana: dla $\alpha\in H^k(X)$ istnieje $\gamma\in H^{2n-k}(X)$ taka, że $\int_X\alpha\wedge\bar\gamma\neq 0$. Klasa γ jest postaci $L^{n-k}\beta$ z trudnego twierdzenia Lefschetza.

9.11 Nad $\mathbb{C}$ formy antysymetryczne można zamienić na symetryczne: gdy ϕ jest antysymetryczna, tzn spełnia

$$\phi(a,b)=-\overline{\phi(b,a)}\,,$$

to $\psi(a,b):=i\phi(a,b)$ jest symetryczna. Dla form symetrycznych mamy $\psi(a,a)\in\mathbb{R}$. Mówimy, że forma symetryczna półtora liniowa jest dodatnio określona, gdy

$$\psi(a,a)>0\qquad \text{dla } a\neq 0\,.$$

Twierdzenie: Forma

$$i^{p-q}\cdot(-1)^{k(k-1)/2}B(\alpha,\beta)$$

jest symetryczna i dodatnio określona na $\alpha,\beta\in P^{p,q}(X)\subset P^k(X)\subset H^k(X)$, $k=p+q$.

9.12 Dowód. Algebra liniowa: trzeba sprawdzić dodatnią określoność formy B_0 określonej na formach zewnętrznych $P^{p,q}\subset\Lambda^{p,q}\subset\Lambda(\mathbb{C}^n)^*\otimes\mathbb{C}$ wzorem

$$\alpha\wedge\bar\beta\wedge\omega^{n-k}=B_0(\alpha,\beta)dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n\,.$$

Sprawdzamy następującą równość dla $\alpha\in P^k$:

$$(***)\quad L^{n-k}\alpha=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(n-k)!*I(\alpha)\,,$$

gdzie I jest strukturą zespoloną działającą na $\Lambda(\mathbb{C}^n)^*\otimes\mathbb{C}$. Dowodzimy indukcyjnie

$$L^j\alpha=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{j!}{(n-k-j)!}*L^{n-k-j}I(\alpha).$$

Mając $(***)$:

$$\alpha\wedge\bar\alpha\wedge\omega^{n-k}=\alpha\wedge L^{n-k}(\bar\alpha)=\alpha\wedge(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(n-k)!*I(\alpha)=$$
$$=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\alpha\wedge*(n-k)!I(\alpha)=i^{q-p}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(n-k)!<\alpha,\alpha>vol$$

9.13 Wniosek: Niech $n=2m$. Forma przeciąć (kóra jest równa $B(\alpha,\beta)$) jest symetryczna oraz ma sygnaturę

$$\sum_{p+q\le m,\ 2|p+q}(-1)^{\frac{k(k-1)+p-q}{2}}\dim(P^{p,q}(X))$$

9.14 Mamy równości $\dim P^{p,q}(M)=h^{p,q}-h^{p-1,q-1}$ i z równości $h^{p,q}=h^{q,p}=h^{n-p,n-q}$ wynika wzór na sygnaturę

$$sgn(M)==\sum_{p,q=0,\ 2|p+q}^{\dim(M)}(-1)^p h^{p,q}\sum_{p,q=0}^{\dim(M)}(-1)^p h^{p,q}\,.$$

Na przykładzie $n = 4$: Sumujemy składniki dla których $p - q$ jest parzyste:

$$sgn(M) = \begin{array}{ccccc} +p^{4,0} & -p^{3,1} & +p^{2,2} & -p^{1,3} & +p^{0,4} \\ & +p^{2,0} & -p^{1,1} & +p^{0,2} & \\ & & +p^{0,0} & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc} +h^{4,0} & -h^{3,1}+h^{2,0} & +h^{2,2}-h^{1,1} & -h^{1,3}+h^{0,2} & +h^{0,4} \\ & +h^{2,0} & -h^{1,1}+h^{0,0} & +h^{0,2} & \\ & & +h^{0,0} & & \end{array}$$

$$= +h^{4,0} \begin{array}{ccccc} & & +h^{4,4} & & \\ & +h^{4,2} & -h^{3,3} & +h^{2,4} & \\ & -h^{3,1} & +h^{2,2} & -h^{1,3} & +h^{0,4} \\ & +h^{2,0} & -h^{1,1} & +h^{0,2} & \\ & & +h^{0,0} & & \end{array}$$

Składniki nieparzyste $(-1)^q h^{p,q}$ możemy zaniedbać, bo kasują się z $(-1)^p h^{q,p}$ gdy $2 \not| p+q$.

9.15 Dla spójnych powierzchni: forma przecięć jest typu $(2h^{2,0}+1, h^{1,1}-1)$.

10

Zastosowanie trudnego twierdzenia Lefschetza do badania przekształceń:

10.1 [Blanchard, Deligne] Dane rozwłóknienie $F \subset M \twoheadrightarrow B$. Ciąg spektralny Serra

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(M)\,.$$

Jeśli B jest jednospójna, to snop $\mathcal{H}^q(F)$ jest stały i $E_2^{p,q} \simeq H^p(B) \otimes H^q(F)$.

Twierdzenie: jeśli istnieje element $[\omega] \in H^2(M)$ spełniający tezę trudnego twierdzenia Lefschetza, to $E_2 = E_\infty$, zatem

$$H^*(M) \simeq H^*(B) \otimes H^*(F)$$

jako $H^*(B)$-moduł.

