10 czerwiec 2018

GAL z ★, konspekt wykładów: Endomorfizmy

http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/gal2017gw/

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.
Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie ilorazowe, wektory własne

Przestrzenie ilorazowe [Kostrikin I.2.6]

1.1 Niech $W \subset V$ para podprzestrzeni. Definiujemy relację równoważności w V: $\alpha \sim \beta$ jeśli $\alpha - \beta \in W$. Zbiór klas abstrakcji ma strukturę przestrzeni liniowej. Oznaczenie V/W.

1.2 Odwzorowanie $\pi : V \to V/W$ jest liniowe, jest epimorfizmem, $ker(\pi) = W$.

1.3 **Własność uniwersalna ilorazu:** dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to Z$ takiego, że $\phi_{|W} = 0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\overline{\phi}$ takie,że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd}
 & & V/W \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Innymi słowy: wszystkie przekształcenia z V zerujące się na W jednoznacznie faktoryzują się przez V/W. Własność jednoznacznej faktoryzacji definiuje V/W z dokładnością do izomorfizmu.

1.4 Własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli odwzorowanie $p : V \to Q$ spełnia warunek: $p \circ \iota = 0$ *oraz dla każdego przekształcenia liniowego* $\phi : V \to Z$ *takiego, że* $\phi_{|W} = 0$ *istnieje dokładnie jedno przekształcenie* $\overline{\phi}$ *takie,że* $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

to $Q \simeq V/W$ oraz ten izomorfizm jest zgodny z przekształceniami $p : V \to Q$ i $\pi : V \to V/W$.

1.5 Gdy $U, W \subset V$, to

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W).$$

1.6 Niech $\phi : V \to Z$ będzie przekształceniem liniowym. Istnieje naturalne przekształcenie

$$\overline{\phi} : V/ker(\phi) \to Z$$

takie, że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$. Ponadto $\overline{\phi}$ zadaje izomorfizm $V/ker(\phi) \simeq im(\phi)$.

1.7 Wniosek: Jeśli $V = W \oplus U$ to $V/W \simeq U$.

1.8 Push-out P odwzorowań $V_1 \overset{\phi_1}{\leftarrow} W \overset{\phi_2}{\to} V_2$ definiujemy poprzez własność uniwersalną

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\phi_1"] \arrow[dd, "\phi_2"'] & & V_1 \arrow[dl, "\forall\psi_1"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \\
& Z & \\
V_2 \arrow[ur, "\forall\psi_2"] \arrow[rr, "\pi_2"'] & & P \arrow[ul, dotted, "\exists!\psi"']
\end{tikzcd}$$

Dla każdej pary przekształceń $\psi_1 : V_1 \to Z$, $\psi_2 : V_2 \to Z$ takiej, że $\psi_1\phi_1 = \psi_2\phi_2$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\psi : P \to Z$ takie, że $\psi_1 = \psi\pi_1$ i $\psi_2 = \psi\pi_2$.

1.9 Definicja push-outu ma sens w dowolnej kategorii (choć nie zawsze musi istnieć).

1.10 W kategorii przestrzeni wektorowych $P = (V_1 \times V_2)/U$, gdzie $U = \{(\phi_1(w), -\phi_2(w)) \mid w \in W\}$.

1.11 Gdy $V_2 = 0$, to $P = V_1/im(\phi_1)$.

1.12 Ćwiczenie: Niech $U \subset W \subset V$ będą przestrzeniami liniowymi. Wykazać, że

$$(V/U)/(W/U) \simeq V/W\,.$$

1.13 Ćwiczenie: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na A. Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in A\,, f(x) = 0\}$.

1.14 Jeśli V jest skończonego wymiaru, to $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$. Kowymiar definiujemy jako

$$\mathrm{codim}_V(W) = \dim(V/W).$$

Kowymiar może być skończony, nawet gdy $\dim V = \infty$

2 Endomorfizmy, wektory i przestrzenie własne

Patrz czyli [Kos roz 2] (gdzie endomorfizmy nazywane są operatorami liniowymu [Tor VI])

2.1 Endomorfizmy $End(V) = L(V, V)$. Operacja „+” oraz $\circ$ zadaje strukturę pierścienia (nieprzemiennego) z jedynką. Dodatkowo mamy mnożenie przez skalar z ciała bazowego. Taka struktura nazywa się *algebra nad ciałem* $\mathbb{K}$.

