GAL z ★ 2018

Konspekt wykładów: Formy 2-liniowe [Kos roz.1 §4], [Tor VII]

19.4.2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Formy symetryczne 2-liniowe - krótki wstęp do diagonalizacji.

1.1 $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ jest formą 2-liniową, jeśli:

- $\phi(a\alpha + b\beta, \gamma) = a\phi(\alpha, \gamma) + b\phi(\beta, \gamma)$
- $\phi(\gamma, a\alpha + b\beta) = a\phi(\gamma, \alpha) + b\phi(\gamma, \beta)$

1.2 Forma 2-liniowa jest symetryczna gdy $\phi(\alpha, \beta) = \phi(\beta, \alpha)$.

W tym wykładzie rozważamy tylko formy symetryczne 2-liniowe nad ciałem charakterystyki $\neq 2$.

1.3 Gdy $V = \mathbb{K}^n$ forma symetryczna 2-liniowa zadaje formę kwadratową $q(\alpha) = \phi(\alpha, \alpha)$. Mamy

$$\phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta))\,.$$

Zatem forma kwadratowa wyznacza formę 2-liniową.

1.4 Macierz formy 2-liniowej w bazie $\mathcal{A}$

$$M(\phi)_{\mathcal{A}} = \{\phi(\alpha_i, \alpha_j)\}_{i=1\dots n,\ j=1\dots n}$$

1.5 Jeśli forma kwadratowa od n zmiennych jest postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{i,j} x_i x_j$$

to macierz formy 2-liniowej w bazie standardowej ma wyrazy

$$m_{i,i} = a_i, \qquad m_{i,j} = m_{j,i} = \tfrac{1}{2} b_{i,j}$$

1.6 Jeśli $C = M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ to

$$M(\phi)_{\mathcal{B}} = C^T \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}} \cdot C$$

1.7 Relacja kongruencji macierzy $M \sim C^T M C$.

1.8 Forma standardowego iloczynu skalarnego, forma hiperboliczna

1.9 W $\mathbb{C}^2$ forma standardowego iloczynu skalarnego jest hiperboliczna w bazie

$$\alpha_1(i, 1), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}(-i, 1).$$

1.10 Zakładamy, że $\dim V < \infty$. Forma jest niezdegenerowana gdy

$$\forall w \in V \; w \neq 0 \; \exists v \in V \; \phi(v, w) \neq 0$$

Oznacza to, że przekształcenie

$$\phi^{\#} : V \to V^*$$

$$w \mapsto \phi(-, w)$$

(tzn $\phi^{\#}(w)(v) := \phi(v, w)$) jest monomorfizmem. Zatem jest izomorfizmem, gdyż zakładamy, że $\dim V < \infty$.

1.11 Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni.

$$\dim W + \dim W^{\perp} \geq \dim V.$$

Gdy ϕ jest niezdegenerowana to mamy równość.
Dow: $W^{\perp}$ jest zdefiniowana przez układ równań zadany funkcjonałami $\phi^{\#}(\alpha_i)$, gdzie α_i jest bazą W.

1.12 Jeśli $\phi_{|W \times W}$ jest niezdegenerowana, to $V = W \oplus W^{\perp}$.

1.13 Diagonalizacja formy 2-liniowej: Istnieje baza, w której $M(\phi)$ jest diagonalna.
Dowód 1: Stowarzyszoną formę kwadratową diagonalizujemy metodą Lagrange'a.

Dowód 2: Jeśli dla wszystkich α mamy $\phi(\alpha, \alpha) = 0$, to $\phi = 0$. W przeciwnym razie bierzemy $\alpha_1 = \alpha$ taki, że $\phi(\alpha, \alpha) \neq 0$ i przyjmujemy $W := lin(\alpha)$. Rozkładamy $V = W \oplus W^{\perp}$ i postępujemy indukcyjnie.

