GAL z ★ 2018

31.5.2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

[Kos roz. 3], [Tor V].

1 Iloczyn skalarny, przestrzenie euklidesowe [Kos roz 3, §1]

1.1 Ortogonalizacja Grama-Schmidta w części o formach dwuliniowych.

1.2 Iloczyn skalarny $(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$

1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

2) $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, \beta) = (a_1\alpha_1, \beta) + (a_2\alpha_2, \beta)$

3) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ oraz $(\alpha, \alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$

1.3 Norma, formalne własności normy:

A) $||\alpha|| \geq 0$ oraz $||\alpha|| = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$

B) $||a\alpha|| = |a|\,||\alpha||$

C) $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$ (nierówność trójkąta).

1.4 Jeśli dany jest iloczyn skalarny, to definiujemy $||\alpha|| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$.

1.5 Są normy nie pochodzące od iloczynów skalarnych, np w $\mathbb{R}^n$

- $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ dla $1 \leq p < \infty$,
- $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_\infty = \sup_i\{|x_i|\}$.

1.6 Własność C) jest równoważna nierówności Schwartza: $|(\alpha, \beta)| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$.
Dow: Rozważyć funkcję kwadratową $t \mapsto ||\alpha + t\beta||^2 \geq 0$, dla której wyróżnik jest ≤ 0.

1.7 Ćwiczenie: Norma w przestrzeni ℓ^p, $p \neq 2$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

1.8 Definicja $\cos(\measuredangle(\alpha, \beta))$ i $|\sin(\measuredangle(\alpha, \beta))|$.

1.9 Twierdzenie kosinusów $||\alpha + \beta||^2 = ||\alpha||^2 + 2\cos\measuredangle(\alpha, \beta))||\alpha||\,||\beta|| + ||\beta||^2$.

1.10 Jeśli baza $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest ortonormalna to dla dowolnego $\beta \in V$

$$\beta = \sum_{i=1}^n (\beta, \alpha_i)\alpha_i.$$

a gdy jest bazaą ortogonalną to

$$\beta = \sum_{i=1}^n \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i.$$

1.11 Każdy układ niezerowych wektorów parami ortogonalnych można uzupełnić do bazy ortogonalnej w przestrzeni skończenie wymiarowej.

(Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe w przestrzen nieskończenie wymiarowej, patrz układy zupełne.)

1.12 Ważny przykład: $V = C(S^1)$ z iloczynem skalarnym $(f,g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, podprzestrzeń $W =$ Wielomiany trygonometryczne. Bazą ortogonalną W są funkcje 1, $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ponadto $W^\perp = \{0\}$ (patrz tw Stone'a-Weierstrassa) Otrzymujemy przykład **zupełnego układu wektorów**, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej.

1.13 Z każdą funkcją całkowalną (w sensie Lebesgue'a) stowarzyszamy szereg

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt) + c_n \sin(nt)\,,$$

gdzie $a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)Sdt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt$, $c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt$. Badaniem takich szeregów zajmuje się analiza fourierowska. Co prawda nie musi być zbieżny punktowo, ale jest zbierzny według mairy. Ponadto gdy funkcja jest klasy C^1, to mamy zbieżność jednostajną.

1.14 Ćwiczenie: dany ciąg wektorów $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym (skończony lub nie), $\beta \in V$. Załóżmy, że $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$. Następujące waranki są równoważne:

- Jeśli dla każdego $i \in I$ mamy $(\alpha_i, \beta) = 0$ to $\beta = \mathrm{lin}\{\alpha_i \;:\; i\mathbb{I}\}^\perp$.
- $inf\{||\beta,\gamma|| \;:\; \gamma \in \mathrm{lin}\{\alpha_i \;:\; i\mathbb{I}\} = 0$ (β leży w domknięciu $\mathrm{lin}\{\alpha_i \mid i \in I\}$).

1.15 W szczególności: W przestrzeniach nieskończonego wymiaru rozważamy układy zupełne $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \}$, tzn takie, że

$$\forall i \in \mathbb{N}\;\; (\beta, \alpha_i) = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 0\,.$$

(Np wektory $\varepsilon_i \in \ell^2$.)

Z (1.14) wynika, że układ liniowo zupełny rozpina podprzestrzeń, która jest gęsta w V (w sensie topologicznym).

1.16 Jeśli mamy zupełny układ wektorów ortogonalnych $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \} \subset V$ to z dowolnym $\beta \in V$ stowarzyszamy szereg

$$\beta \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i\,.$$

Problem zbieżności takich szeregów daleko wykracza poza zakres naszego wykładu.

1.17 Ćwiczenie: Inne przykłady ortonormalnych układów zupełnych.
a) wielomiany Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)$ ze względu na iloczyn skalarny $(f,d) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.
b) wielomian Czebyszewa T_n (Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$) ze względu na iloczyn skalarny $(f,d) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
c), d) ... wielomiany Hermite'a, wielomiany Laguerre'a ...
(to są zadania z analizy i nie będziemy ich robić).

1.18 Każdy układ niezerowych wektorów parami ortogonalnych, jest liniowo niezależny.

1.19 Wzór na rzut ortogonalny na $lin\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, dla układu wektorów ortogonalnych/ortonormalnych.

Objętość [Kos roz.4 §3.2,]

1.20 Objętość równoległościanu $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \sqrt{\det G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}$ gdzie $G_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$ (Jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są liniowozależne, to $\det G = 0$, w przeciwnym przypadku $\det G > 0$ bo to macierz iloczynu skalarnego w bazie α_i).

1.21 Dla $k = 2$ wzór na pole trójkąta $||\alpha_1|| \cdot ||\alpha_1|| \cdot |\sin(\measuredangle(\alpha_1, \alpha_2))|$.

1.22 Odległość $\alpha \in V$ od podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ definiujemy jako $\min\{||\alpha - \beta|| \mid \beta \in W\}$. Minimum jest osiągnięte jeśli $\alpha = \gamma + \beta_0$, $\gamma \in W^\perp$ bo $||\alpha - \beta||^2 = ||\gamma + \beta_0 - \beta||^2 = ||\gamma||^2 + ||\beta_0 - \beta||^2$.

1.23 Objętość spełnia
(i) $Vol(\alpha_1) = ||\alpha_1||$
(2) $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}) \cdot h$ gdzie h jest odległością α_k od $lin\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}$.

1.24 Dla $k = n$ dostajemy $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = |\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]|$. Stąd interpretacja geometryczna wyznacznika.