2.2 $End(V)$ nazywana jest także algebrą operatorów liniowych w przestrzeni V. Gdy $\dim V = n$ to $End(V)$ jest izomorficzna z algebrą macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

2.3 Dla endomorfizmu $\phi \in End(V)$ oraz wielomianu $f \in \mathbb{K}[x]$ definiujemny $f(\phi) \in End(V)$. Podobnie dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ definiujemy $f(A)$. Mamy $f(A)g(A) = (fg)(A) = g(A)f(A)$.

2.4 Wektory własne, wartości własne, przestrzeń własne

$$V_\lambda = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = \lambda\phi\} = ker(\phi - \lambda Id_V).$$

2.5 Zbiór wartości własnych przekształcenia ϕ nazywamy spektrum. Oznaczamy $spec(\phi)$.

2.6 Przykład $M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, wartości własne $\lambda = -1$ i $\lambda = 5$, wektory własne dla $\lambda = -1$: $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, dla $\lambda = 5$: $(1, 1, 1)$.

2.7 Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V, $A = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. Natępujące warunki są równoważne:

- λ jest wartością własną,
- macierz $A - \lambda I$ jest osobliwa.
- $\det(A - \lambda\, I) = 0$.

2.8 Metoda szukania warto?ci w?asnych i wektor? w?asnych:
1. rozwiązujemy równanie charakterystyczne $\det(M(\phi) - \lambda\, I) = 0$
2. rozwiązujemy układ liniowy jednorodny $(\phi - \lambda\, Id)(\alpha) = 0$.

2.9 Wielomian $W_\phi(\lambda) = \det(M(\phi) - \lambda\, I)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym lub równaniem charakterystycznym endomorfizmu ϕ.

2.10 Gdy $\dim(V) = 2$, to

$$W_\phi(\lambda) = \lambda^2 - 2\, tr(M(\phi)\lambda + \det(M(\phi))\,,$$

gdzie dla macierzy $A = \{a_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ ślad $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Ogólniej,

$$W_\phi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(M(\phi))\lambda^{n-1} + \ldots ??? \cdots + \det(M(\phi))\,.$$

2.11 Przykład $\phi(x, y) = (x + y, y)$, tu $\dim V_1 = 1 <$ krotność $\lambda = 1$ w $W_\phi(\lambda) = (t - 1)^2$.

2.12 Przykład $\phi(x, y) = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$, $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$,
Jako endomorfizm $\mathbb{R}^2$ nie ma wartości własnych, ale gdy rozpatrujemy jako endomorfizm $\mathbb{C}^2$, to są dwie wartości własne: $spec(\phi_{\mathbb{C}}) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

2.13 Jeśli $\phi_{\mathbb{C}} \in End(\mathbb{C}^n)$ jest rozszerzeniem do liczb zepolonych endomorfizmu $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$, oraz λ jest wartością w'lasną z wektorem α, to $\bar{\lambda}$ jest wartością własną z wektorem własnym $\bar{\alpha}$.

2.14 Przykład: wyprowadzenie wzoru na liczby Fibonacciego. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$. Jeśli przyjąć $\phi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\phi(x, y) = (y, x + y)$, to

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Zatem

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(F_0, F_1) = \phi^n(0, 1)\,.$$

Przekształcenie ϕ ma wartości własne:
$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, wektor własny $\alpha_+ = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$,
$\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, wektor własny $\alpha_- = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
Oraz $(0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+ - \alpha_-)$.
Stąd $(F_n, F_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\alpha_+ - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\alpha_-\right)$. Biorąc pierwszą współrzędną dostajemy ogólnie znany wzór na liczby Fibonacciego.

