EGZAMIN 28 STYCZNIA 2012

---

1) Ile razy trzeba rzucić monetą, żeby mieć 90-cio procentową pewność, że choć raz wypadnie orzeł?

$\frac{1}{2^n} < \frac{10}{100}$, *więc* $n \geq 4$

---

2) Trzy razy rzucamy kostką. Jeśli wypadnie piątka lub szóstka dostajemy jeden punkt. W przeciwnym wypadku nie dostajemy punktu. Niech X będzie liczbą zdobytych punktów. Podać rozkład zmiennej losowej X i zobrazować go wykresem.

$P(X=0) = \frac{8}{27}$
$P(X=1) = \frac{12}{27}$
$P(X=2) = \frac{6}{27}$
$P(X=3) = \frac{1}{27}$
Zrobić rysunek

---

3) Rzucamy 100 razy symetryczną monetą. Zmienna losowa X jest równa ilości wyrzuconych orłów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że X jest większe od 53?

$\mu = 50$, $\sigma = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$, $Z = \frac{53-50}{5} = 0.6$, $P = 0.5 - 0.2257 = 0.2743$

---

4) Jaki jest związek pomiędzy rozproszeniem (odchylenem standardowym) w próbie oznaczanym przez $\hat{s}$, a estymacją rozproszenia w całej populacji oznaczaną przez s?

$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\hat{s}$

---

5) Co to jest błąd pierwszego rodzaju?

Jeśli odrzucimy prawdziwą hipotezę zerową: prawdopodobieństwo otrzymanego wyniku.

---

6) Zmierzyliśmy długość 20 pająków. Otrzymaliśmy dane: suma długości $\sum X = 100mm$, suma kwadratów długości $\sum X^2 = 550mm^2$. Obliczyć średnią i odchylenie standardowe próby.

$\overline{X} = 5$, $\hat{s}^2 = \frac{\Sigma X^2}{n} - \overline{X}^2 = 27.5 - 25 = 2.5$, $\hat{s} \simeq 1.58$

---

7) Producent podaje, że produkowane przez niego gwoździe mają średnio długość 30mm. Testujemy to stwierdzenie na poziomie istotności 0.05. Zmierzyliśmy długość 50 gwoździ i otrzymaliśmy średnią 29mm z odchyleniem standardowym $s = 2mm$. Czy przyjmujemy, czy odrzucamy hipotezę zerową?

$s_{\overline{X}} = \frac{2mm}{\sqrt{50}} \simeq 0.28mm$, $Z = \frac{1mm}{0.28mm} \simeq 3.53 > 1.93$, *odrzucamy.*

---

8) Zebraliśmy 17 wyników pewnej wielkości i obliczyliśmy średnią $\mu = 14.3$ oraz odchylenie standardowe próby $\hat{s} = 1.8$. Podać 95%-przedział ufności średniej w całej populacji.

$14.3 \pm 2,12\frac{1.8}{\sqrt{17-1}} = 14.3 \pm 0.954$

CZĘŚĆ. 2

---

9) Badamy dwie populacje: w pierwszej na podstawie próby 20-osobowej otrzymaliśmy średnią $\overline{X}_1 = 50$ z odchyleniem standardowym $s_1 = 10$, a w drugiej na podstawie próby 15-osobowej otrzymaliśmy średnią $\overline{X}_2 = 55$ z odchyleniem standardowym $s_2 = 5$. Zweryfikować hipotezę mówiącą, że średnie są równe. Czy możemy zakładać, że wariancje są równe?

$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 4 > F_{kryt} = 2.4$ *(dla poziomu istotności 0.05,* $df_1 = 19$, $df_2 = 14$*). Zatem przyjmujemy hipotezę alternatywną, mówiącą wariancje są różne.*
Odchylenie standardowe różnicy średnich $s_{\overline{X}} = \sqrt{s_1^2/20 + s_2^2/15} \simeq 2.31$, $Z = \frac{5}{2.31} = 2.16 > 1.96$,
więc odrzucamy hipotezę zerową na poziomie istotności 0.05.