Iloczyn wektorowy

1.25 Iloczyn wektorowy: Dane $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in V$, $\dim(V) = n$. Definiujemy funkcjonał

$$\beta \mapsto \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta].$$

Ponieważ $V \simeq V^*$ za pomocą iloczynu skalarnego, więc istnieje $\gamma \in V$ taki, że dla każdego β

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta] = (\gamma, \beta).$$

Definiujemy $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_{n-1} := \gamma$.

1.26 Własności
(i) $\gamma \perp lin\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$
(ii) $|\gamma| = Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$
(iii) jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ są liniowo niezależne, to baza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma$ jest dodatniozorientowana.
Te własności definiują γ.

1.27 Dla $n = 3$ mamy dobrze znany iloczyn zadany wzorem ze szkoły:

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

1.28 Z definicji w $\mathbb{R}^3$ mamy

$$(\alpha \times \beta, \gamma) = (\gamma \times \alpha, \beta) = (\beta \times \gamma, \alpha) = \det[\alpha, \beta, \gamma].$$

1.29 $||a \times b||^2 + (a, b)^2 = ||a||^2||b||^2$.

1.30 Ćw: definiujemy działanie w $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

$$(a, \alpha) \odot (b, \beta) := (ab - \langle a, b \rangle\ ,\ a\beta + b\alpha + \alpha \times \beta).$$

Wykazać, że to działanie jest łączne.

2 Przekształcenia zachowujące iloczyn skalarne, izometrie

2.1 Metryka w zbiorze X, czyli odległość pomiędzy punktami: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$d(x, y) = 0 \iff x = y$

$d(x, y) = d(y, x)$

$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

2.2 Pojęcie izometrii i izometrycznego włożenia.

2.3 Przykład: Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową, a $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,k}$ jej bazą ortonormalną. Symetria względem W wzdłuż $W^\perp$ jest zadana wzorem

$$S_W(\beta) = \beta - 2\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i, \beta)\alpha_i\,.$$

2.4 Izometie. Niech $\dim E < \infty$. Poniższe warunki są równoważne:

1) $f : E \to E$ jest przekształceniem afinicznym, takim że $Df : TE \to TE$ zachowuje iloczyn skalarny.

2) $f : E \to E$ jest przekształceniem afinicznym zachowującym odległość,

3) f zachowuje odległość tzn $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ (nie zakładamy afiniczności),

Dow 3)$\Longrightarrow$ 1): z lematu: $d(p, r) + d(r, q) = d(p, q)$ wtedy i tylko wtedy gdy $r = \frac{d(p,r)}{d(p,q)}p + \frac{d(r,q)}{d(p,q)}q$.

2.5 Ogólniej rozważa się izometryczne włożenia $f : F \to E$.

2.6 Przykłady. Przekształcenia liniowe: obroty, symetrie. Przekształcenia afiniczne – przesunięcia złożone z liniowymi izometriami.

2.7 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\dim V < \infty$. Dla każdej izometrii liniowej $f : V \to V$ istnieje rozkład V na ortogonalną sumę prostą

$$V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_k\,,$$

oraz

- albo $\dim(V_i) = 2$ i $f_{|V_i}$ jest obrotem,
- albo $\dim(V_i) = 1$ i $f_{|V_i}$ jest symetrią lub identycznoącią.

2.8 Niech E będzie przestrzenią afiniczną, $\dim E < \infty$. Dla każdej izometrii (afinicznej) $f : E \to E$ istnieje rozkład E na produkt przestrzeni

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k\,,$$

$\dim(E_i) = 1$ lub 2 taki, że rozkład przestrzeni stycznych jest ortogonalny

$$TE = TE_1 \overset{\perp}{\oplus} TE_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} TE_k$$

oraz f jest produktem przekształceń $f_i : E_i \to E_i$, tzn

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_k(x_k))\,,$$

gdzie f_i jest przesunięciem, symetrią lub obrotem.

Dowód jest celem dalszej części wykładu. Zamiast twierdzenia dla przestrzeni rzeczywistej dowiedziemy diagonalizowalności izometrii liniwej w przestrzeni zespolonej i wywnioskujemy przypadek rzeczywisty.

2.9 Wniosek: Klasyfikacja izometrii $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Przestrzenie unitarne [Kos roz 3, §2]

2.10 Iloczyn hermitowski to jest przekształcenie $\phi(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$ półtoraliniowe, hermitowsko symetryczne, dodatnio określone, tzn

1) $\phi(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \phi(\alpha_1, \beta) + \phi(\alpha_2, \beta), \quad \phi(a\alpha, \beta) = a\phi(\alpha, \beta)$

2) $\phi(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = \phi(\alpha, \beta_1) + \phi(\alpha, \beta_2) \quad \phi(\alpha, a\beta) = \overline{a}\phi(\alpha, \beta)$

3) $\phi(\alpha, \beta) = \overline{\phi(\beta, \alpha)}$ (stąd $\phi(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}$),

4) $\phi(\alpha, \alpha) \geq 0$ oraz $(\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Często jest oznaczana przez $H(v, w)$ lub $\langle\langle v, w \rangle\rangle$.

2.11 Jeśli $M = M(\varphi) = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))$ macierz formy półtoraliniowej φ w bazie standardowej, to $\varphi(X, Y) = X^T M \overline{Y}$.

2.12 Ćwiczenie: czy φ zadane przez macierz $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ jest iloczynem hermitowskim? Udowodnić kryterium Sylvestera dla form półtoraliniowych.

2.13 Standardowy iloczyn hermitowski $\langle\langle (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b}_j$.

2.14 Ortogonalizacja G-S w przestrzeni unitarnej:

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle}{\langle\langle \beta_j, \beta_j \rangle\rangle} \beta_j \ ,$$

$$\gamma_i = \frac{1}{||\beta_i||} \beta_i$$

(uwaga na kolejność $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle$).

2.15 Jeśli V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$, to przez $V_\mathbb{R}$ oznaczamy ten sam zbiór z dziaąniem dodawania i mnożenia przez skalary rzeczywiste.

2.16 W przestrzeni $V_\mathbb{R}$ mamy naturalny endomorfizm J (mnożenie przez i) spełniający $J^2 = -Id$. Taki endomorfizm pozwala zdefiniować strukturę przestrzeni zespolonej na $V_\mathbb{R}$.

2.17 Jeśli

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = \psi(v, w) - i\omega(v, w) \, .$$

gdzie

$$\psi(v, w) = re\langle\langle v, w \rangle\rangle, \qquad \omega(v, w) = -im\langle\langle v, w \rangle\rangle$$

jest iloczynem hermitowskim na V, to na $V_\mathbb{R}$ forma $\psi(v, w)$ jest iloczynem skalarnym, a $\omega(v, w)$ jest formą symplektyczną. Obie te formy są J niezmiennicze, oraz $\omega(v, w) = \psi(Jv, w)$.