Przestrzenie nieskończenie wymiarowe:

2.15 Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia $\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(f) = f'$?
(Odp: $spec(\phi) = \mathbb{R}$, $V_\lambda = \mathrm{lin}\{e^{\lambda x}\}$.)

2.16 Przykład: Funkcje gładkie i periodyczne o okresie 2π utożsamiamy z funkcjami na okręgu $C^\infty(S^1)$. Jakie są wektory własne przekształcenia $\phi : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$, $\phi(f) = f''$?
(Odp $spec(\phi) = \{-k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $V_{-k^2} = \mathrm{lin}\{\cos(kx), \sin(kx)\}$.)

2.17 Ćwiczenie z analizy: Niech $V = C^\infty(\mathbb{R})$,
a) $\phi(f) = \big((t^2-1)f'(t)\big)'$. Sprawdzić, że wielomian Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\big((t^2-1)^n\big)$ jest wektorem własnym z wartością własną $n(n+1)$. (Symbol $\frac{d^n}{dt^n}$ oznacza operacją brania n-tej pochodnej.)
b) $\phi(f) = t\,f' - (1-t^2)f''$. Sprawdzić, że wielomian Czebyszewa T_n jest wektorem własnym z wartością własną n^2. (Wielomian Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$.)

3 Przestrzenie niezmiennicze, Tw Cayleya-Hamiltona

3.1 Wielomian charakterystyczny $W_\phi(\lambda) = \det(M(\phi - \lambda\, Id))$ nie zależy od wyboru bazy.

3.2 Jeśli wektory α_i dla $i = 1, \dots, k$ są własne dla różnych wartości własnych, to są liniowo niezależne.

3.3 Mówimy, że endomorphizm $\phi \in End(V)$ jest diagonalizowalny, jeśli w pewnej bazie V macierz ϕ jest diagonalna.

3.4 Jeśli $W_\phi(t)$ rozkłada się na różne czynniki liniowe, to isnieje baza złożona z wektorów własnych. W tej bazie $M(\phi)$ jest diagonalna.

3.5 Kryterium diagonalizowalności: ϕ jest diagoanalizowalny wtedy i tylko wtedy gdy:
1) $W_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki linowe w K
2) krotność λ w W_ϕ jest równa $\dim(V_\lambda)$

3.6 Mówimy, że podprzestrzeń $U \subset V$ jest niezmiennicza, gdy $\phi(U) \subset U$.

3.7 Przekształcenie ϕ zadaje

$$\phi_{|U} : U \to U\,, \qquad \text{i} \qquad \bar{\phi} : V/U \to V/U.$$

3.8 Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza wymiaru k, istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ przestrzeni V taka, że $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jest bazą U. Wtedy $[\alpha_{k+1}], [\alpha_{k+2}], \dots, [\alpha_n]$ jest bazą V/U. Przekształcenie ϕ w tej bazie ma macierz blokową gżnotrójkątną $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, gdzie A jest macierzą $\phi_{|U}$, a B jest macierzą $\bar{\phi}$.

3.9 Wniosek: jeśli U jest niezmiennicza, to $W_\phi = W_{\phi_{|U}} \cdot W_{\bar{\phi}}$.

3.10 Jeśli istnieje ciąg podprzestrzeni niezmienniczych

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots \subset V^n = V$$

$\dim(V_k) = k$,?to w pewnej bazie ϕ ma macierz gżnotrójkątną z wartościami własnymi na przekątnej.

3.11 Lemat: dany kwadrat przemienny

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{\phi} & V & \\ f & \downarrow & & \downarrow & f \\ & V' & \xrightarrow{\psi} & V' & \end{array}$$

czyli $f\phi = \psi f$. Jeśli $U \subset V'$ jest ψ-niezmiennicza, tp $f^{-1}(U)$ jest ϕ-niezmiennicza.

3.12 Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to istnieje conajmniej jedna wartość własna i wektor własny.

3.13 Niech ϕ będzie endomorfizmem zdefiniowanym nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli wielomian charakterystyczny ma pierwiastki w ciele $\mathbb{K}$, istnieje ciąg podprzestrzeni liniowych niezmienniczych (filtracja)

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

takich, że $\dim V^i = i$. (Zatem $M(\phi)$ jest górnotrójkątna w pewnej bazie.)

