GAL*, konspekt wykładów: Tensory

15.6.2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

[Kos roz. 6]. Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Iloczyn tensorowy

1.1 Zewnętrzna suma prosta $S = V \oplus W$ (zbiór równy produktowi kartezjańskiemu z działaniami po współrzędnych) może być zdefiniowana przez diagram (przypomnienie)

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "i_V"'] \arrow[dr, "\forall\,\phi_V"] & \\
S \arrow[rr, dotted, "\exists!\,\phi"] & & U \\
& W \arrow[ul, "i_W"] \arrow[ur, "\forall\,\phi_W"'] &
\end{tikzcd}$$

1.2 [Kos roz.6 §5 Tw.3] Dla przestrzeni liniowych V i W rozważamy wszystkie odwzorowania 2-liniowe $\phi : V \times W \to U$. Istnieje przestrzeń $\mathbb{T}$ wraz z odwzotowaniem 2-liniowym $\tau : V \times W \to \mathbb{T}$ o tej własności, że każde przekształcenie ϕ faktoryzuje się jednoznacznie przez τ

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{T} \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\tilde{\phi}"] \\
V \times W \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\,\phi"'] & \\
& U
\end{tikzcd}$$

1.3 Przestrzeń V wraz z odwzorowaniem $\tau : V \times W \to \mathbb{T}$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Oznaczana przez $V \otimes W$. Ma własność: dla każdej przestrzeni wektorowej U mamy

$$L_{\text{2-liniowe}}(V \times W, U) = L(V \otimes W, U).$$

1.4 Konstrukcja efektywna $V \otimes W$ za pomocą baz w V i W. Wymiar $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

1.5 Inna konstukcja: Definiujemy (ogromną) przestrzeń o bazie $e_{v,w}$ indeksowaną parami $(v, w) \in V \times W$. Jej elementami są formalne kombinacje

$$\sum_{i=1}^{n} a_{v_i,w_i} e_{v_i,w_i}\,, \quad \text{gdzie } a_{v_i,w_i} \in K.$$

Dzielimy tę przestrzeń przez podprzestrzeń rozpiętą przez

- $a\, e_{v,w} - e_{av,w}$ dla $a \in \mathbb{K}$
- $a\, e_{v,w} - e_{v,aw}$ dla $a \in \mathbb{K}$
- $e_{v_1,w} + e_{v_2,w} - e_{v_1+v_2,w}$ dla $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$
- $e_{v,w_1} + e_{v,w_2} - e_{v,w_1+w_2}$ dla $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$

Elementami przestrzeni ilorazowej $V \otimes W$ są kombinacje liniowe

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i := \sum_{i=1}^{n} [e_{v_i,w_i}]$$

gdzie $v_i \in V$, $w_i \in W$. Wyrażenia te przekształcamy według reguł:
– $(a\,v) \otimes w = v \otimes (a\,w) = a(v \otimes w)$ dla $a \in \mathbb{K}$
– $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ oraz $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

1.6 Ćw Odwzorowanie $\tau : V \times W \to V \otimes W$ ma własność

$$\tau(v,w) = \tau(av, a^{-1}w) \quad \text{dla } a \neq 0\,,$$

$$\tau(v,0) = 0 = \tau(0,w)\,.$$

Po pozieleniu przez relację wynikające z powyższych równości relacje, przekształcenie $W \to V/\sim \otimes W$ jest różnowartościowe.

1.7 Elementy $\tau(v,w) = v \otimes w$ są nazywane tensorami prostymi. Tensory proste rozpinają $V \otimes W$.

1.8 Niech $\dim V = \dim W = 2$. Tensorów prostych w $V \otimes W$ w bazie $\alpha_1 \otimes \beta_1$, $\alpha_1 \otimes \beta_2$, $\alpha_2 \otimes \beta_1$, $\alpha_2 \otimes \beta_2$ składa się z czwórek postaci

$$(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)\,.$$

Te lelemnty leżą na kwadryce zadaniej równaniem

$$x_1x_4 - x_2x_3 = 0\,.$$

Gdy V i W mają większy wymiar, jedno równanie nie wystarzy. Udowodnić, że zbiór tensorów prostych można opisać układem równań kwadratowych.

1.9 Ćwiczenie: Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, oraz $\sum v_i \otimes w_i = 0$ to $w_1 = w_2 = \cdots = w_k$.