Uzupełnienie

2.18 Grupa unitarna $U(n) = \{A \in GL(\mathbb{C}^n) \,|\, A \cdot \overline{A}^T = I\}$. Piszemy też $A^* = \overline{A}^T$, wtedy dla $A \in U(n)$ mamy $A^{-1} = A^*$.

2.19 W grupie $GL(\mathbb{C}^n)$ mamy $GL(\mathbb{R}^n) \cap U(n) = O(n)$.

2.20 Z ortogonalizacji G-S mamy rozkład Iwasawy KAN dla macierzy zespolonych.

$$GL(\mathbb{C}^n) = U(n) \cdot (\mathbb{R}^*_+)^n \cdot \{\text{górnotrójkątne z jedynkami na przekątnej}\}.$$

Rozkład ten jest jednoznaczny.

3 Operatory w przestrzeniach z iloczynem hermitowskim, [Kos, roz.3 §3]

Zakładamy, że $\mathbb{C}^n$, *rozważamy standardowy iloczyn hermitowski,* $M(\varphi) = I$ *oznaczany przez* $\langle\langle \cdot\,, \cdot \rangle\rangle$. *Zakładamy, że w bazie standardowej ma on postać standardową.*

3.1 $A : V \to V$ jest operatorem unitarnym, jeśli zachowuje iloczyn hermitowski, tzn $\langle\langle A(\alpha), A(\beta)\rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \beta\rangle\rangle$ dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta \in V$. Wtedy (gdy $\dim(V) < \infty$) mamy $A^* = A^{-1}$. We współrzędnych ortonormalnych: macierz operatora należy do $U(n)$.

3.2 Operator A jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią, tzn zachowuje $||\alpha|| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha\rangle}$.

3.3 Następujące warunki są równoważne.
1) $\forall \alpha, \beta \in V$ $\langle\langle A(\alpha), A(\beta)\rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \beta\rangle\rangle$ tzn. A zachowuje iloczyn hermitowski
2) $\forall \alpha \in V$ $||A(\alpha)|| = ||\alpha||$ tzn A zachowuje normę
3) Macierz operatora jest unitarna $A \in U(n)$, tzn $A^*A = I$.

3.4 Wartości własne operatora unitarnego mają moduł 1.

3.5 Przestrzenie własne są ortogonalne

3.6 Jeśli $W \subset V$ niezmiennicza, to $W^\perp$ też niezmiennicza.

3.7 Dla operatora unitarnego A istnieje baza unitarna, w której jego macierz jest diagonalna. W zapisie macierzowym: istnieje $C \in U(n)$ t.ż.

$$A = CDC^{-1}\,, \quad D = diag(e^{it_1}, e^{it_2}, \dots, e^{it_n}).$$

3.8 Dla operatora ortogonalnego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, istnieje baza ortonormalna taka, że $A = M(f)$ ma macierz blokowo-diagonalną z blokami 2×2 postaci $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ lub z blokami 1×1: (1) i (-1).
Dowód. Rozważamy przekształcenie unitarne $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zadane przez tą samą macierz A. Istnieje baza unitarna złożona z wektorów własnych. Dla wartości własnej $\mu \notin \mathbb{R}$ zakładamy, że jeśli α jest wektorem bazowym, to $\overline{\alpha}$ też należy do bazy (ma on wartość własną $\overline{\mu}$). Bierzemy bazę rzeczywistej podprzestrzeni $\mathbb{R}^n \cap lin\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ złóżoną z wektorów $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \overline{\alpha})$, $\beta_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \overline{\alpha})$. Otrzymujemy bazę ortogonalną.

3.9 Ćwiczenie: Grupę izometrii zachowujących orientację w $\mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $SO(n)$. Znaleźć ciągłą bijekcję $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$.

3.10 Ćwiczenie: Izometria $\mathbb{R}^4$ dana jest przez macierz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Znaleźć blokową diagonalizację.

Izometrie afiniczne

3.11 Przypomnienie: Każde izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ można przedstawić jako złożenie

$$f = Tr_\alpha \circ Df = Df \circ Tr_\beta,$$

gdzie Tr_α oznacza przesunięcie. Ponadto $f(\gamma) = \alpha + Df(\gamma) = Df(\beta + \gamma)$, więc $\alpha = Df(\beta)$.

3.12 Dowód tw (2.8), tzn dla każdej izometrii $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$ znajdujemy rozkład na produkt $\mathbb{R}^n = \prod V_i$ (i odpowiadający mu rozkład na ortogonalną sumę prostą przestrzeni stycznych), gdzie $\dim V_i \leq 2$, oraz f zachowuje ten rozkład. W każdej V_i izometria f jest albo obrotem, albo symetrią, albo przesunięciem.

3.13 Ćwiczenie: Każda izometria przestrzeni euklidesowej jest postaci $Tr_\alpha g = gTr_\alpha$, gdzie α jest wektorem stałym dla Df, oraz przekształcenie g ma punkt stały. Powyższy rozkład jest jednoznaczny.

3.14 Ćwiczenie: Wiemy, że

$$Df = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f([0,0,0]) = [-1,-7,2].$$

Co to za przekształcenie?

1. Znaleźć wektor stały α dla Df, czyli kierunek osi obrotu.
2. Rozłożyć $(-1,-7,2) = a\alpha + \beta$, gdzie $\beta \perp \alpha$.
3. Znaleźć punkty stałe przekształcenia $Tr_\beta \circ Df$; to będzie oś obrotu.

Odpowiedź $f = Tr_{a\alpha} \circ$(obrót wokól osi znalezionej w 3.).

3.15 Klasyfikacja izometrii afinicznych $\mathbb{R}^3$ (symetrie, obroty, obroty z odbiciem, przesunięcia, ruch śrubowy, obrót z odbiciem, symetrie z poślizgiem).

4 Operatory samasprzężone, klasyfikacja kwadryk [Kos roz.4 §3]

Operatory sprzężone

4.1 Dane jest przekształcenie linowe $\varphi : V \to V$ przestrzeni z iloczynem hermitowskim/skalarnym. Mówimy, że $\psi : V \to V$ jest sprz'eżone do φ gdy dla każdej pary wektorów $\alpha, \beta \in V$ mamy

$$\langle\langle \varphi(\alpha), \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \psi(\beta) \rangle\rangle.$$

– jeśli ψ_1 i ψ_2 są sprzężone do φ, to $\psi_1 = \psi_2$.
– jeśli $\dim V < \infty$, to operator sprzężony ψ istnieje oraz gdy $M(\varphi)$ jest macierzą φ w bazie unitarnej, to

$$M(\psi) = \overline{M(\varphi)}^T =: M(\varphi)^*.$$

Oznaczenie: $\psi = \varphi^*$.