Dowodzimy, że różniczki w E_r dla $r \geq 2$ są zerowe na $P^k(M)$ korzystając ze struktury multyplikatywnej ciągu spektralnego. Na E_*^{**} działa operator $L = [\omega]$. Niech $n = \dim(F)$. Dla $\alpha \in H^p(B) \otimes P^q(F) \subset E_r^{p,q}$ mamy $d_r\alpha \in E_r^{p+r,q-r+1}$. Niech $n-k = q-r+1$. Wtedy $n+k = n+(n-q+r-1) = 2n-q+r-1$

$$L^{n-q+r-1} : E_r^{p+r,q-r+1} \overset{\simeq}{\to} E_r^{p+r,2n-q+r-1}$$

Wystarczy pokazać, że $L^{n-q+r-1} d_r \alpha = 0$:

$$L^{n-q+r-1} d_r \alpha = d_r L^{n-q+r-1} \alpha = d_r L^{r-2} L^{n-q+1} \alpha = 0$$

dla $r \geq 2$, bo $P^q(F) := ker(L^{n-q+1} : H^q(F) \to H^{2n-q+2}(F))$.

10.2 Jeśli baza B nie jest jednospójna, to $\mathcal{H}^k(F)$ jest lokalnie stałym snopem stowarzyszonym z lokalnie stałym systemem współczynników. Przy założeniu, że B jest spójna i po wyborze punktu bazowego lokalny system współczynników można utożsamić z reprezentacją monodromii $\pi_1(B, b_0) \to Aut(H^k(F_0))$. W szczegłnych przypadkach stosuje się teoria Picarda-Lefschetza.

Teoria Picarda-Lefschetza

10.3 Ogólne wiadomości o **monodromii**: dla topologicznego rozwłóknienia $F \subset E \to B$ mamy odwzorowanie

$$\pi_1(B, b) \to [F_b, F_b]$$

skonstruowane przez własność podnoszenia homotopii oraz

$$\pi_1(B, b) \to Aut(H_*(F_b))\,.$$

10.4 Pęk Lefschetza: niech $X \subset \mathbb{P}^N$, A podprzestrzeń rzutowa kowymiaru 2. Hiperpłaszczyzny $H \subset \mathbb{P}^N$ zawierające A są parametryzowane przez $\mathbb{P}^1$. Oznaczenie: dla $\lambda \in \mathbb{P}^1$ odpowiadająca przestrzeń to H_λ. Definiujemy

$$\widetilde{X} = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid x \in H_\lambda\}.$$

Mamy rzutowania

$$X \longleftarrow \widetilde{X} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1.$$

Mówimy, że X jest pękiem Lefschetza gdy $\widetilde{X}$ jest gładkie i rzutowanie na $\mathbb{P}^1$ ma tylko proste osobliwości (postać lokalna $\sum_{i=1}^n z_i^2$), conajwyżej jedna we włóknie.

Twierdzenie: dla generycznego wyboru A otrzymujemy pęk Lefschetza.

10.5 Niech $S \subset \mathbb{P}^1$ będzie zbiorem wartości krytycznych p, $U = \mathbb{P}^1 \setminus S$. Wtedy $p : \widetilde{X}_U = p^{-1}(U) \to U$ jest rozwłóknieniem lokalnie trywialnym w topologii C^∞. Niech $\lambda \in U$. Grupa podstawowa $\pi = \pi_1(U, \lambda)$ działa na kohomologie włókna $X_\lambda = X \cap H_\lambda$.

10.6 Grupa podstawowa U jest wolna, generowana przez $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ (po jednym generatorze dla każdej wartości krytycznej. Jedyna relacja, to $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k = 1$ (można wyrzucić γ_k i będą wolne generatory).

10.7 Twierdzenie Picarda-Lefschetza: w pęku Lefschetza

– Cykle niezmiennicze Inv

$$Im(H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y)) = H^{n-1}(Y)^\pi$$

(to stwierdzenie jest równoważne Trudnemu Lefschetzowi, oczywiście mamy „$\subset$")

– Cykle znikające Van

$$ker(H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(X))$$

są generowane przez cykle δ_i związane z punktami krytycznymi odwzorowania $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$

– **formuła Picarda–Lefschetza** opisuje działanie pętli γ_i na cyklach w Y:

$$\gamma_i(\alpha) = \alpha + (-1)^{n(n+1)/2}(\alpha, \delta_i)\delta_i,$$

gdzie δ_i klasa małej sfery w otoczeniu i-tego punktu krytycznego.

– $H^{n-1}(Y) = Inv \oplus Van$, suma ortogonalna ze względu na formę przecięć

– rerezentacja $\pi = \pi_1(U)$ na Van jest prosta.