1.14 Metoda Jacobiego: jeśli wyznaczniki kolejnych minorów macierzy M są równe $\Delta_i \neq 0$, to macierz M jest kongruenta z diagonalną $diag(\Delta_1/\Delta_0, \dots, \Delta_i/\Delta_{i-1}, \dots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$. (Przyjmujemy $\Delta_0 = 0$.)

2 Formy 2-liniowe

Przekształcenia dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$. Przykłady:
– $V \times V^* \to \mathbb{K}$,
– A algebra nad $\mathbb{K}$, mnożenie:$A \times A \to A$
  – np, $A = L(V, V)$,
  – np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$.
– składanie przekształceń $L(W_1, W_2) \times L(W_2, W_3) \to L(W_1, W_3)$,
– mnożenie funkcji spełniających różne warunki, np $C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

2.1 Ogólniej: rozważa się przekształcenia wieloliniowe $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$, np $\det : V^n \to \mathbb{K}$.

2.2 Przykład: Dane $1 < p < \infty$, niech ℓ^p oznacza zbór ciągów sumowalnych w p-tej potędzie (tzn $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$). Dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\phi((a_i), (b_j)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_j$ (zbieżność wynika z nierówności Höldera).

2.3 Indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V_2 \to V_1^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(-, w)$. W bazach: $M(\phi^{\#})_B^{A^*} = M(\phi)_{A,B}$.
Oczywiście też można zdefiniować ${}^{\#}\phi : V_1 \to V_2^*$ zadane wzorem ${}^{\#}\phi(v) = \phi(v, -)$.

2.4 Jeśli $V_1 = V_2 = V$, to $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ nazywamy formą dwuliniową.

2.5 Forma dwuliniowa $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ jest niezdegenerowana jeśli: $M(\phi)$ jest macierzą niezdegenerowaną.

2.6 Mamy następujące charakteryzacje form niezdegenerowanych:
(Definicja) $\forall w \in V\ w \neq 0\ \exists v \in V\ \phi(v, w) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\cdot, w)$ jest monomorfizmem
$\Leftrightarrow$ indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\cdot, w)$ jest izomorfizmem
$\Leftrightarrow$ macierz $M(\phi)$ niezdegenerowana.
$\Leftrightarrow$ macierz $M(\phi)^T$ niezdegenerowana.
$\Leftrightarrow$ indukowane przekształcenie ${}^{\#}\phi : V \to V^*$ zadane wzorem ${}^{\#}\phi(v) = \phi(v, \cdot)$ jest izomorfizmem
$\Leftrightarrow \forall v \in V\ w \neq 0\ \exists w \in V\ \phi(v, w) \neq 0$

2.7 Gdyby rozważać formę $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ dla $\dim V_1 \neq \dim V_2$ lub $\dim V_1 = \dim V_2 = \infty$, to powyższe równoważności nie są prawdziwe.

Dalej zakładamy $char(\mathbb{K}) \neq 2$**,** $\dim V < \infty$

2.8 Formy symetryczne i antysymetryczne: $V_1 = V_2 = V$, $V_3 = \mathbb{K}$, $\phi(v, w) = \pm\phi(w, v)$

2.9 Przykłady:
– $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum |a_n|^2 < \infty\}$
– $V = C([0, 1])$, dana funkcja $\rho(x) \in V$ (gęstość) $\phi_\rho(f, g) = \int_0^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$ – symetryczna
– V tjw, dane $x_0 \in [0, 1]$, $\phi_{\delta_{x_0}}(f, g) = f(x_0)g(x_0)$
– $V = C_0^1(\mathbb{R})$: $\phi(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$ – antysymetryczna.
– $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$

2.10 Podprzestrzenie izotropowe (W jest izotropowa jeśli $\phi_{|W} = 0$). Dla formy symetrycznej zbór wektorów izotropowych jest kwadryką.
Dla formy antysymetrycznej ($char\mathbb{K} \neq 2$) każdy wektor jest izotropowy.