4.2 Dla operatora w przestrzeni rzeczywistej definiujemy operator sprzężony używając iloczynu skalarneg. Związek z przekształceniem sprężonym jest następujący: Jeśli $\dim V < \infty$, to iloczyn skalarny zadaje izomorfizm $\Theta : V \to V^*$. Utożsamiając te dwie przestrzenie oba pojęcia sprzężoności się pokrywają:

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{\Theta} & V^* & \\ \text{(sensie iloczynu skalarnego) } \phi^* & \downarrow & & \downarrow & \phi^* \text{ (w sensie przekształcenia przestrzeni sprzężonych)} \\ & V & \xrightarrow{\Theta} & V^* & \end{array}$$

4.3 Ćwiczenie: niech $V = C(S^1)$, $(f,g) = \int_{S^1} f(x)g(x)dx$, $\varphi(f) = f(a)\mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ jest funkcją stale równą 1 oraz $a \in S^1$. Wykazać, że φ nie dopuszcza żadnego operatora sprzężonego do niego.

4.4 Ćwiczenie: w powyższej przestrzeni niech $\frac{d}{dx}$ będzie operatorem różniczkowania. Speawdzić, że $\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}$

Operatory samosprzężone

4.5 Operator φ jest samosprzężony (hermitowski), jeśli $\varphi = \varphi^*$. We współrzędnych ortonormalnych: macierz operatora jest symetryczna (ze sprzężeniem).

4.6 Wartości własne są rzeczywiste

4.7 Przestrzenie własne są ortogonalne

4.8 Jeśli W jest podprzestrzenią φ-niezmenniczą, to $W^\perp$ też.

4.9 Twierdzenie spektralne. Jeśli φ jest operatorem samosprzężonym w przestrzeni skończonego wymiaru, to istnieje baza unitarna, w której operator ma macierz diagonalną, o wyrazach rzeczywistych. Rozkład

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\varphi)} V_\lambda\,,$$

jest ortogonalny.

4.10 Gdy przestrzeń jest rzeczywista, to istnieje baza ortonormalna, w której operator jest diagonalny.

4.11 Ćwiczenie: złożenie operatorów samosprężonych jest smosprzężone wtedy i tylko wtedy gdy są one przemienne.

4.12 Każda rzeczywista macierz symetryczna φ da się zapisać jako CDC^{-1}, gdzie $C \in O(n)$, tzn $C^{-1} = C^T$, a D jest diagonalna.
(Zatem zarówno $A\varphi$ jest podobne jak i kongruentne do diagonalnej.)

4.13 To samo dla zespolonych: Jeśli $\varphi = \varphi^*$, to CDC^{-1}, gdzie $C \in U(n)$.

4.14 W przestrzeni nieskończenie wymiarowej wiemy jedynie, że przestrzenie własne operatora samosprzężonego są ortogonalne.

4.15 Niech $V = C^\infty(S^1)$. Operator drugiej pochodnej $\varphi(f) = \frac{d^2}{dx^2}$ jest samosprzężony. Spektrum jest równe $\{-k^2 \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \}$. Udowodnić

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in spec(\varphi)} V_\lambda \right)^\perp = \{0\}\,.$$

4.16 Ćwiczenie: Podać przykład operatora φ, który jest samosprzężony oraz

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in Spec(\varphi)} V_\lambda \right)^\perp \neq \{0\}\,.$$

Wsk: Niech V przestrzeń funkcji na $\mathbb{Z}$ o skończonym nośniku

$$V = \{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \exists M \in \mathbb{R} \text{ takie, że } |n| > M \;\Rightarrow\; f(n) = 0 \}$$

z iloczynem hermitowskim $(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$ oraz $\varphi(f)(n) = \frac{1}{2}(f(n-1) + f(n+1))$.

4.17 Zastosowanie bazy własnej operatora $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ na okręgu do rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego: szukamy funkcji $f_t(x) = f(t, x)$ spełniającej:

$$\frac{d}{dt} f = \Delta f \qquad \text{równanie ciepła,}$$

$$f(0, x) = g(x) \in C^\infty(S^1) \qquad \text{dane warunki początkowe.}$$

Rozwiązanie: zauważamy, że operator Δ jest samosprzężony. 1) Jeśli warunek początkowy $g(x)$ jest funkcją własną operatora Δ (tzn $g(x) = const,\ c\sin(kx)$, lub $c\cos(kx)$) to szukamy rozwiązani postaci

$$f(t, x) = a(t) g(x).$$

Wspczynnik $a(t)$ spełnia równanie $\frac{d}{dt} a(t) = \lambda a(t)$, gdzie λ jest wartością własną g. To równanie umiemy rozwiązać: $a(t) = Ce^{\lambda t}$. Biorąc pod uwagę warunek początkowy $a(0) = 1$ dostajemy

$$f(t, x) = e^{\lambda t} g(x)\,.$$

2) Jeśli $g(x)$ jest dowolną funkcją, to rozwijamy ją w bazie funkcji własnych operatora Δ, tzn w szereg Fouriera

$$g(x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx).$$

Szukanym rozwiązaniem jest

$$f(t, x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

4.18 Podsumowanie: omówiliśmy dwa typy operatorów nad $\mathbb{C}$
– unitarne: speńiające $\phi^*\phi = Id$
– samosprężone: spełniające $\phi = \phi^*$
Operatory (przy załóżeniu, że $\dim V < \infty$) są diagonalne w pewnej bazie ortonormalnej.

Jest większa klasa operatorów obejmująca omówione powyżej klasy. To są
– operatort normalne: spełniające $\phi^*\phi = \phi\,\phi^*$.
One też się diagonalizują: ϕ^* i ϕ mają wspólny wektor własny α. Sprawdzamy, że ϕ zachowuje $\mathrm{lin}\{\alpha\}^\perp$ i konstrujemy bazę indukcyjnie.
Nad $\mathbb{R}$ jedynie operatory samosprzęźone można zdiagonalizować.

Kwadryki w przestrzeni euklidesowej

4.19 Wniosek z diagonalizacji: dla każdej macierzy symetrycznej Q istnieje macierz ortogonalna C, taka, że C^TQC jest diagonalna. Zatem dla danej formy kwadratowej $q(x)$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym. Istnieje ortonormalny układ wspólrzędnych $\{y_i(x)\}$ taki, że $q(x) = \sum a_i y_i^2$.