Dowód indukcyjny korzystający z następujący oczywisty lematu 3.11. Stosujemy lemat do $\psi = \bar{\phi} \in End(V/\mathrm{lin}\{\alpha\})$, $f = \pi : V \to V/\mathrm{lin}\{\alpha\}$, gdzie α jest dowolnym wektorem własnym.

Uwaga: Zwykle powyższe twierdzenie dowodzi się przy założeniu, że ciało jest algebraicznie domknięte. Aby wykazać twierdzenie jedynie przy założeniu, że W_ϕ rozkłada się. W indukcji korzystamy z tego, że również że $W_{\bar{\phi}}$ rozkłada się na czynniki linowe.

3.14 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona: $W_\phi(\phi) = 0$.
W dowodzie korzystamy z tego, że każde ciało jest zawarte w ciele algebraicznie domkniętym. Istnieje filtracja niezmiennicza V_i. W odpowiedniej bazie macierz ϕ jest górno trójkątna, z wyrazami λ_i na przekątnej. Wtedy $(\phi - \lambda_i Id)(V_i) \subset V_{i-1}$. Stąd

$$\begin{aligned} & W_\phi(\phi)(V) = \\ & \quad = (\phi - \lambda_1 Id)(\phi - \lambda_2 Id)\ldots(\phi - \lambda_n Id)(V_n) \subset (\phi - \lambda_1 Id)(\phi - \lambda_2 Id)\ldots(\phi - \lambda_{n-1} Id)(V_{n-1}) \subset \ldots \\ & \qquad \cdots \subset (\phi - \lambda_1 Id)(V_1) \subset V_0 = \{0\} \end{aligned}$$

4 Przestrzenie pierwiastkowe

4.1 Mówimy, że macierze kwadratowe A i B są podobne ($A \sim B$) jeśli istnieje macierz odwracalna C taka, że $CAC^{-1} = B$. To jest relacja równoważności.

Dla wygody jeśli dana macierz rozmiaru $n \times n$ to przekształcenia $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ zadane przez macierz A też oznaczam A. W szczególności mamy wielomian charakterystyczny $W_A(x) = det(A - xI)$.

4.2 Niezmienniki klasy równoważności podobieństwa. Jeśli $A \sim B$ to:

- $det(A) = det(B)$
- $tr(A) = tr(B)$
- wielomian charakterystyczny przekształcenia $W_A = W_B$
- spektrum $spec(A) = spec(B)$
- wymiary przestrzeni własnych $\dim(ker(A - \lambda id)) = \dim(ker(B - \lambda id))$
- $\dim(ker((A - \lambda id)^k)) = \dim(ker((B - \lambda id)^k))$

4.3 Jeśli A i B są diagonalizowalne to

$$spec(A) = spec(B) \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B$$

4.4 Później z twierdzenia Jordana (patrz niżej) łatwo wynika (przy założeniu, że ciało jest algebraicznie domknięte)

$$\Big(\forall k \in \mathbb{N}\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \dim(ker((A - \lambda id)^k)) = \dim(ker((B - \lambda id)^k)) \Big) \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B$$

4.5 Przestrzeń pierwiastkowa: $V_{(\lambda)} = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda\, Id)^n(v) = 0\}$. (Inna nazwa: uogólniona przestrzeń własna.)

4.6 Oznaczenie: zbór wartości własnych endomorfizmu ϕ nazywamy spektrum i oznaczamy $spec(\phi)$.

4.7 Lemat o wielomianach: dane wielomiany $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{K}[x]$. Istnieją wielomiany $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{K}[x]$ takie, że $\sum g_i h_i = NWD(g_1, \ldots, g_m)$. (Dowód indukcyjny ze względu na m. Dla $m = 2$ algoryrm Euklidesa.)