2.11 Niech ϕ będzie symetryczną lub antysymetryczną formą dwuliniową. Dopełnienie podprzestrzeni W ortogonalne w obu przypadkach oznaczamy przez $W^{\perp_\phi}$ lub $W^\perp$.

2.12 Dla każdej 2-liniowej symetrycznej bądź antysymetrycznej formy mamy:
– $\{0\}^\perp = V$,
– $W \subset (W^\perp)^\perp$ i równość zachodzi np gdy $\dim V < \infty$ i ϕ jest niezdegenerowana

2.13 (Kontr)przykład: Istnieje $W \subsetneq V$, $W^\perp = \{0\}$. Np. $V = \ell^2$, W=ciągi p.w. równe 0.

2.14 Dana jest dwuliniowa forma (V, ϕ) symetryczna lub antysymetryczna, $A, B, W \subset V$
– $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
– gdy $\dim(V) < \infty$, to $\dim(V) \leq \dim(W) + \dim(W^\perp)$ (bo $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(\phi^\#(W)) \geq \dim(V) - \dim(W)$).

2.15 Dla niezdegenerowanej ($\dim(V) < \infty$) formy mamy,
– $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$
– $W = (W^\perp)^\perp$

2.16 – $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ (zawsze)
– $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$ jeśli $\dim V < \infty$ i forma jest niezdegenerowana

2.17 Ćwiczenie. Udowodnić analogiczne własności dla przekształcenia dwuliniowego. $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ używając pojęcia anihilatora: dla $A \subset V_1$ definiujemy $anh(A) = \{w \in V_2 \,|\, \forall v \in A\ \phi(v, w) = 0\}$.

2.18 Rozkład przestrzeni na sumę prostą ortogonalną $A \overset{\perp}{\oplus} B$ (oznaczaną też $V = A \dot{\perp} B$).

2.19 Każdą przestrzeń z symetryczną bądź antysymetryczną formą 2-liniową można przedstawić jako $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$, gdzie U jest całkowicie zdegenerowana (tzn $\phi_{|U} = 0$), oraz W jest niezdegenerowana. Przedstawienie to jest jednoznaczne w następującym sensie: Jeśli $V = U \overset{\perp}{\oplus} W = U' \overset{\perp}{\oplus} W'$, to $U = U'$ oraz istnieje izomorfizm $f : W \to W'$ taki, że dla $v, w \in W$ mamy $\phi(v, w) = \phi(f(v), f(w))$.
Dow: $U = V^\perp$, $W \simeq V/U$.

2.20 O relacji **kongruencji** c.d.:
– Każda macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy diagonalnej.
– Jeśli $A \sim A'$ i $B \sim B'$ to $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$
– Macierz (a) jest kongruentna do $(k^2 a)$ dla $k \neq 0$.
– Jeśli $a + b \neq 0$, to macierz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ jest kongruentna do $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & ab(a+b) \end{pmatrix}$.

2.21 Ćwiczenie (być może trudne): sklasyfikować formy dwuliniowe symetryczne $\mathbb{Q}^2$. Które macierze diagonalne 2×2 są kongruentne do macierzy jednostkowej?

(Zainteresowanym tą tematyką polecam książkę J. Milnor, D. Husemoller *Symmetric bilinear forms.*), p.87.

2.22 W poprzednim wykładzie udowodniliśmy dla formy symetrycznej, że istnieje baza V, w której $M(\phi)$ jest diagonalna.

2.23 Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to istnieje baza, w której macierz danej formy jest diagonalna z 1, –1 i 0 na przekątnej.

2.24 Twierdzenie o bezwładności: Jeśli ciało jest uporządkowane i każdy element > 0 jest kwadratem (np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), to każda macierz symetryczna jest kongruentna do diagonalnej, a na przekątnej są tylko 1, –1 i 0. Ilości „1", „0" i „–1" są jednoznacznie wyznaczone.
Dowód dla formy niezdegenerowanej: jeśli $k + l = k' + l' = n$ to albo $k + l' > n$ lub $k' + l > n$.