4.20 Kierunki osi głównych kwadryk, to kierunki własne stowarzyszonego operatora samosprzężonego.

4.21 Kanoniczne formy kwadryk. Każdą kwadrykę w przestrzeni euklidesowej można sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą izometrii:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell}\frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \qquad (k+\ell \le n)\\
&(2)\ \sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell}\frac{x_i^2}{a_i^2} = 0 \qquad (k+\ell \le n),\\
&(3)\ \sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell}\frac{x_i^2}{a_i^2} = 2x_n \qquad (k+\ell < n).
\end{aligned}$$

Liczby a_i w (1) to długości osi głównych.

4.22 Przykład: znaleźć osie główne kwadryki $6x^2 + 4xy + 9y^2 = 100$.
Kierunki osi głównych (wektory własne $\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 9\end{pmatrix}$) to $(1,2)$ i $(-2,1)$. Długości półosi: $\sqrt{10}$ i $\sqrt{20}$.

4.23 Ćwiczenie: Sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą izometrii

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - x + 4y = 5.$$

5 Operatory samosprzężone dodatniookreślone [Kos roz.3, §3.6]

5.1 Przykład do przeliczenia. Laplasjan dyskretny: $V = \mathbb{R}^n = Funkcje(\mathbb{Z}_n \to \mathbb{R})$, $\phi(f)(k) = \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k-1)) - f(k)$. Udowodnić, że ϕ jest operatorem samosprzężonym, wartości własne są ujemne, oprócz jednej, która jest równa 0.

5.2 O geometrycznym znaczeniu zbioru wartości własnych laplasjanu czytaj np w
`https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing_the_shape_of_a_drum`

5.3 Nieujemnie określone operatory samosprzężone: $(Bx, x) = (x, Bx) \geq 0$. Dla każdego operatora samosprzężonego nieujemnie określonego istnieje ,,pierwaistek", tzn operator samosprzężony, nieujemnie określony P, taki, że $P^2 = B$. Na podprzestrzeni wlasnej V_λ operator P jest równy $\sqrt{\lambda}$.

5.4 Przykład: $B = A^*A$ dla pewnego operatora A.

5.5 Ćwiczenie: Niech $V = C^\infty(S^1)$. Sprawdzić, że operator $A(f) = -f''$ jest nieujemnie określony samosprzężony. Jakie jest spektrum? (Jest on postaci B^*B.)

5.6 [Kos roz.3, §3.9] Rozkład polarny (biegunowy): każdy operator A da się zapisać jako złożenie $Q\,P$, gdzie Q należy do $O(n)$ (lub $U(n)$), P jest nieujemnie określony.
Dow: Jeśli A odwracalny $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $Q = AP^{-1}$, $QQ^* = (AP^{-1})(P^{-1}A^*) = A(A^*A)^{-1}A^* = I$
Dla nieodwracalniego A rozważamy $A_\epsilon = A + \epsilon I$. Dostajemy $A_\epsilon = Q_\epsilon P_\epsilon$. Można wybrać ciąg $\epsilon_n \to 0$, taki, że Q_{ϵ_n} jest zbieżny.

5.7 Uwaga: nazwa od rozkladu polarnego liczby zespolonej (tzn $\dim V = 1$)

5.8 Operator P jest jednoznacznie wyznaczony (równy $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$), a jeśli A jest odwracalny, to Q też jest jednoznacznie wyznaczony.

5.9 ,,*Singular value decomposition SVD*" (RozkB3ad według wartości osobliwych): Każdą macierz kwadratową można przedstawić jako B_1DB_2, gdzie B_1 i B_2 są unitarne/ortogonalne, a D jest macierzą diagonalną o rzeczywistych nieujemnych wyrazach (dodatkowo można załóryć, że ciąg wyrazów na przekątnej jest nierosnący).

SVD jest stosowany do kompresjii obrazu:

$$B_1DB_2 \simeq B_1^{(k)}D^{(k)}B_2^{(k)}$$

gdzie
– $B_1^{(k)}$ skąda się z pierwszych k kolumn B_1
– $B_2^{(k)}$ skąda się z pierwszych k wierszy B_2
– $D^{(k)}$ jest macierzą diagonalną zawirającą pierwszych k wyrazów z przekątnej D
– liczba $k/n \simeq 1/10$
Patrz np
`http://math.arizona.edu/%7Ebrio/VIGRE/ThursdayTalk.pdf`
`http://www.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/gal2017gw/Samosprzezone/svdmis.pdf`

5.10 Podsumowanie twierdzeń o macierzach kwadratowych $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (oraaz wersje rzeczywiste)
- tw Jordana
- rozklad KAN dla odwracalnych M: $M = KB$, $K \in U(n)$, B górnotrójkątna
- rozkład polarny $M = KP$, $K \in U(n)$, $P = P^*$
- diagonalizacja w bazie ortonormalnej operatorów unitarnych (blokowa nad $\mathbb{R}$),
- diagonalizacja w bazie ortonormalnej operatorów samosprzężonych - wartości własne rzeczywiste
- i antysamosprzężonych (tzn gdy $M^* = -M$, Ćwiczenie) - wartości własne urojone
- rozkład Choleskiego macierzy symetrycznych dodatnio określonych

5.11 Ćwiczenie: Dane $0 < k < n$. Niech $A \in End(\mathbb{R}^n)$ zachowuje objętość równoległościanów k-wymiarowych. Pokazać, że A jest izometrią.

6 Kwaterniony [Tor V, §5.4-6]

[też Alexei I. Kostrikin, Yu I Manin, Linear Algebra and Geometry (Algebra, Logic and Applications) - od str 169]

6.1 $SU(2) \simeq S^3$ (pierwsza kolumna jest dowolnym wektorem jednostkowym w $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, a druga postaci $(-\overline{b}, \overline{a})$

6.2 Niech

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbiór $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie macierzy:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

6.3 Przestrzeń kwaternionów ($\mathbb{H}$ od Hamiltona)

$$\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$$

oraz kwaterniony czysto urojone

$$im\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Tak jak poprzednio x^* oznacza $\overline{x}^T$. Dla kwaternionów czysto urojonych $x^* = -x$. „*" nazywamy sprzężeniem kwaternionowym.