Złożenie $\iota_*\iota^* : H^{n-1}(X) \to H^{n+1}(X)$ jest mnożeniem przez klasą Lefschetza, więc jest izomorfizmem. Zatem ι_* jest epi, ι^* mono. Przymijmy oznaczenia:

$$Inv = \mathrm{im}(\iota^* : H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y)),$$

$$\dim Inv = \dim H^{n-1}(X)$$

$$Van = \ker(\iota_* : H^{n-1}(Y) \to H^{n+1}(X))$$

$(= ker(\iota_* : H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(X))$ via Dualność Poincaré),

$$\dim Van = \dim H^{n-1}(Y) - \dim H^{n-1}(X)$$

Ponadto

$$Inv \cap Van = im(\iota^*) \cap \ker(\iota_*) = \{0\}$$

(bo $\iota_*\iota^*$ jest izomorfizmem), zatem

$$H^{n-1}(Y) = Inv \oplus Van.$$

Ponadto z tożsamości $(i^*a \cup b, [Y]) = (a \cup i_*b, [X])$ (gdzie $\cup$ oznacza mnożenie w kohomologiach) otrzymujemy, że Inv i Van są prostopadłe ze względu na formę przecięć.

Patrz np: Klaus Lamotke, The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. Topology 20 (1981), no. 1, 15-51 lub

[Arapura §13.3] Donu Arapura, Algebraic Geometry over the Complex Numbers, Springer Universitext 2012

Teoria Morse'a C^∞-rozmaitości [Milnor – Morse theory, 1963]

– funkcja Morse'a $f : M \to \mathbb{R}$ to funkcja właściwa, taka że jeśli $Df(p) = 0$, to $D^2f(p)$ jest formą niezdegenerowaną. Zakładamy też, że w przeciwobrazie wartości krytycznej jest tylko jeden punkt krytyczny.

– $ind(p)$=indeks punktu krytycznego = ilość minusów w formie $D^2f(p)$, wtedy $M_{\leq p+\varepsilon}$ powstaje z $M_{\leq p-\varepsilon}$ poprzez doklejenie $I^{ind(p)} \times I^{n-ind(p)}$ wzdłuż $\partial I^{ind(p)} \times I^{n-ind(p)}$, czyli homotopijnie doklejamy komórkę wymiaru $ind(p)$.

– niech $M \subset \mathbb{R}^N$, $f_q(x) = dist(q,x)^2$ dla ustalonego $q \in \mathbb{R}^N \setminus M$: dla prawie wszystkich q jest funkcją Morse'a

– załóżmy, że $q = 0$, p jest krytyczny, $T_pM = \{x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0\}$; zatem M lokalnie jest wykresem funkcji $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{N-n}$, $Dg(0) = 0$; możemy założyć, że $g(0.\ldots,0) = (a,0,\ldots,0)$ dla $a > 0$; wtedy

$$f_q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (a + g_1(x_1,\ldots,x_n))^2 + \sum_{j=2}^{N-n} g_j(x_1,\ldots,x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2aQ(x_1,\ldots,x_n) + \mathcal{O}(||x||^4)\,,$$

gdzie Q jest częścią kwadratową g_1, stąd

$$D^2f_q(p) = 2(I + 2aQ)\,.$$

oraz

$$ind(p) = \#\{\lambda \in specQ \mid \lambda < -\tfrac{1}{2a}\}$$

10.8 Jeśli $M \subset \mathbb{C}^N$ podrozmaitość zespolona, $q \notin M$, p punkt krytyczny funkcji f_q, to indeks tego punktu jest conajwyżej $\dim_{\mathbb{C}}(M)$.

– możemy założyć jak wyżej, że $q = 0$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Krok pomocniczy: Niech Q będzie niezdegenerowaną formą zespoloną dwuliniową na $\mathbb{C}^n$. Jeśli v jest wektorem własnym rzeczywistej formy $re(Q)$ z wartością własną λ, to iv jest wektorem własnym z wartością własną $-\lambda$. Zatem wartości własne są położone symetrycznie względem 0.

Indeks formy $2(I + a\,re(D^2g(0)) = 2(I + 2a\,re(Q))$ jest conajwyżej $\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(M)$.

10.9 Jeśli $M \subset \mathbb{C}^N$ podrozmaitość zespolona wymiaru n, to M ma typ homotopijny n-wymiarowego CW-kompleksu/kompleksu symplicjalnego. Zatem $H^k(M;R) = 0$ dla $k > n$ (współczynniki dowolne).

10.10 Łatwe twierdzenie Lefschetza [Milnor, Morse Theory §7]: Jeśli $X \subset \mathbb{P}^N$ podrozmaitość zespolona wymiaru n, $Y = X \cap \mathbb{P}^{N-1}$, to $H_{n-k}(X \setminus Y) \simeq H^k(X,Y) = 0$ dla $k < n$. Zatem $i^* : H^k(X) \to H^k(Y)$ jest izomorfizmem dla $k < n-1$, monomorfizmem dla $k = n-1$.

10.11 Podobnie: $H^{n-k}(X \setminus Y) \simeq H_k(X,Y) = 0$ dla $k < n$. Zatem $i_* : H_k(Y) \to H_k(X)$ jest izomorfizmem dla $k < n-1$, epimorfizmem dla $k = n-1$.

10.12 Ponadto $i_* : \pi_1(Y) \to \pi_(X)$ jest izomorfizmem gdy $1 < n-1$, epimorfizmem dla $1 = n-1$.

10.13 Jeśli $X \subset \mathbb{P}^N$, oraz M jest gładką hiperpowierzchnią stopnia d, to $M \cap X \simeq \iota(X) \cap H$, gdzie $\iota : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}(Sym^d(\mathbb{C}^{N+1}))$ jest zanurzeniem Plückera, i H jest hiperpłaszczyzną w $\mathbb{P}(Sym^d(\mathbb{C}^{N+1}))$.