2.25 Równoważne sformułowanie: $(V, \phi) \simeq [1]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1]^\ell \overset{\perp}{\oplus} [0]^m$.

2.26 W Twierdzeniu o bezwładności liczby k, l, m:
– liczba k jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest dodatnio określona,
– liczba l jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest ujemnie określona,
– $m = \dim(V^{\perp})$.

2.27 Liczba $\sigma = k - l$ nazywana jest sygnaturą formy. Sygnatura oraz rząd $r(M(\phi))$ wyznaczają typ formy z dokładnością do izomorfizmu liniowego. Innymi słowy wyznaczają klasę kongruencji $M(\phi)$. (To wszystko jest prawda nad $\mathbb{R}$. Nad $\mathbb{Q}$ jest o wiele ciekawiej.)

3 Formy dodatnio określone, ortogonalizacja Grama-Schmidta, formy symplektyczne

Formy symplektyczne i diagonalizacja form symetrycznych [Kos roz.1 §4], [Tor VII]

3.1 Formy nad $\mathbb{R}$ określone dodatnio i ujemnie.

3.2 Jeśli forma jest dodatnio okrześlona, to $\det(M(\phi)) > 0$ (w dowolnej bazie. Dotyczy to też dowolnego minora głównego (tzn symetrycznie położonego).

3.3 Kryterium Sylwestera. Forma $(\mathbb{R}^n, \phi)$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy wyznaczniki kolejnych minorów głównych $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ są dodatnie. To jest proste zastosowanie metody Jacobiego.

3.4 Forma $(\mathbb{R}^n, \phi)$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy wyznaczniki kolejnych minorów głównych $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ mają naprzemienne znaki -+-+$\ldots(-1)^n$.

3.5 Ćwiczenie: wyznaczniki kolejnych minorów mają znaki jak poniżej. Jakiej postaci może być forma?
a) $+0-$, b) $++0-$, c) $+-0+$, d) $++0-$, e) $+-0-$, itp.

3.6 Ćwiczenie: Czy możemy otrzymać ciąg znaków $++0+$?

3.7 Metoda Jacobiego jeszcze raz: załóżmy, że dla macierzy $M(\phi)$ minory główne Δ_1, Δ_2,... Δ_n są różne od zera. Wtedy istnieje baza $\mathbb{K}^n$, w której ϕ ma postać diagonalną z liczbami Δ_1, Δ_2/Δ_1,... Δ_n/Δ_{n-1} na przekątnej.
Dokładniej: dana baza α_1, α_2, ... α_n. Szukamy indukcjnie bazy spełniającej
1) $\beta_1 = \alpha_1$,
2) $\beta_2 = \alpha_2 - c_{21}\beta_1$, $\phi(\beta_2, \beta_1) = 0$, tzn β_2 =rzut α_2 na $\alpha_1^{\perp} = \beta_1^{\perp}$
3) $\beta_3 = \alpha_3 - c_{31}\beta_1 - c_{32}\beta_2$, $\phi(\beta_3, \beta_1) = 0$, $\phi(\beta_3, \beta_2) = 0$, tzn β_3 =rzut α_3 na $lin(\alpha_1, \alpha_2)^{\perp} = lin(\beta_1, \beta_2)^{\perp}$
itd. Wspóćzynniki c_{ij} $(i > j)$ są równe $\phi(\alpha_i, \beta_j)/\phi(\beta_j, \beta_j)$. Z warunku $\Delta_j \neq 0$ wynika, że $\phi(\beta_j, \beta_j) \neq 0$.

3.8 Załóżmy, że ϕ jest formą symetryczną dwuliniową dodatnio określona na $\mathbb{R}$. Wtedy istnieje baza taka, że $M(\phi) = I$. Taka baza nazywa się ortonormalna.