6.4 Mamy $(xy)^* = y^* x^*$, bo to zachodzi dla bazy pochodzącej z $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

6.5 Dla $x \in \mathbb{H}$ mamy $x \cdot x^* \in \mathbb{R}_+$. Definiujemy $||x|| = \sqrt{x \cdot x^*}$. Dla $x = a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mamy $||x|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

6.6 Mamy $||xy|| = ||x||\,||y||$.

6.7 Algebra z dzieleniem nad $\mathbb{K}$, to taka algebra nad $\mathbb{K}$ z jedynką, że każdy element różny od 0 jest odwracalny.

6.8 Każdy kwaternion niezerowy jest odwracalny $x^{-1} = x^*/||x||^2$, czyli kwaterniony są algebrą z dzieleniem nad $\mathbb{R}$.

6.9 Twierdzenie Freudenthala (bez dowodu): Jedyne skończenie wymiarowe algebry z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$.

6.10 Kwaterniony o normie jeden to macierze spełniające $xx^* = 1$. Zatem to są macierze z $U(2)$. Ponadto $\det(x) = \det \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}_+$, czyli $x \in SU(2)$. Stąd $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+ \cdot SU(2) \cup \{0\}$.

6.11 Iloczyn skalarny w przestrzeni kwaternionów czysto urojonych $(x, y) := -re(xy)$.

6.12 Przyjmujemy orientacje w $im\mathbb{H}$, tak aby $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ była bazą dodatnio zorientowaną. Dla kwaternionów czysto urojonych mamy

$$x \cdot y = -(x, y) + x \times y.$$

Stąd jeśli $x, y \in im\mathbb{H}$ i $x \perp y$ to $xy = -yx$.

6.13 Dla dowolnego jednostkowego kwaternionu $x \in SU(2)$ przekształcenie $im\mathbb{H} \ni y \mapsto xyx^* \in im\mathbb{H}$ jest izometrią. Stąd otrzymujemy przekształcenie $SU(2) \to SO(3) \subset GL(im\mathbb{H})$.

6.14 Geometrycznie przekształcenie zadane przez $x = \cos(t) + \sin(t)\ell$ dla czysto urojonego kwaternionu jednostkowego ℓ jest obrotem wokół ℓ o kąt $2t$.
Dow: rachunek osobno dla $y \in lin\, \ell$ i $y \in lin\, \ell^{\perp}$.

6.15 Powyższe przekształcenie $SU(2) \to SO(3)$ jest ,,na", 2 do 1, jądrem jest $\{I, -I\}$.

6.16 Obrót wokół ustalonej osi o $t \in 2\pi$ podniesiony do $SU(2)$ nie jest identycznością. Ale obrót o 4π podniesiony do $SU(2)$ jest identycznością.

(Parz w YouTubie ,,2 pi rotation is not an identity", ,,Your palm is a spinor" itp.)

6.17 W $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (i oktonionach $\mathbb{O}$) są spełnione:
1. $a \cdot a^* = a^* \cdot a = ||a||^2 \mathbb{1}$
2. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$
3. $a + a^* \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$
4. $re(a \cdot b) = re(b \cdot a)$, gdzie re zdefiniowane jako rzut na $lin(\mathbb{1})$
5. $re(a \cdot (b \cdot c)) = re((a \cdot b) \cdot c)$ (to jest spełnione w $\mathbb{H}$, bo kwaterniony są łączne).

Powyższe własności są spełnione w tzw algebrach Hurwitza ,,composition algebra",
patrz http://en.wikipedia.org/wiki/Hurwitz's_theorem_(composition_algebras)
Są to skończeniewymiarowe algebry z jedynką, niekoniecznie łączne wyposażone w dodatnio określaoną formę kwadratową formę q, $q(a) = ||a||^2$ spełniającą $q(a \cdot b) = q(a)q(b)$. Forma kwadratowa zadaje iloczyn skalarny, sprzężenie jest zdefiniowane jako symetria względem $lin(\mathbb{1})$, część rzeczywista $re(a)$ to rzutowanie na $lin(\mathbb{1})$. Czyli wszystko jest zdefiniowane za pomocą formy kwadratowej. Ponadto
$(ab, ab) = (a, a)(b, b)$
$2(a, b)(c, d) = (ac, bd) + (ad, bc)$
Tw Hurwitza mówi, że jedyne algebry Hurwitza z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ (z dokładnością do izomorfizmu) to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

6.18 Dodatek: Związki z polami wektorowymi na sferze: jeśli w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest struktura algebry z dzieleniem, to na S^n jest n liniowo niezależnych pól:
Dow. Wybieramy iloczyn skalarny w R^{n+1}. Niech $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ będzie jedynką algebry. Dobieramy elementy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ stanowiące bazę $lin\{\mathbb{1}\}^{\perp}$. Wtedy dla każdego $g \in S^n$ elementy $g, gv_1, gv_2, \ldots, gv_n$ stanowią bazę $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech π_g będzie rzutowaniem na $lin\{g\}^{\perp}$. Wektory $v_i(g) = \pi_g(gv_i)$ dla $i =$

$1, 2, \dots n$ stanowią bazę $lin\{g\}^{\perp}$. To są pola wektorowe na S^n, ciągłe w zależności od $g \in S^n$ i liniowo niezależne.

Z tw. o zaczesywaniu sfery S^2 (nie ma ani jednego nigdzie nie znikającego pola) widzimy, że w $\mathbb{R}^3$ nie ma struktury algebry z dzieleniem.

7 Nieokreślone formy kwadratowe i ich grupy automorfizmów [Kos roz.4 §4]

7.1 Jeśli forma kwadrarowa określona przez symetryczną macierz B, to automorfizmami tej formy są przekształcenia liniowe o mocierzy A spełniającej $A^T BA = B$.

7.2 Przestrzenie z formą kwadratową typu (m, n), grupy $O(m, n)$, $SO(m, n)$, $SO(m, n)^+$

7.3 Ćwiczenie istnieje ciągła bijekcja $O(m, n) \simeq O(m) \times O(n) \times \mathbb{R}^{mn}$. (Jeśli $m \neq 0$ i $n \neq 0$, to grupa $O(m, n)$ ma 4 składowe spójne.)

7.4 Jeśli założyć, że nie możemy poruszać się prędzej niż światło, to nie możemy przekroczyć horyzontu zdarzeń będącego brzegiem obszaru $||x|| < c|t|$. Horyzont zdarzeń jest opisany równaniem kwadratowym $q(t, x) = c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Zmiany układu współrzędnych typu $x' = f(x) + a\,t$ (układ poruszający się) muszą zachowywać horyzont zdarzeń. Jeśli $a = 0$, to f ma być izometrią. Sugeruje to, że powinniśmy rozważać przekształcenia liniowe czasoprzestrzeni zachoujące formę kwadratową q. Dla uproszczenia przyjmujemy $c = 1$.