Stąd dla zupełnego przecięcia dostajemy informację o wszystkich liczbach Bettiego $X \subset \mathbb{P}^N$ oprócz środkowej:

$$X = X_{N-n} \subset X_{N-n-1} \subset \cdots \subset X_{N-1} \subset X_N = \mathbb{P}^N$$

$\dim(X_i) = N - i$, skoro $k < n < \dim(X_i)$ dla $i < N - n$, to mamy izomorfizmy $H^k(X_i) \simeq H^k(x_{i+1})$. Zatem

$$H^k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } k \text{ parzystego} \\ 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

dla $k < n$, oraz z dualności Poincaré $H^k(X) \simeq H_{2n-k}(X)$ ten sam wzór mamy dla $n > k$.

10.14 Dla zupełnych przecięć, poza środkowym wymiarem $H^*(X;\mathbb{Q})$ są generowane przez $[\omega^k]$.

10.15 Ćw: znaleźć $\dim(H^n(Q_n))$ dla nieosobliwej kwadryki w $\mathbb{P}^{n+1}$.

11 Wiązki wektorowe

11.1 Niech $Vect^1(X)$ oznacza zbiór klas izomorfizmu wiązek liniowych nad X. Różne definicje pierwszej klasy Cherna wiązek liniowych:

- aksjomatyczna definicja np wg Milnora-Stasheffa:

a)	$c_1 : Vect^1(-) \to H^2(-,\mathbb{Z})$ jest naturalną transformacją funktorów $Top \to GrAb$
b)	$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$
c)	$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) =$ dodatni generator $H^2(\mathbb{P}^1)$

- poprzez utożsamienie $Vect^1(X) = [X, \mathbb{P}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z},2)] = H^2(X;\mathbb{Z})$,
  gdzie oznacza $[-,-]$ oznacza zbiór klas homotopii.
- poprzez ciąg dokładny kohomologii stowarzyszony z krótkim ciągiem dokładnym snopów

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to C(X,\mathbb{C}) \overset{\exp}{\to} C(X,\mathbb{C}^*) \to 0$$

$$0 = H^1(X, C(X,\mathbb{C})) \to H^1(X, C(X,\mathbb{C}^*)) \overset{\simeq}{\to} H^2(X; 2\pi i\mathbb{Z}) \to H^2(X, C(X,\mathbb{C})) = 0$$

  Przy czym zauważamy, że $Vect^1(X) = \check{H}^1(X, H^1(X, C(X,\mathbb{C}^*))$.
- poprzez teorię przeszkód: przeszkoda do istnienia niezerującego się przekroju leży w

$$H^2(X;\pi_1(\mathbb{C}^*)) \simeq H^2(X;\mathbb{Z})$$

- definicja różniczkowa $\frac{i}{2\pi}[F_\nabla] = \frac{i}{2\pi}[\partial\bar\partial \log h] \in H^2(X;\mathbb{C})$, którą omówimy poniżej.

Dalej wg Huybrechsa §4

11.2 Struktura hermitowska na wiązce zespolonej (nad dowolną bazą)

11.3 Koneksja na wiązce zespolonej nad C^∞ rozmaitością.

11.4 Koneksja zgodna ze strukturą hermoitowską na wiązce (lokalnie w trywializacji $\nabla = d + a$, gdzie $a \in A^1(X, \mathfrak{u}(E)) \subset A^1(X, End(E))$.

11.5 Zakładamy, że baza X jest rozmaitością zespoloną, E wiązką holomorficzną (tzn jest sklejona za pomocą funkcji holomorficznych). Niech $A^k(X,E) = \Gamma(\mathcal{A}^k_X \otimes E)$, $A^k(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X,E)$. Operator $\bar\partial$ zdefiniowany w trywializacji definiuje globalny operator

$$\bar\partial_E : A^{p,q}(X,E) \to A^{p,q+1}(X,E)\,.$$

Uwaga: operator ∂ nie komutuje z funkcjami sklejającymi, więc nie mamy globalnego ∂_E, chyba że wiązkę E można skleić za pomocą funkcji lokalnie stałych.

11.6 Koneksja rozpada się na sumę $\nabla^{10} + \nabla^{01}$. Mówimy, że ∇ jest zgodna ze strukturą zespoloną gdy $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}_E$.

11.7 Istnieje dokładnie jedna koneksja zgodna ze strukturą hermitowską i zespoloną. Lokalnie, jeśli $\nabla = d + a$, to

$$A = \bar{H}^{-1}\partial(\bar{H})\,,$$

gdzie A i H są macierzami koneksji i iloczynu hermitowskiego

$$A \in M_{n\times n}(A^{1,0}(X))\,, \qquad H \in M_{n\times n}(C^\infty(X))\,, \qquad \bar{H} = H^T\,, \qquad n = \mathrm{rk}(E).$$

11.8 Jeśli $n = 1$ to $a = \partial\log(h)$.

11.9 Rozszerzenie koneksji poprzez formułę Leibniza $\nabla_E : \mathcal{A}^k(X,E) \to \mathcal{A}^{k+1}(X,E)$.

11.10 Koneksja na E indukuje koneksję na $End(E)$

$$(\nabla f)(s) := \nabla(f(s)) - f\nabla s = [\nabla, f]s\,.$$

11.11 Krzywizna $F_\nabla = \nabla^2 : A^0(E) \to \mathcal{A}^2(E)$ jest $A^0(X)$-liniowa, więc zadaje przekrój $\mathcal{A}^2(X, End(E))$.