1.10 Macierz zamiany bazy w V przy zamianach baz w V i W jeśli
$\{\alpha'_k\}$, $\{\alpha_i = \sum_k a_i^k\, \alpha'_k\}$ bazy V,
$\{\beta'_\ell\}$, $\{\beta_j = \sum_\ell b_j^\ell\, \beta'_\ell\}$ bazy W,
to
$\alpha_i \otimes \beta_j = \sum_{k,\ell} a_i^k b_j^\ell\, \alpha'_k \otimes \beta'_\ell$,
w konwencji Einsteina
$\alpha_i \otimes \beta_j = a_i^k b_j^\ell\, \alpha'_k \otimes \beta'_\ell$.

1.11 Jeśli

$$T = \sum_{i,j} T^{i,j} \alpha_i \otimes \beta_j = \sum_{i,j} T'^{i,j} \alpha'_i \otimes \beta'_j,$$

to

$$T'^{i,j} = \sum_{k,\ell} T^{k,\ell}\, a_k^i\, b_\ell^j.$$

1.12 W dalszej części przez przekształcenie, izomorfizm, itp. *naturalny* rozumiemy niezależny od wyboru bazy. Pełne znaczenie słowa *naturalny* można wyrazić używając pojęć kategorii (patrz naturalna transformacja funktorów).

1.13 Dla przestrzeni liniowych V, W, Z mamy następujące naturalne izomorfizmy

- $\{0\} \otimes V \simeq \{0\}$,
- $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$,
- $V \otimes W \simeq W \otimes V$,
- $(V \otimes W) \otimes Z \simeq V \otimes (W \otimes Z)$,
- $(V \oplus W) \otimes Z \simeq (V \otimes Z) \oplus (V \otimes Z)$.

(W ostatnim wzorze nie ma konieczności pisania nawiasów po prawej stronie. Piszemy $V \otimes Z \oplus V \otimes Z$).

2 Tensory c.d

2.1 Dla przestrzeni liniowych W, Z zbiór przekształceń liniowych $L(W, Z)$ ma strukturę przestrzeni liniowej. Własność iloczynu tensorowego: istnieje *naturalne* przekształcenie,

$$L(V, L(W, Z)) \to L(V \otimes W, Z)\,,$$

które jest izomorfizmem. Jest ono zadane tak: dane $\alpha : V \to L(W, Z)$, definiujemy przekształcenie 2-liniowe $\beta : V \times W \to Z$, $\beta(v, w) := \alpha(v)(w)$. Teraz β zadaje $\tilde{\beta} : V \otimes W \to Z$.

2.2 Istnieje naturalne przekształcenie $V^* \otimes W \to L(V, W)$, które jest izomorfizmem, jeśli $\dim V < \infty$. Jeśli $\dim V = \infty$, to obraz składa się z endomorfizmów, których obraz jest skńczonego wymiaru.

2.3 Jeśli $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$ to $V^* \otimes W^* \simeq (V \otimes W)^*$.
Dow. przekształcenie z $V^* \otimes W^*$ wystarczy zadać na $V^* \times W^*$:

$$V^* \times W^* \to (V \otimes W)^* = L(V \otimes W, \mathbb{K}) = L_{\text{2-liniowe}}(V \times W, \mathbb{K}).$$

Wystarczy na tensorach prostych

$$f \otimes g \mapsto \Big((v, w) \mapsto f(v)g(w)\Big).$$

2.4 Operacja kompleksyfikacji przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$:

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

oznacza iloczyn tensorowy $\mathbb{C}$ (jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$) z V.

$$V_{\mathbb{C}} = \{1 \otimes v + i \otimes w \mid v, w \in V\}.$$

Takie tensory można mnożyć przez liczby zespolone.

2.5 Mamy $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \simeq V \oplus V$ dla przestrzeni rzeczywistej V.

2.6 Gdy V jest przestrzenią zespoloną, to $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}$, gdzie $\overline{V}$ jako zbiór jest równe V, ale ma zmienione mnożenie przez skalary zespolone: $z \odot v := \overline{z}v$. (Ćwiczenie.)

Klasyczne tensory typu (p, q)

2.7 Tensory typu p-kowariantne q-kontrawariantne to funkcje $p + q$-liniowe

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

czyli elementy

$$\Big(\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \times \cdots \otimes V^*}_{q}\Big)^* \simeq$$

$$\simeq \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \times \cdots \otimes V}_{q}$$

W skrócie $\mathbb{T}^q_p(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$.