4.8 Dowód 4.10 z lematu o wielomianach, jak w [Kos roz II §4.3].

4.9 Załóżmy, że $\phi : V \to V$ spełnia pewną tożsamość wielomianową $f(\phi) = 0$ (gdy $\dim(V) < \infty$ to np. $f = W_\phi$). Wielomian minimalny μ_ϕ jest wielomianem o najmniejszym stopniu spełniającym $\mu_\phi(\phi) = 0$. Każdy inny wielomian mający tę własność jest podzielny przez μ_ϕ. Naogół $\mu_\phi \neq W_\phi$, choć w μ_ϕ musi wystąpić każdy czynnik liniowy z W_ϕ.

4.10 Twierdzeinie o rozkładzie na przestrzenie pierwiastkowe. Jeśli $\dim(V) < \infty$ i $W_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{K}$ (np. $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte), to

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}.$$

4.11 Rozkład $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$ można udowodnić także gdy $\dim V = \infty$ oraz ϕ spełnia tożsamość wielomianową $f(\phi) = 0$ dla pewnego wielomianu rozkładającego się na czynniki liniowe.

4.12 Udowodniliśmy, że V rozkłada się na przestrzenie pierwiaskowe. Zatem możemy przyjąć, że $\phi := \phi_{|V_{(\lambda_i)}}$ spełnia równanie $(\phi - \lambda_i id)^n = 0$. Następnie zastępując ϕ przez $\phi - \lambda_i id$ możemy założyć, że $\phi^n = 0$.

4.13 Def: $\psi \in End(V)$ jest nilpotentny jeśli $\psi^n = 0$ dla pewnego n. Jeśli przestrzeń jest skończonego wymiaru, to ten warunek jest równoważny: $V = V_{(0)}$.

Na następnym wykładzie będziemy rozkładać przestrzeń V na podprzestrzenie ,,cykliczne". Celem jest:

Twierdzenie o postaci kanonicznej Jordana Dla każdego endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym istnieje baza, w której macierz przekształcenia jest klatkowo-diagonalna

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{J_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

z klatkami postaci

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \dots 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

[Kos roz II §4.2]

5 Koniec dowodu tw Jordana i efektywne metody

5.1 Załóżmy, że ψ nilpotentny. Niech m największe, takie, że $\psi^m(\alpha) \neq 0$. Wtedy wektory

$$\psi^m(\alpha), \psi^{m-1}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha$$

są liniowo niezależne.

5.2 Def: V jest cykliczna (ze względu na ψ), jeśli istnieje wektor $\alpha \in V$, taki, że V jest rozpięta przez $\{\psi^i(\alpha) \mid i \geq 0\}$. Mówimy, że α generuje V.

5.3 Załóżmy, że ψ nilpotentny, V cykliczna, generowana przez α. Niech m największe, takie, że $\psi^m(\alpha) \neq 0$. Wtedy wektory

$$\psi^m(\alpha), \psi^{m-1}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha$$

są bazą V. Macierz ψ tej w bazie jest postaci Jordana z jedną klatką o wartości własnej $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podsumowanie: Pokazaliśmy, że V rozkłada się na przestrzenie pierwiastkowe. Na $V(\lambda)$ przekształcenie $\psi = \phi - \lambda Id$ jest nilpotentne. W następnym kroku udowodnimy,?że $V(\lambda)$ rozkłada się na sumę prostą przestrzeni cyklicznych.

5.4 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz $W \neq V$ podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje wektor własny $\beta \in V \setminus W$.
Dow: Rozpatrzeć $\bar{\psi} : V/W \to V/W$ i tam wybrać wektor własny, wziąć jego przeciwobraz w V i poprawić tak by był wektorem własnym.

5.5 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz W podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej $V = W \oplus U$.
Dow. Indukcja po $\dim(V)$: dzielimy V przez $lin(\beta)$.

5.6 Ćwiczenie: wzór na wielomian minimalny

$$\mu_\phi = \prod_{\lambda \in Spec(\phi)} (x-\lambda)^{r(\lambda)},$$

gdzie $r(\lambda)$ jest rozmiarem maksymalnej klatki Jordana z wartością własną λ.