11.12 Lokalnie w trywializacji, w zapisie macierzowym

$$F_\nabla = dA + A\wedge A \in M_{n\times n}(A^2(X)).$$

11.13 Dla wiązek liniowych $E = L = \mathbb{C}\times X$: mamy $End(L) = \mathbb{C}$ oraz $A\wedge A = 0$ (bo A jest macierzą 1×1). Wtedy

$$F_\nabla = dA = d\partial\log(H) = \bar{\partial}\partial\log(H)\,.$$

11.14 Przykład $L = \mathcal{O}(-1)$, t.j. wiązka tautologiczna na $\mathbb{P}^n$, $L \subset \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{P}^n$ ma indukowaną strukturę hermitowską ze standardowego iloczynu hermitowskiego na $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$F_\nabla = d\partial\log(||v||^2) = -\partial\bar{\partial}\log(||v||^2),$$

gdzie v jest przekrojem wiązki,

$$\frac{i}{2\pi}F_\nabla = -\omega_{FS}\,.$$

Nota bene: $c_1(\mathcal{O}(-1)) = -[\omega_{FS}]$.

11.15 Dla wiązki liniowej definiujemy formę Cherna $c_1(L,\nabla)$. Dowiedziemym, że $dc_1(L,\nabla) = 0$ (z tożsamości Bianchi) oraz klasa kohomologii $[c_1(L,\nabla)] \in H^2(X;\mathbb{C})$ nie zależy od wyboru koneksji ∇.

12 Klasy Cherna

12.1 Tożsamość Bianchi:

$$\nabla(F_\nabla) = 0 \in \mathcal{A}^3(X, End(E)).$$

Lokalnie dla $\nabla = d + A$ mamy

$$dF_\nabla = d(dA + A\wedge A) = dA\wedge A - A\wedge dA = [dA, A] = [F_\nabla, A]\,.$$

Oraz

$$\nabla(F_\nabla) = dF_\nabla + [A, F_\nabla] = 0\,.$$

12.2 Jeśli $E = L$ jest wiązką liniową, to klasa $c(L) = \frac{i}{2\pi}[F_\nabla] \in H^2(X;\mathbb{C})$ nie zależy od wyboru koneksji.

Dow. Mając dwie koneksje ∇_0, ∇_1 definiujemy koneksję na $X\times\mathbb{R}$ wzorem $\tilde{\nabla} = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$. Włożenia $i_0, i_1 : X \to X\times\mathbb{R}$ na poziomy $t = 0$ i $t = 1$ są homotopijne, zatem $[F_{\nabla_1}] = i_1^*[F_{\tilde{\nabla}}] = i_0^*[F_{\tilde{\nabla}}] = [F_{\nabla_0}]$.

12.3 Klasa $c(L)$ spełnia aksjomaty pierwszej klasy Cherna 11.1.

Klasy Cherna wiązek wyższej rangi

12.4 Dla dowolnego wielomianu $P : End(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ niezmienniczego ze względu na sprzężenie forma $P(\nabla_E^2) \in A^{2\deg(P)}(X)$ jest zamkięta.

Dowód (wg Milnora-Stasheffa Appendix C) Dla $X = (x_{ij})_{i,j}$ definiujemy macierz $P'(X) = (\frac{\partial P}{\partial x_{ji}})_{i,j}$ (uwaga na indeksy i, j przestawione). Mamy $dP(X) = tr(P'(X) \cdot dX)$. Ponadto, jeśli P jest Ad-niezmienniczy, to macierze $P'(X)$ i X są przemienne.

$$dP(F_\nabla) = tr(P'(F_\nabla)dF_\nabla) = tr(P'(F_\nabla)[F_\nabla, A]) = tr(P'(F_\nabla) \wedge F_\nabla \wedge A - P'(F_\nabla) \wedge A \wedge F_\nabla) =$$
$$= tr(F_\nabla \wedge P'(F_\nabla) \wedge A - P'(F_\nabla) \wedge A \wedge F_\nabla) = tr([F_\nabla, P'(F_\nabla) \wedge A]) = 0\,.$$

12.5 Uwaga: Przekształcenie

$$\mathbb{C}[M_{n\times n}(\mathbb{C})]^{GL_n} \to \mathbb{C}[\text{macierze diagonalne}]^{\Sigma_n} = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$$

jest izomorfizmem. Jeśli P jest wielomianem Ad-niezmienniczym, to można go wyrazić przez współczynniki wielomianu charakterystycznego. Równoważnie: $P(A)$ jest funkcją symetryczną od wartości własnych macierzy A.

12.6 $P(F_\nabla)$ definiuje klasę kohomologii, która nie zależy od wyboru koneksji. Biorąc $P = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \sigma_k$ (gdzie σ_k jest k-tym współczynnikiem wielomianu charakterystycznego) definiujemy klasy Cherna.