7.5 Ćwiczenie: każde przekształcenie liniowe zachowujące stożek $ct^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ jest postaci $const \cdot \phi$, gdzie $\phi \in O(1, 3)$.

Grupa $O(1, 1)$

7.6 Najpierw rozważmy przestrzeń jednowymiarową, czyli czasoprzestreń ze współrzędnymi (t, x) z forma kwadratową $t^2 - x^2$. Grupa $O(1, 1)$ składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} t & y \\ x & z \end{pmatrix}$, takich, że $t^2 - x^2 = 1$ oraz $(t, x) = \pm(z, y)$. Można przyjąc $t = \pm\cosh(\lambda) = (e^{\lambda} + e^{-\lambda})/2$, $x = \pm\sinh(\lambda) = (e^{\lambda} - e^{-\lambda})/2$.

7.7

$$SO(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \frac{a^{-1}+a}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a^{-1}+a}{2} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \qquad SO(1,1)^+ = \left\{ A = \begin{pmatrix} \frac{a^{-1}+a}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a^{-1}+a}{2} \end{pmatrix} : a > 0 \right\}$$

(Przyjmijmując $a = e^{-\lambda}$ mamy związek z postacią trygonometryczną hiperboliczną.)

7.8 Wniosek $SO(1, 1)^+ \simeq \mathbb{R}$ z działaniem dodawania.

7.9 Niech $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Prędkość definiujemy jako $v := \frac{x_0}{t_0} = \frac{a^{-1}-a}{a^{-1}+a} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$. Mamy $|v| < 1 =: c$. Stąd $a = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$, $\frac{a+a^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $\frac{a-a^{-1}}{2} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$.
(Inny punkt widzenia: Jeśli $A = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{pmatrix}$, to $v = \tanh(\lambda)$; oraz $\tanh(\alpha)$ wyznacza macierz A.)

7.10 Zatem $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$, gdzie $v = x_0/t_0$, $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jeśli $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ to współrzędne (t', x') możemy wyrazić za pomocą (x, t) oraz v:

$$t' = \frac{t + vx}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2}},$$

lub odwrotnie

$$t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

7.11 Ćwiczenie: Jeśliby $c \neq 1$, forma kwadratowa $c^2t^2 - x^2$, to

$$t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

7.12 Odległość zmienia się zgodnie ze wzorem $|x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1-v^2}}$ gdy $t_1 = t_2$

7.13 Podobnie czas $|t_1' - t_2'| = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1-v^2}}$ gdy $x_1 = x_2$

7.14 Jeśliby $c \neq 1$, to $|x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $|t_1' - t_2'| = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

7.15 Ćwiczenie: wyprowadzić wzór na składanie prędkości $v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$

Grupa Lorentza

7.16 Czasoprzestrzeń $\mathbb{R}^4$ z formą typu $(1, 3)$. Badamy grupę $SO(1, 3)^+$ to składowa identyczności $SO(3, 1)$ (te przekształcenia, które dadzą się w sposób ciągły zdeformować do Id. (Inna nazwa: właściwa grupa Lorenza.)

7.17 Niech $V \subset M(2 \times 2; \mathbb{C})$ zbiór macierzy hermitowsko symetrycznych tzn $X = X^*$,

$$X = \begin{pmatrix} t + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & t - x_1 \end{pmatrix}.$$

Forma kwadratowa: $q(A) = \det(A) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Utożysamiamy czasoprzestrzeń ze zbiorem operatorów samosprężonych w $\mathbb{C}^2$

7.18 Przestrzeń V rozpada się na podzbiory zachowywane przez $SO(1, 3)^+$
– zera formy $q(-) = \det(-)$, czyli macierze zdegenerowane. Fizycy mówią na to „stożek światła".
– $q(A) < 0$ tzn tam wartości własne X mają różne znaki
– dwie składowe $q(A) > 0$ tzn tam wartości własne X mają takie same znaki (stożek dodatni i ujemny)

7.19 Oś czasowa V to $V_t = lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, a część przestrzenna to

$$V_x = lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(to są macierze Pauliego, mnożąc przez i dostajemy bazowe kwaterniony).

7.20 Część przestrzenna jest opisana równaniem $t = \frac{1}{2} tr(X) = 0$.

7.21 Grupa $SL_2(\mathbb{C})$ działa na V przez: $A \cdot X := AXA^*$.
Dow: $tr(AXA^*) = tr(XA^*A) = tr(X)$ dla każdego X.

7.22 To działanie zgadza się z działaniem na $im\mathbb{H} = i\,V_x$

$$\begin{array}{cccc} \rho: & SU(2) & \subset & SL_2(\mathbb{C}) \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & im\mathbb{H} & \overset{\cdot i^{-1}}{\hookrightarrow} & V \end{array}$$

7.23 Twierdzenie: Mamy izomorfizm

$$L^+ := SO(1,3)^+ \simeq SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$$

pochodzące od odwzorowania

$$\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1,3)$$

$$A \mapsto \rho(A), \qquad \text{gdzie } \rho(A)(X) = AXA^*\,.$$

Przypomnijmy ponadto, że

$$SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\} \simeq GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* =: PGL_2(\mathbb{C}) \quad \text{przekształcenia rzutowe}$$

7.24 Pierwsza część twierdzenia jest równoważna z: Otrzymane odwzorowanie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1,3)^+$ jest „na”, 2 do 1, $ker = \{\pm I\}$.
1) Sprawdzamy, że jądro tego odwzorowania, to $\pm I$:
$ker = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) \;:\; \forall X \in V \quad AXA^* = X\}$, biorąc $X = I$ widzimy, że $A \in SU(2)$, i dalej korzystamy z tego jak wygl:ada odwzorowanie $SU(2) \to SO(3)$.
2) Liczymy wymiar grupy: tzn liczymy stopnie swobody. W obu grupach wychodzi 6 i korzystamy z ogólnej własności grup (grup Liego): jeśli grupy mają równy wymiar, a jądro odwzorownia jest skończone, to obraz zawiera całą składową identyczności. (Nie dowodzimy tego twierdzenia, elementarny dowód epimorficzności może być traktowane jako **Ćwiczenie**).

8 O przestrzeni Łobaczewskiego

8.1 Grupa $SL_2(\mathbb{C})$ działa na V przez: $A \cdot X := AXA^*$. Podgrupa $SU(2)$ zachowuje współrzędną czasową. Odpowiada to zamianom układu współrzednych z prędkością 0.