5.7 Przykład: $M(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Jedna klatka dla wartości własnej 4 rozmiaru 1 i jedna dla wartości własnej 1 rozmiaru 3.

Efektywne znajdowanie bazy Jordana i jednoznaczności rozkładu

5.8 Szukanie bazy Jordana: dla $\lambda \in Spec(\phi)$. Rozważamy ciąg podprzestrzeni

$$V = im(\psi^0) \supset im(\psi^1) \supset im(\psi^2) \supset \dots \supset im(\psi^{r(\lambda)-1}) \supset im(\psi^p) = im(\psi^{p+1}) = im(\psi^{p+2}) = \dots$$

Wnioskujemy, że $p = r(\lambda)$ jest rozmiarem największej klatki,

$$im(\psi^p) = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V_{(\mu)}, \qquad ker(\psi^p) = V_{(\lambda)}, \qquad V = im(\psi^p) \oplus ker(\psi^p).$$

Konstruujemy ,,łańcuszki''

$$\alpha_1^{(i)} \mapsto \alpha_2^{(i)} \mapsto \dots \mapsto \alpha_{p-1}^{(i)} \mapsto \alpha_p^{(i)} \mapsto 0$$

biorąc za $\alpha_p^{(i)}$ bazę $ker(\psi) \cap im(\psi^{p-1})$. Dobieramy wektory $\alpha_{p-j}^{(i)} \in ker(\psi^j) \cap im(\psi^{p-j})$ biorąc przeciwobrazy $\alpha_{p-j+1}^{(i)}$. Jeśli na którymś etapie układ wektorów $\{\alpha_{p-j}^{(i)}\}$ nie rozpina $im(\psi^{p-j}) \cap ker(\psi^j)$ to uzupełniamy go do bazy tej przestrzeni.

5.9 Inna metoda znajdowana bazy Jordana: badamy ciąg

$$0 = ker(\psi^0) \subset ker(\psi^1) \subset ker(\psi^0) \subset \dots \subset ker(\psi^p) = ker(\psi^{p+1}).$$

Jeśli wiemy, że w postaci Jordana jest $d = d(p, \lambda)$ klatek rozmiaru p, to wybieramy d wektorów liniowo niezależnych w $\alpha_1^{(i)} \in \ker(\psi^p)$ jeśli ten wybór jest dostatecznie przypadowy, to układ wektorów $\alpha_j^{(i)} = \psi^{j-1}(\alpha_1^{(i)})$ $(i = 1, \dots d,\ j = 1, \dots p)$ będzie liniowo niezależny. Układ ten należy dopełniać indukcyjnie do układu liniowo niezależnego wybierając wektory z $ker(\psi^k)$ dla $k = p-1, p-2, \dots, 1$.

5.10 Ilość i typ klatek Jordana nie zależy od wyboru bazy Jordana. Ilość klatek k-wymiarowych z wartością własną λ jest równa $d(k,\lambda)$. Niech $\psi = \phi - \lambda Id$. Mamy

$$\sum_{\ell \geq k} d(\ell,\lambda) = \dim(\ker(\psi^k) - \dim(\ker(\psi^{k-1}).$$

Stąd

$$d(k,\lambda) = 2\dim(\ker(\psi^k) - \dim(\ker(\psi^{k-1}) - \dim(\ker(\psi^{k+1}) = r(\psi^{k+1}) + r(\psi^{k-1}) - 2r(\psi^k).$$

6 Jednoznaczność postaci Jordana

6.1 Mówimy, że endomorfizm ϕ jest półprosty, jeśli dla każdej niezmienniczej przestrzeni $U \subset V$ istnieje niezmiennicze dopełnienie $W \subset V$ do sumy prostej.

6.2 Nad ciałem algebraicnie domkniętym ϕ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest półprosty. (Ćw.)

6.3 Dla endomorfizmu diagonalizowalnego jeśli $(\phi - \lambda\, Id)^m(\alpha) = 0$ to $(\phi - \lambda\, Id)(\alpha) = 0$.