3.9 Jeli ϕ jest standardową formą symetryczną dodtnio określoną w $\mathbb{R}^n$, (tzn $M(\phi)_{st} = I$), to baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $B^T B = I$, gdzie $B = M(Id)^{st}_{\mathcal{B}}$. Zbiór takich macierzy jest oznaczny przez $O(n)$ to jest podgrupa w $GL_n(\mathbb{R})$.

3.10 Diagonalizacja formy metodą Jacobiego w przypadku formy dodatnio określonej nazywa się ortogonalizacją Grama-Schmidta. W efekcie znajdujemy bazę ortogonalną, a później przeskalowując wektory bazę ortonormalną.

3.11 Dana baza $\mathcal{A}$. Ortogonalizacja G-S: $\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\alpha_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$, $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{(\beta_i,\beta_i)}}\beta_i$ (piszemy (α,β) zamiast $\phi(\alpha,\beta)$). Otrzymujemy procedurę

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ \text{dowolna baza} & \rightsquigarrow & \text{baza ortogonalna} & \rightsquigarrow & \text{baza ortonormalna.} \end{array}$$

gdzie $M(Id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej (bo $M(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ jest taka), $M(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ jest diagonalna, $M_{\mathcal{C}}^{st} \in O(n)$.

3.12 Przyjmując:

$$G = M_{\mathcal{A}}^{st}(I), \quad K = M_{\mathcal{C}}^{st}(I), \quad A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(I), \quad N = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(I)$$

traktujemy ortogonalizację G-S jako algorytm pozwalający przedstawić dowolną macierz odwracalną G w postaci

$$G = K \cdot A \cdot N\,,$$

gdzie $K \in O(n)$, macierz A jest diagonalna z dodatnimi wyrazami, N górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej. To się nazywa rozkładem Iwasawy (patrz np Wikipedia ,,Iwasawa decomposition" aby zobaczyć uogólnienia.)

3.13 Przykład:
$\alpha_1 = (3,4)$, $\alpha_2 = (1,1) \rightsquigarrow \beta_1 = (3,4)$, $\beta_2 = (\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}) \rightsquigarrow \gamma_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $\gamma_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.14 Ćwiczenie. Rozkład Iwasawy KAN jest jednoznaczny. Mamy bijekcję

$$O(n) \times (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \to GL(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$(K, A, N) \mapsto K \cdot A \cdot N\,.$$

(Tu $(\mathbb{R}_+)^n$ utoższamiamy ze zbiorem macierzy z wyrazami dodatnimi na przekątnej, $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ z macierzami górnotrójkątnymi z jedynkami na przekątnej.) Na przykład

$$GL(\mathbb{R}^2) \quad \simeq \quad O(2) \times (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}\,.$$

3.15 Ćwiczenie: Pokazać

$$SO(\mathbb{R}^3) \quad \simeq \quad \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\,.$$

gdzie $SO(n) = \{\mathbb{K} \in O(n) \mid det(K) = 1\}$.

Formy symplektyczne

3.16 Załóżmy, że ϕ jest antysymetryczna oraz niezdegenerowana, $\dim(V) < \infty$. (Mówimy, że ϕ jest symplektyczna.) Wtedy wymiar V jest parzysty oraz istnieje baza V: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ taka, że macierz formy w tej bazie jest blokowa $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Ta baza nazywa się bazą symplektyczną lub Darboux.

3.17 Wniosek z istnienia bazy symplektycznej: każda macierz antysymetryczna i niezdegenerowana jest kongruentna do macierzy $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, czyli postaci $C^T JC$.

3.18 Wniosek: wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest kwadratem. Z ćwiczeń wiemy, że istnieją formuły wielomianowe pozwalające wyciągnąć pierwiastek z wyznacznika: np

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix} = (x_{12}\,x_{34} - x_{13}\,x_{24} + x_{14}\,x_{23})^2 \,.$$

(patrz Pfaffian).