Gdyby wariancje były równe:

Odchylenie standardowe różnicy średnich $s_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{(20-1)10^2+(15-1)5^2)}{20+15-2}}\sqrt{\frac{20+15}{20 \cdot 15}} = \sqrt{\frac{175}{22}} \simeq 2.82$, $Z = \frac{5}{2.82} = 1.77$.
Dla poziomu istotności 0.05 przyjmujemy hipotezę zerową, gdyż $1.77 < Z_{\alpha=0.05} = 1.96$, *lecz dla poziomu istotności 0.1 odrzucamy hipotezę zerową, gdyż* $Z_{\alpha=0.1} = 1.68$

---

10) W populacji rozproszenie σ pewnej wielkości jest równe 10cm. Jaka musi conajmniej być liczebność próby aby wyznaczyć średnią z dokładnością do 1cm (przyjąć poziom istotności 0.05).

$n_{min} > (1.96\frac{10cm}{1cm})^2 = 384$

---

11) Badamy muszki żerujące na owocach (jabłka i banany). Muszki mają tęczowe skrzydła lub zielone. Otrzymaliśmy dane:

	tęczowe	zielone
jabłka	20	15
banany	40	25

a) Jakiego rozkładu frekwencji byśmy się spodziewali zakładając, że nie ma związku między pokarmem a kolorem skrzydeł?

	tęczowe	*zielone*	*razem*
jabłka	*21*	*14*	*35*
banany	*39*	*26*	*65*
razem	*60*	*40*	*100*

b) Sformulować hipotezę zerową i stosując rozkład χ^2 przeprowadzić test.

Hipoteza: kolor skrzydeł i pokarm nie są ze sobą związane.

$\chi^2 = \frac{1^2}{21} + \frac{1^2}{14} + \frac{1^2}{39} + \frac{1^2}{26} < 3.8$, *przyjmujemy (poziom istotności 0.05)*

---

12) Testujemy hipotzę: wariancja populacji $\sigma_0^2 = 4$. Na podstawie 32 danych obliczyliśmy, że $s^2 = 6$. Czy przyjmujemy, czy też odrzucamy hipotezę zerową?

$\chi^2 = \frac{32 \cdot 6}{4} = 48 > \chi^2_{\alpha=0.05, df=31} = 44.9$, *odrzucamy (poziom istotności 0.05)*

---

13) Na podstawie pewnych danych obliczono, że współczynnik korelacji Pearsona jest równy $r = 0.91$. Oznacza to, że korelacja jest:

a) **silna** b) ze wzrostem X **należy** spodziewać się wzrostu Y.

---

14) Ekipa dendrologów mierzy wysokość drzewa: z pewnej odległości widać czubek pod kątem o tangensie równym 1/5, a z odległości o 40 m większej pod kątem o tangensie równym 1/7. Jaka jest wysokość drzewa?

$h = \frac{40}{7-5} = 20$

---

15) Jaka jest odległość punktów A i B na globie ziemskim?
Współrzędne geograficzne A: N30^o E60^o, B: N45^o E90^o.

Z tw Albattaniego $cos(\overline{AB}) \simeq 0.8839$, *więc* $\overline{AB} = 6370 \cdot 0.4867 \simeq 3100$

---

16) Trójkąt leży na sferze o promieniu 200km. Jaka jest suma jego kątów, jeśli wiemy, że pole powierzchni jest równe 10 000km^2. Podać sumę kątów w radianach.

$\pi + \frac{10000\,km^2}{40000\,km^2} \simeq 3.39$

---

17) Rzut stereograficzny jest odwzorowaniem *(niepotrzebne skreślić):*

wiernopowierzchniowym, **WIERNOKĄTNYM,** *wiernoodległościowym*