2.8 Tensor typu
(1,0) – funkcjonał
(0,1) – wektor
(1,1) – endomorfizm
(2,0) – forma 2-liniowa
(2,1) – np mnożenie w algebrze
(0,0) – skalar

2.9 Dana baza $\{\alpha_k\}$ przestrzeni V. Niech $\{\alpha^k\}$ baza sprzężona przestrzeni V^*, oraz dany tensor T typu (p, q). Jego współrzednymi w bazie $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \alpha^{i_p} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \alpha_{j_q}$ są liczby

$$T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = T(\alpha_{i_1} \times \ldots \alpha_{i_p} \times \alpha^{j_1} \times \ldots \alpha^{j_q})\,.$$

2.10 Reguły transformacji:
jeśli $\alpha_i = \sum_k a^k_i\, \alpha'_k$
niech $\alpha^j = \sum_\ell b^j_\ell\, \alpha'^\ell$.
(Macierz $(b^i_k) = (a^k_i)^{-1}$, nie trzeba transponować, bo transpozycja jest zawarta w notacji.)

$$T'^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = \sum_{i',j'} b^{i'_1}_{i_1} \ldots b^{i'_p}_{i_p}\, T^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}\, a^{j_1}_{j'_1} \ldots a^{j_q}_{j'_q}.$$

2.11 Co to za tensor $T^j_i = \delta^j_i$?

2.12 Który z następujących tensorów jest tensorem prostym? a) $T^{i,j} = i + j$, b) $T^{i,j} = i\, j$

2.13 Mnożenie tensorów: S typu (p, q), T typu (p', q'), to $S \otimes T$ typu $(p + p', q + q')$.

2.14 Zwężenie tensorów (kontrakcja)
– ślad $tr : End(V) = V^* \otimes V \to \mathbb{K}$ zadany przez przekształcenie 2-liniowe $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(f, v) \mapsto f(v)$.
We współrzędnych $\sum_{i,j} T_i^j \alpha^i \otimes \alpha_j \mapsto \sum_i T_i^i \in \mathbb{K}$
– dla wybranych indeksów $r \leq q$, $s \leq p$

$$tr_s^r : \mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V)$$

$$tr_s^r(T)_{i_1,\cdots\overset{s}{\vee}\dots,i_p}^{j_1,\cdots\overset{r}{\vee}\dots j_q} = \sum_i T_{i_1,\cdots\overset{s}{i}\dots,i_p}^{j_1,\cdots\overset{r}{i}\dots j_q}.$$

2.15 Tensor metryczny to tensor typu (2,0), czyli forma 2-liniowa, która jest iloczynem skalarnym $G = \sum g_{i,j} e^i \otimes e^j$, zadaje izomorfizm $V \to V^*$, $v = \sum_i x^i e_i \mapsto \sum_{i,j} g_{i,j} x^i e^j = tr_1^1(g \otimes v)$
– ogólniej tesor metryczny pozwala opuszczać wskaźniki $\mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p+1}^{q-1}$

$$T \mapsto tr_1^r(G \otimes T)$$

– operacja podnoszenia wskaźników jest zadana przez zwężanie z tensorem typu (0,2),

$$T \mapsto tr_s^1(G^{-1} \otimes T)$$

gdzie $G^{-1} = \sum_{i,j} g^{i,j} e_i \otimes e_j$ spełnia $tr_1^1(G^{-1} \otimes G) = \sum_{i,j} \delta_i^j e^i \otimes e_j$ (macierzowo $[g^{i,j}] = [g_{i,j}]^{-1}$).

3 Algebra tensorowa

3.1 Graficzna reprezentacja tensorów:
http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_graphical_notation

3.2 Przez $\mathbb{T}(V)$ oznaczamy algebrę tensorową

$$\mathbb{T}(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbb{T}^q(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} V^{\otimes q} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$$

3.3 Własność uniwersalna: Dla dowolnej algebry A z 1 nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A) = Mor_{\text{algebry z 1}}(T(V), A)\,.$$

Algebra symetryczna

3.4 Definiujemy algebrę symetryczną $S(V)$ jako przestrzeń ilorazową $\mathbb{T}(V)/\sim$. Dzielimy przez podprzestrzeń rozpiętą przez

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_q) - (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_q).$$

3.5 Jeśli ustalić bazę V i nazwać ją $x_1, x_2, \dots, x_n$, to $S(V) \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (pierścień wielomianów). Jeśli $V = W^*$, $|\mathbb{K}| = \infty$ to $S(V)$ utożsamiamy z funkcjami wielomianowymi na W.