8.2 Jeśli A zachowuje współrzędną czasową t, to $A \in SU(2)$. (Z równości $A^*IA \in \mathbb{R}I$ wynika, że $A^*A = I$, więc $A \in SU(2)$.)

8.3 Definiujemy przestrzeń Łobaczewskiego Λ jako zbiór prostych w stożku dodatnim [Kos roz.7 §5]. Czyli $\Lambda \subset \mathbb{P}(V)$ jest zawarta w mapie afinicznej $t \neq 0$. We współrzędnych $u_i = x_i/t$ zbiór Λ jest opisany nierównością $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1$. Zatem przestrzeń Łobaczewskiego można utożsamić z kulą w $B \subset \mathbb{R}^3$.

8.4 Model hiperboliczny: Przestrzeń Łobaczewskiego utożsamiamy jednym płatem kwadryki

$$H = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) | A = A^*,\, tr(A) > 0,\, det(A) = 1\} \simeq \{(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 | t > 0, t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

8.5 Działanie $SO(1,3)^+$ na Λ jest
– przechodnie (tzn jest jedna orbita, tzn $\forall x, y \in \Lambda\ \exists g \in SO(1,3)^+\ x = g \cdot y$)
– stabilizator (=grupa izotropii, = grupa stacjonarna) każdego punktu jest izomorficzny z $SO(3)$
Dw: Pokażemy, że działając $SL_2(\mathbb{C})$ na H każdą macierz X przekształcimy na I. Macierzą z $SU(2)$ doprowadzamy X do postaci diagonalnej (twierdzenie spektralne) $diag(a, a^{-1})$. Wyrazy na przekątnej są > 0, bo $X \in H$. Teraz za pomocą $A = diag(a^{-1/2}, a^{1/2})$ doprowadzamy do I. Stabilizator liczymy dla $X = I$.

8.6 Przestrzeń styczna $T_{(t,x)}H$ jest opisana równaniem $\phi((t,x), v) = 0$, czyli

$$T_{(t,x)}\Lambda = lin\{(t,x)\}^{\perp},$$

gdzie ϕ jest formą 2-liniową stowarzyszoną z formą kwadratową $t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.
(Dowód ogólny dla zbioru opisanego równaniem kwadratowym $q(x) = 0$. Wektor v jest styczny w punkcie p (z definicji) jeśli istnieje krzywa $\gamma(s) = p + sv + \mathcal{O}(s^2)$ całkowicie zawarta w zbiorze zadanym równaniem $q = 0$. Zatem dla każdego s

$$0 = q(\gamma(s)) = \phi(p + sv + \mathcal{O}(s^2), p + sv + \mathcal{O}(s^2)) = \phi(p,p) + 2s\phi(p,v) + \mathcal{O}(s^2).$$

Stąd musi być $\phi(p, v) = 0$.)

8.7 W każdym punkcie $p \in H \subset \mathbb{R}^4$ forma kwadratowa $t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ obcięta do przestrzeni stycznej do H jest niezdegenerowaną formą ujemnie określoną. Definiujemy formę kwadratową na $T_{(t,x)}$ zmieniając znak aby mieć iloczyn skalarny.

8.8 Iloczyn skalarny w przestrzeniach stycznych pozwala liczyć długość krzywych. Odległość pomiędzy dwoma punktami definiujemy jako infimum po wszystkich krzywych łączących dane punkty. Okazuje się, że najkrótsze krzywe łączące punkty (geodezyjne) nie są odcinkami, lecz łukami okręgu prostopadłego do brzehu. W tej geometrii suma kątów trójkąta geodezyjnego jest mniejsza od π. Mamy

$$\pi - \text{suma kątów} = \text{pole trójkąta}\,.$$

Dla porównaia na sferze jednostkowej mamy

$$\text{suma kątów} - \pi = \text{pole trójkąta}\,.$$

8.9 Wprowadzamy współrzędne na H wzorem $y_i = \frac{x_i}{1+t}$, co odpowiada rzutowaniu stereograficznym $\pi : H \to B \subset \{0\} \times \mathbb{R}^3$ z punktu $(-1,0,0,0)$. Norma wektora w punkcie (t,x) różni się o czynnik $\frac{2}{1-||y||^2}$ od normy standardowej w punkcie $y = x/(1+t) \in B$:

$$||v||_{\text{hiperboliczna}} = \frac{2}{1 - ||y||^2} ||D\pi(v)||_{\text{standard}}\,, \qquad \text{dla } v \in T_{(t,x)}H\,.$$

Dow. Odwrotna zamiana współrzędnych:

$$(t,x) = \frac{1}{1 - ||y||^2}(1 + ||y||^2, 2y), .$$

Sferom o środku w 0 zawartym w B odpowaidają sfery w H położone w przestrzeniach zadanych warunkiem $t = const$. Są one rozciągnięte w skali $\frac{2}{1-||u||^2}$.

Kryzywej $\gamma(s) = (s, 0, 0)$ na B odpowiada na H krzywa postaci $\frac{1}{1-s^2}(1 + s^2, 2s, 0, 0)$. Ma on prędkość, liczoną wg. nowego iloczynu skalarnego, także równą $\frac{2}{1-||u||^2}$ (ćwiczenie z różniczkowania). Krzywa ta jest prostopadła do koncentrycznych sfer $||y|| = const$ w obu iloczynach skalarnych. Zatem obie przestrzenie styczne T_yB i $T_{(t,x)}H$ rozkładają się na prostopadłe składniki rozciągane w tym samym skalarem. Zatem funkcja $(t, x) \to y$ jest izometrią. cbdo

8.10 Uwaga: Przekształcenie

$$H \ni (t, x) \;\mapsto\; (-1, \frac{x}{1+t}) \in \mathbb{R}^4$$

jest wersją rzutu stereograficznego dobrze znanego mniejszym wymiarze dla sfery

$$\mathbb{R}^3 \supset S^2 \ni (t, x) \;\mapsto\; (-1, \frac{x}{1+t}) \in \mathbb{R}^3 .$$

Tu także odwzorowanie ze sfery na płaszczyznę jest wiernokątne (konforemne). Ćwiczenie: policzyć współczynnik rozciągnięcia.

8.11 Opisana tu została *geometria hiperboliczna.* (W dim=2 patrz *dysk Poincaré.*) Elementy grupy $SO^+(1, 3)$ działają jak izometrie.

8.12 Ćwiczenie: opisać orbity działania $SL_2(\mathbb{C})$ na całej $\mathbb{P}(V)$.