12.7 Sprawdzamy, że klasy Cherna spełniają aksjomaty.
1) Funktorialność (można brać pull-back koneksji)
2) Formuła Whitneya

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)\,,$$

gdzie $c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_{rk(E)}(E)$. Można (korzystając z zasady rozszczepienia założyć, że wiązka rozszczepia się na wiązki liniowe). Dowód sprowadza się do wzorów Viete'a.
3) Unormowanie $c_1(\mathcal{O}(-1)) = -[\omega_{FS}]$

12.8 Wniosek: Różniczkowo zdefiniowane klasy Cherna przychodzą z kohomologii całkowitoliczbowych.

Wiązki dodatnie

12.9 Mówimy, że forma $\omega \in A^{1,1}(X) \cap A^2(X) \subset A^2(X)_{\mathbb{C}}$ jest dodatnia, gdy jest minus częścią urojoną iloczynu hermitowskiego $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle x, y\rangle - i\omega(x, y)$, tzn

$$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{ij} dz_i \wedge \bar{d}z_j\,,$$

gdzie (h_{ij}) jest macierzą iloczynu hermitowskiego.

12.10 Wiązki liniowa jest dodatnia gdy dopuszcza koneksję ∇ taką, że $\frac{i}{2\pi} F_\nabla$ jest dodatnią (1,1)-formą.

12.11 Przykład wiązki dodatniej: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$, $k > 0$.

12.12 Twierdzenie Kodairy o znikaniu: Jeśli L jest dodatnia, to $H^i(X; K_X + L) = 0$ dla $i > 0$, gdzie napis $K_X + L$ oznacza snop holomorficznych przekrojów wiązki liniowej $\Omega_X^{\dim X} \otimes L$.

12.13 Twierdzenie Kodairy o zanurzeniu: Jeśli wiązka jest dodatnia, to dla dostatecznie dużego ν jest generowana przez globalne przekroje i odwzorowanie $X \to \mathbb{P}(H^0(X; L^\nu)^*)$ jest zanurzeniem. (Zakładamy tylko, że X jest zwarta, analityczna.)

12.14 Wniosek: Isnienie dodatniej wiązki na rozmaitości analitycznej X implikuje, że X jest rozmaitością rzutową (w szczególności algebraiczną).

13

13.1 Jeśli L i K dodatnie, to $L \otimes K$ też. Jeśli $K = L^{\otimes n}$ jest dodatnie, to L też. Obcięcie zachowuje dodatniość.

13.2 Jeśli L jest generowana przez globalne przekroje holomorficzne, to mamy odwzorowanie

$$\phi : X \to \mathbb{P}(H^0(X; L)^*)$$

w trywializacji gdzie $L \simeq \mathbb{C}$:

$$x \mapsto (s \mapsto s(x)) .$$

Wtedy $L = \phi^*(\mathcal{O}(1))$. Zatem L jest ,,półdodatnia", tzn L dopuszcza koneksję, której krzywizna definiuje formę półtora-liniowa nieujemnie określoną. Własność półdodatniości jest zachowywana przez pull-backi.

Poniżej używamy E jako oznaczenie wiązki, bo L jest zarezerwowane na operator Lefschetza. Zakładamy, że X jest wartą rozmairością analityczną.

13.3 Ustalamy metrykę hermitowską na X i E. Definiujemy skręcone harmoniczne

$$\mathcal{H}^{p,q}(E) := \ker(\Delta_E) \subset A^{p,q}(E) , \qquad \Delta_E = \bar\partial_E \bar\partial_E^* + \bar\partial_E^* \bar\partial_E$$

13.4 Jeśli X jest zwarta to

$$A^{p,q}(E) = \mathcal{H}^{p,q}(E) \oplus im(\bar\partial_E) + im(\bar\partial_E^*)$$

13.5 Z rozkładu Hodge'a dla $\bar\partial$

$$H^{p,q}(X; E) = \mathcal{H}^{p,q}(E) = ker(\Delta_E) .$$

13.6 Mamy
– Operator $L : A^{p,q}(X; E) \to A^{p+1,q+1}(X; E)$ i sprzężony L^*
– $\nabla = \nabla^{1,0} + \bar\partial_E$ oraz tożsamość (u Huybrechtsa nazwana tożsamością Nakano)

$$[L^*, \bar\partial_E] = -i(\nabla^{1,0})^*,$$

ktża jest uogólnieniem tożsamości Kählera $[L^*, \bar\partial] = -i\partial^*$.

13.7 (Znikanie Kodairy-Nakano) Jeśli E jest dodatnia, to $H^{p,q}(X; E) = H^q(X; \Omega_X^p \otimes E) = 0$ dla $p + q > \dim X$.