4 kwadryki afiniczne

Kwadryki [Kos roz.5 §2-4, *tam jest bardzo dokładnie*]

4.1 Zbiory algebraiczne w $\mathbb{K}^n$ to zbiory opisane układami równań wielomianowch.

4.2 Przykąd: okrąg, hiperbola, parabola w $\mathbb{R}^2$.

4.3 Kwadryki afiniczne: Każda kwadryka afiniczna w $\mathbb{R}^n$ może być przekształceniem afinicznym sprowadzona do kwadryki opisanej równaniem:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = \delta$$

$k + \ell \leq n$, $\delta = 0$ lub 1 albo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = x_{k+\ell+1}$$

$k + \ell < n$.

4.4 Afiniczne typy równoważności kwadryk w $\mathbb{R}^3$ i rzutowe typy. Zakładając, że po ujednorodnieniu otrzymujemy formę niezdegenierowaną mamy następujące typy:
- elipsoida (sfera) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, typ rzutowy $+++-$
- hiperboloida jednopowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, typ rzutowy $++--$
- hiperboloida dwupowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida eliptyczna $x^2 + y^2 = z$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida hiperboliczna $x^2 - y^2 = z$, typ rzutowy $++--$
- zbiór pusty $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, typ rzutowy $++++$

4.5 Po ujednorodnieniu zdegenerowana forma:
- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ „gruby punkt”, typ rzutowy +++0
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ stożek, typ rzutowy ++-0
- itd

4.6 kwadryki w $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

4.7 Ćwiczenie:
– Wszystkie niezdegenerowane kwadryki w $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ są równoważne.
– Podać typy równoważności niezdegenerowanych kwadryk w $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

4.8 Przkłady. Hiperbola i parabola w $\mathbb{R}^2$: ich rzutowa równoważność z okręgiem, przecięcie z prostą w ∞.

4.9 Ćwiczenie: niezdegenerowaną kwadrykę typu $++--$ w $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (tzn rzutowe domknięcie paraboloidy hiperbolicznej lub hiperboloidy jednopowłokowej) można utożsamić z torusem $S^1 \times S^1$. (Wskazówka: patrz prostokreślność, odwzorowanie Segre.)

Współczynniki wektora w bazie ortogonalnej

4.10 Przypuśćmy, że baza niezdegenerowanej formy 2-liniowej $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ jest ortogonalna. Wtedy dla każdego wektora α mamy

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(\alpha, \beta_i)}{\phi(\beta_i, \beta_i)} \beta_i$$

4.11 Krótsza suma

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\phi(\alpha, \beta_i)}{\phi(\beta_i, \beta_i)} \beta_i$$

to rzut α na $lin(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ wzdłuż $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$.

4.12 W przestrzeni nieskończenie wymiarowej często nie ma bazy ortogonalnej (tylko są układy zupełne, t.ż. $\left(lin\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}\right)^{\perp} = 0$. Ale można rozważać rzut α na $lin(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ wzdłuż $lin(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^{\perp}$.

4.13 Ważny przykład: $V = C(S^1)$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, podprzestrzeń $W =$ Wielomiany trygonometryczne. Bazą ortogonalną W są funkcje 1, $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ponadto $W^{\perp} = \{0\}$ (patrz tw Stone'a-Weierstrassa) Otrzymujemy przykład **zupełnego układu wektorów**, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej.

4.14 Z każdą funkcją całkowalną (w sensie Lebesgue'a) stowarztszamy szereg

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt) + c_n \sin(nt)\,,$$

gdzie $a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt$, $c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt$. Badaniem takich szeregów zajmuje się analiza fourierowska. Co prawda nie musi być zbieżny punktowo, ale jest zbierzny według mairy. Ponadto gdy funkcja jest klasy C^1, to mamy zbieżność jednostajną.