3.6 Mamy rzutowanie $\mathbb{T}(V) \to S(V)$. Jeśli chrakterystyka ciała jes równa zero, to w $\mathbb{T}(V)$ mamy podalgebrę (też będzie oznaczaną przez $S(V)$), która rzutuje się izomorficznie na $S(V)$. Składa się ona z tensorów symetrycznych: Grupa permutacji Σ_q działa na $\mathbb{T}^q(V) = V^{\otimes q}$ permutując współrzędne. Tensor T jest symetryczny jeśli dla każdej permutacji $\sigma(T) = T$, tzn we współrzędnych $T^{i_1,i_2,\dots,i_q} = T^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\dots,i_{\sigma(q)}}$

3.7 Symetryzacja : zakładamy, że $char(\mathbb{K}) = 0$ i uśredniamy po permutacjach $\sigma \in \Sigma_q$

$$sym : V^{\otimes q} \to S^q(V), \qquad sym(T) = \tfrac{1}{q!} \sum_\sigma \sigma(T),$$

Mamy $sym \circ sym = sym$, zatem sym jest rzutowaniem na przestrzeń tensorów symetrycznych.

3.8 Niech $e_1, e_2, \dots e_n$ baza V, wtedy tensory $e_I = sym(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_q})$ dla $I = \{i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_q\}$ są bazą $S^q(V)$.

3.9 Ćwiczenie; obliczyć $\dim S^q(\mathbb{R}^n)$.

3.10 Gdy $char\, \mathbb{K} \le q$ przekształcenie

$$\{tensoy\ symetryczne\} \to S^q(V)$$

nie jest izomorfizmem, np dla $q = 2$, $char\ \mathbb{K} = 2$ element przestrzeni ilorazowej $[v \otimes w]$ nie jest obrazem tensora symetrycznego.

3.11 Własność uniwersalna: A algebra przemienna, nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A) = Mor_{\text{algebry przemienne z 1}}(S(V), A)\,.$$

Algebra zewnętrzna

3.12 Definiujemy algebrę zewnętrzną $\Lambda(V)$ jako przestrzeń ilorazową $\mathbb{T}(V)/\sim$. Dzielimy przez podprzestrzeń rozpiętą przez

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_q) + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_q).$$

3.13 Mnożenie jest przemienne z uwzględnieniem gradacji (super-przemienne): tzn dla $a \in \Lambda^i V$, $b \in \Lambda^j V$ mamy $a \wedge b = (-1)^{ij}\, b \wedge a$.

3.14 Ćw: Sformułować własność uniwersalną definiującą $\Lambda(V)$.

3.15 Załóżmy dla uproszczenia, że $char\mathbb{K} = 0$. Tak jak w przypadku algebry symetrycznej istnieje podalgebra w $\mathbb{T}(V)$ rzutująca się izomorficznie na $\Lambda(V)$.

Tensor $T \in V^{\otimes q}$ jest antysymetryczny jeśli dla każdej permutacji σ $\sigma(T) = sgn(\sigma)\, T$. We współrzędnych:

$$T^{i_1,i_2,\dots,i_q} = sgn(\sigma)\, T^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\dots,i_{\sigma(q)}}.$$

3.16 Jedynie dla $q = 2$ mamy $V^{\otimes 2} = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$.

3.17 Operacja antysymetryzacji

$$A : V^{\otimes q} \to \Lambda^q(V)$$
$$A(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_q} (-1)^{sgn(\sigma)} \sigma(T).$$

Mamy $A \circ A = A$.

3.18 Niech $e_1, e_2, \dots e_n$ baza V, wtedy tensory $e_I = A(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_q})$ dla $I = \{i_1 < i_2 < \dots i_q\}$ są bazą $\Lambda^q(V)$. Stąd $\dim \Lambda^q(V) = \binom{\dim V}{q}$.

3.19 Iloczyn zewnętrzny: $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_q = A(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q) \in \Lambda^q(V) \subset \mathbb{T}(V)$

Dodatek

3.20 Potęga zewnętrzna przestrzeni sprzężonej $\Lambda^p(V^*)$ to p-formy alternujące na V. Gdy $n = \dim(V)$ generatorem $\Lambda^n(V^*)$ jest wyznacznik (rozumiany jako n-liniowa forma antysymetryczna $V^n \to \mathbb{K}$).