Forma krzywizny F_∇ jest typu (1,1), lokalnie

$$F_\nabla = dA = \bar\partial\partial(\log h) .$$

Lokalnie

$$\nabla^{1,0}\eta = \partial\eta + \partial(\log h) \wedge \eta$$

$$\bar\partial_E(\nabla^{1,0}\eta) = (-\partial\bar\partial\eta + \bar\partial(\partial(\log h) \wedge \eta)) = -\partial\bar\partial\eta - \partial(\log h) \wedge \bar\partial\eta + \bar\partial\partial(\log h) \wedge \eta$$
$$\nabla^{1,0}(\bar\partial_E\eta) = \partial\bar\partial\eta + \partial(\log h) \wedge \bar\partial\eta$$

$$\boxed{F_\nabla \wedge \eta = \bar\partial_E \nabla^{1,0}\eta + \nabla^{1,0}\bar\partial_E\eta}$$

Niech $\eta \in \mathcal{H}^{p,q}(E)$,

$$\bar\partial_E\eta = 0, \qquad \bar\partial_E^*\eta = 0$$

Wtedy

$$\boxed{F_\nabla \wedge \eta = \bar\partial_E \nabla^{1,0}\eta}$$

Stąd

$$i\langle L^* F_\nabla \eta, \eta\rangle = i\langle L^* \bar\partial_E \nabla^{1,0}\eta, \eta\rangle \overset{Nakano}{=} i\langle (\bar\partial_E L^* - i(\nabla^{1,0})^*)\nabla^{1,0}\eta, \eta\rangle =$$

$$= i\langle (\bar\partial_E L^*, \eta\rangle + \langle (\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0}\eta, \eta\rangle = i\langle (L^*, \partial_E^*\eta\rangle + \langle \nabla^{1,0}\eta, \nabla^{1,0}\eta\rangle = \langle \nabla^{1,0}\eta, \nabla^{1,0}\eta\rangle \geq 0$$

Podobnie

$$i\langle F_\nabla L^*\eta, \eta\rangle = i\langle (\bar\partial_E \nabla^{1,0} + \nabla^{1,0}\bar\partial_E)L^*\eta, \eta\rangle = i\langle (\nabla^{1,0}\bar\partial_E)L^*\eta, \eta\rangle = i\langle \nabla^{1,0}(L^*\bar\partial_E + i(\nabla^{1,0})^*)\eta, \eta\rangle =$$

$$-\langle \nabla^{1,0}(\nabla^{1,0})^*\eta, \eta\rangle = -\langle (\nabla^{1,0})^*\eta, (\nabla^{1,0})^*\eta\rangle \leq 0$$

Stąd

$$i\langle [L^*, F_\nabla]\eta, \eta\rangle = ||(\nabla^{1,0})^*\eta||^2 + ||\nabla^{1,0}\eta||^2 \geq 0$$

Ale

$$iF_\nabla \wedge - = 2\pi L$$

bo L jest dodatnia, więc $\frac{i}{2\pi}F_\nabla$ jest formą Kählera. Stąd

$$i\langle [L^*, F_\nabla]\eta, \eta\rangle = 2\pi\langle [L^*, L]\eta, \eta\rangle = -2\pi\langle H\eta, \eta\rangle = 2\pi(n - (p+q))||\eta||^2.$$

Jeśli $n - (p+q) \leq 0$, to $i\langle [L^*, F_\nabla]\eta, \eta\rangle \leq 0$. Zatem $||\eta||^2 = 0$.

13.8 Wniosek: jeśli $E^{\otimes n} = \mathcal{O}(1)_X$ dla pewnego zanurzenia $X \subset \mathbb{P}^N$, to $H^k(X, \Omega_X^n \otimes E) = 0$ dla $k > 0$.

13.9 Poprzez dualność Serre'a (lub bezpośrednio, korzystając z tego, że $\frac{i}{2\pi}F_{\nabla_{E^*}} = -\omega$):

$$H^k(X, E^*) = 0$$

dla $k < n$.

13.10 Jeśli E jest dodatnia K dowolna, to $H^q(X, E^{\otimes\mu} \otimes K) = 0$ dla $\mu >> 0$.

Dow $E^{\otimes\mu} \otimes K = \Omega^n \otimes M_\mu$, gdzie $M_\mu = E^{\otimes\mu} \otimes K \otimes \Omega^n$ jest dodatnia dla dostatecznie dużych μ.

Twierdzenie Kodairy o zanurzeniu według Griffiths-Harris §1.4

Wracamy do oznaczania wiązek liniowych przez L.

13.11 Jeśli X jest zwartą rozmaitścią, a L szeroką wiązką na X, to kanoniczne odwzorowania $\phi_{L^\nu} : X \to \mathbb{P}(H^0(X; L^\nu)^*)$ dla dostatecznie dużych ν jest włożeniem.

Kroki dowodu:

a) ϕ_{L^ν} jest dobrze określone, tzn nie ma punktu w którym wszystkie przekroje zerują się: dla $x \in X$ obcięcie

$$H^0(X; L^\nu) \to L_x^\nu = H^0(X; L^b \otimes \mathcal{O}_X/m_x)$$

jest epi,

b) ϕ_{L^ν} rozdziela punkty: dla $x \in X$ obcięcie

$$H^0(X; L^\nu) \to L_x^\nu \oplus L_y^\nu$$

jest epi, (b) $\Rightarrow$ a))

c) ϕ_{L^ν} ma niezdegenerowaną rórżniczkę w każdym punkcie x:

$$H^0(X; L^\nu \otimes m_x) \to L_x^\nu \otimes T_x^* X = H^0(X; L^\nu \otimes \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X/m_x)$$

jest epi.

Zamiast badać te przekształcenia na X rozdmuchujemy punkty i dowodzimy równoważnych stwierdzeń:

b') obcięcie

$$H^0(\tilde X; \tilde L^\nu) \to H^0(E; \tilde L^\nu_{|E}) = H^0(\tilde X; \tilde L^\nu \otimes \mathcal{O}_{\tilde X}/I_E)$$

jest epi, gdzie $\tilde{X} = Bl_x Bl_y X$, $\tilde{L}$ jest wiązką przeciągniętą na $\tilde{X}$, E jest sumą dywizorów wyjątkowych, I_E snopem ideałów E.

c') obcięcie

$$H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes I_E) \to H^0(E; \tilde{L}^\nu_{|E} \otimes I_E) = H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}/I_E \otimes I_E)$$

jest epi, gdzie $\tilde{X} = Bl_x X$, $\tilde{L}$ jest wiązką przeciągniętą na $\tilde{X}$, E jest dywizorów wyjątkowm, I_E snopem ideałów E.

Snop ideałów I_E jest lokalnie wolny, jako wiązka liniowa jest równy $\mathcal{O}(-E)$. Zauważmy, że I_E obcięty do $E = \mathbb{P}(T_x X)$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(1)$, stąd

$$H^0(E; \tilde{L}^\nu_{|E} \otimes I_E) = L^\nu_x \otimes T^*_x X\,.$$

13.12 Zastosowanie znikań:

b')

$$H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu) \to H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}/I_E) \to H^1(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes I_E) = 0$$

c') Zauważamy, że $\mathcal{O}_{\tilde{X}}/I_E \otimes I_E \simeq I_E/I_E^2$

$$H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes I_E) \to H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes I_E/I_E^2) \to H^1(\tilde{X}; \tilde{L}^\nu \otimes I_E^2) = 0$$

Korzystamy z:

A) Jeśli L jest dodatnia, to $\tilde{L}^\nu \otimes I_E = \tilde{L}^\nu \otimes \mathcal{O}(-E)$ jest dodatnia dla dostatecznie dużych L.

B) Twierdzenie Kodairy-Nakano o znikaniu.

Np b') dowodzimy rozkładając:

$$\tilde{L}^\nu \otimes I_E = (\tilde{L}^\nu \otimes \mathcal{O}(-E) \otimes \tilde{K}_X^{-1} \otimes \mathcal{O}(-(\dim X - 1)E)) \otimes K_{\tilde{X}}$$

$$= (\tilde{L}^{n_1} \otimes \tilde{K}_X^{-1}) \otimes (\tilde{L}^{n_2} \otimes \mathcal{O}(-(\dim X)E) \otimes K_{\tilde{X}}$$

bo

$$K_{\tilde{X}} = \tilde{K}_X \otimes \mathcal{O}((\dim X - 1)E).$$

Zatem $\tilde{L}^\nu \otimes I_E$ jest iloczynem wiązki nieujemnej i dodatinej $\otimes K_{\tilde{X}}$ dla dużych n_1 i n_2, więc można stosować twierdzenie Kodairy-Nakano.

13.13 Przy powyższych założeniach X jest rzutową rozmaitością algebraiczną.

Zamiast założenia o krzywiźnie wystarczy warunek o klasach kohomologii:

13.14 Stw: Jeśli $[\omega] = c_1(L) \in H^2(X)$, gdzie ω jest rzeczywistą (1,1)-formą, to istnieje koneksja ∇ taka, że $\omega = \frac{i}{2\pi} F_\nabla$.

Dw: lokalnie w trywializacji $F_\nabla = \bar{\partial}\partial \log(h(z))$. Dla innego wyboru metryki mamy $h' = e^\rho h$. Stąd

$$F_{\nabla'} = \bar{\partial}\partial \log(e^\rho h(z)) = F_\nabla + \bar{\partial}\partial\rho.$$

Chcemy by

$$F_{\nabla'} = -2\pi i\omega = F_\nabla + d\beta$$

dla zadanej $\beta \in A^1(X)$. Zatem trzeba rozwiązać równanie

$$\bar{\partial}\partial\rho = d\beta\,.$$

Wtedy $h' = e^\rho h$ i ∇' jest zgodną koneksją.

Czyli: dana forma dokądna $d\beta$ typu (1,1), szukamy ρ takiego, że $d\beta = \bar{\partial}\partial\rho$ Istnienie ρ wynika bezpośrednio z $\partial\bar{\partial}$-lematu [Huy, Cor 3.2.10]

Dla formy $\phi \in A^{p,q}$ mamy $\phi = d\beta \Rightarrow \exists_\gamma \quad \phi = \partial\bar{\partial}\gamma$

13.15 Jeśli (X, ω) jest rozmaitością Kählerowską, oraz $[\omega]$ jest postaci $\lambda[\omega']$ dla $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $[\omega'] \in H^*(X; \mathbb{Q})$, to X jest rozmaitością rzutową.

Dow. Wystarczy pokazać, że $[\omega'] = c_1(L)$ dla pewnej holomorficznej wiązki zespolonej. To wynika z ciągu dokładnego

$$Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X; \mathbb{Z}) \to H^2(X; \mathcal{O}_X) = H^{2,0}(X)\,.$$

Jeśli $[\omega]$ z dokładnością do skalara jest reprezntowalna przez wymierną klasę, równoważnie całkowitą klasę. Odwzorowanie snopów

$$\underline{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{O}_X$$

indukuje odwzorowanie

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \to H^2(X; \mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{2,0}(X)\,,$$

przy którym klasy typu (1,1) są w jądrze.