3.21 Niezdegenerowane przekształcenie 2-liniowe $\langle\ ,\ \rangle : \Lambda^q(V^*) \times \Lambda^q(V) \to \mathbb{K}$ poprzez włożenie do $\mathbb{T}^q_q(V)$ i zwężenie wszystkich indeksów. Na bazie $\langle e^I, e_J \rangle = \frac{1}{q!}\, \delta^J_I$,

3.22 Żeby pozbyć się czynnika $\frac{1}{q!}$ dla form modyfikujemy definicję e^J tak, aby to była baza sprzężona do e_I. Traktując e^J jako tensor typu $(q, 0)$ mamy

$$(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_q})(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_q}) = \delta^J_I$$

(Jednak w literaturze zdarzają się też inne konwencje.)

4 Algebra zewnętrzna (cd) i algebry Clifforda (wykład 05.06.2014)

4.1 Własność uniwersalna: $A = A^{ev} \oplus A^{odd}$ algebra przemienna z $\mathbb{Z}_2$-gradacją, nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A^{odd}) = Mor_{\text{algebry super-przemienne}}(\Lambda V, A)\,.$$

4.2 Własność uniwersalna potęgi zewnętrznej: Dla każdego wieloliniowego przekształcenia $f : V^q \to W$, które jest antysymeteryczne istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\widetilde{f} : \Lambda^q V \to W$ takie, że $f(v_1, v_2, \ldots, v_q) = \widetilde{f}(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_q)$.

4.3 Jeśli $n = \dim V$, to $\dim \Lambda^n V = 1$, niezerowy wektor $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$.
Dla wektorów $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$, $v_j = \sum a^i_j e_i$ mamy $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \det[a^i_j]\, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$.

4.4 Współrzędne wektora $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ w bazie $\{e_I\}$ to maksymalne minory macierzy $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

4.5 Ćwiczenie: Wektory $v_1, v_2, \ldots v_k \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$.

4.6 Tw Cauchy-Bineta: jeśli $A \in M_{q\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times q}(\mathbb{K})$ to $\det(AB) = \sum_I \det(A^I)\det(B_I)$, gdzie A_I i B^I są macierzami $q \times q$ powstałymi z A i B poprzez wybór kolumn/wierszy o numerkach ze zbioru $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Algebra Clifforda

4.7 Niech ϕ będzie formą kwadratową na V. Algebrę Clifforda $Cl(Q)$ wraz z przekształceniem $\iota : V \to Cl(Q)$ definiujemy przez wąsność uniwersalnaą: Niech A będzie algebrą z $\mathbb{1}$, oraz niech $f : V \to A$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $f(v)^2 = Q(v)\mathbb{1}$. Wtedy istnieje dokładnie jedno przekształcenie algebr $\tilde{f} : Cl(Q) \to A$ takie, że $f = \tilde{f} \circ \iota$.

4.8 Konstrukcja algebry Clifforda: $Cl(Q)$ jest ilorazem algebry tensorowej

$$Cl(Q) = \mathbb{T}(V)/\langle v \otimes v - Q(v) \mid v \in V\rangle\,,$$

gdzie dla zbioru $A \subset \mathbb{T}(V)$ przez $\langle A\rangle$ rozumiemy podprzestrzeń rozpiętą przez elementy $T_1 \otimes a \otimes T_2$, $a \in A$ (tzn ideał dwustronny).

4.9 Algebry zewnętrzne są przykładem algebr Clifforda: wystarczy wziąć $Q = 0$.

4.10 Iloczyny $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_q}$ indeksowane wszystkimi ciągami rosnącymi są bazą algebry Clifforda. Stąd $\dim Cl(Q) = 2^{\dim V}$

4.11 $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ jako algebry Clifforda.

4.12 Niech $Cl(k) = Cl(\mathbb{R}^k, (-\text{forma standardowa}))$, oraz niech $A[n]$ oznacza algebrę macierzy o współczynnikach z A. Mamy
$Cl(0) = \mathbb{R}$
$Cl(1) \simeq \mathbb{C}$
$Cl(2) \simeq \mathbb{H}$

$Cl(3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

$Cl(4) \simeq \mathbb{H}[2]$

$Cl(5) \simeq \mathbb{C}[4]$

$Cl(6) \simeq \mathbb{R}[8]$

$Cl(7) \simeq \mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$

$Cl(8+k) \simeq Cl(k)[16]$ (Periodyczność Botta)