6.4 Endomorfizm diagonalizowalny ϕ ma własność: $ker(\phi) = ker(\phi^n)$ dla każdego $n \geq 1$.

6.5 Ćwiczenie: sprawdzić powyższą własność dla półprostego $\phi \in End(V)$.

6.6 (Addytywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Jeśli ϕ zapisać jako $\phi = \phi_d + \phi_n$, gdzie ϕ_d jest półprosty, a ϕ_n jest nilpotentny oraz $\phi_n\phi_d = \phi_d\phi_n$ to składniki są wyznaczone jednoznacznie.

6.7 Dowodzimy, że $ker(\phi_d - \lambda\, Id) = V_{(\lambda)}$. Z tego wynika, że ϕ_d na $V_{(\lambda)}$ musi być mnożeniem przez skalar λ.
Dow. Niech N będzie takie, że $\phi_n^N = 0$ oraz $V_{(\lambda)} = ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$.

(a) $ker(\phi_d - \lambda\, Id) \subset ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$ bo dla $\alpha \in ker(\phi_d - \lambda\, Id)$
$(\phi - \lambda\, Id)^N = ((\phi_d - \lambda\, Id) + \phi_n)^N(\alpha) = \phi_n^N(\alpha) = 0$

(b) $ker((\phi - \lambda\, Id)^N) \subset ker(\phi_d - \lambda\, Id)$.
Wystarczy pokazać, że dla $\alpha \in ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$ mamy $\alpha \in ker((\phi_d - \lambda\, Id)^{2N})$.
$(\phi_d - \lambda\, Id)^{2N}(\alpha) = \sum_{k=0}^{2N}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha) =$
$= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha) + \sum_{k=N}^{2N}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha)$
Ale $\phi_n^k = 0$ dla $k \geq N$, więc powyższa suma jest równa
$= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha) = 0.$

6.8 Z powyższego lematu wynika jednoznaczność, bo dostaliśmy, że $(\phi_d)_{|V_{(\lambda)}} = \lambda\, Id$. Korzystamy z rozkładu $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$.

6.9 Jak znaleźć ϕ_d nie szukając bazy Jordana?
Twierdzenie: istnieje wielomian $h \in \mathbb{K}[x]$ taki,że $\phi_d = h(\phi)$.

6.10 *Twierdzenie Chińskie o resztach dla wielomianów.* Niech $g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathbb{K}[x]$ będą wielomianami parami względnie pierwszymi, oraz niech $h_1, h_2, \ldots h_m \in \mathbb{K}[x]$ dowolnymi wielomianami. Wtedy istnieje $h \in \mathbb{K}[x]$ taki że dla $k = 1, 2, \ldots, m$ mamy $h \equiv h_k \bmod g_k$.

Dowód dla $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x]$. Oznaczmy przez $\mathbb{K}[x]/(f)$ zbiór reszt z dzielenia przez f. Oczywiście $\dim(\mathbb{K}[x]/(f)) = \deg f$. Niech $g = g_1 g_2 \ldots g_m$ oraz

$$\theta : \mathbb{K}[x]/(g) \to \mathbb{K}[x]/(g_1) \times \mathbb{K}[x]/(g_2) \times \cdots \times \mathbb{K}[x]/(g_m)$$

będzie zadane wzorem

$$h \mapsto (h \bmod g_1 \ , \ h \bmod g_2 \ , \ \ldots \ , \ h \bmod g_m)$$

Sprawdzamy, że θ jest monomorfizmem. Ponieważ dziedzina i przeciwdziedzina mają równe wymiary, więc θ jest epimorfizmem.

6.11 Konstrukcja H spełniającego $h(\phi) = \phi_d$: Niech $\mu_\phi = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - t)^{n_k}$ będzie wielomianem minimalnym (można też wziąć wielomian charakterystyczny). Niech $h_k = (\lambda_k - t)^{n_k}$, $h_k = \lambda_k$. Znajdujemy h z tw. chińskiego o resztach. Dla każdego k

$$h(x) = f_k(x)(\lambda_k - x)^{n_k} + \lambda_k$$

W obcięciu do $V_{(\lambda_k)}$ przekształcenie $h(\phi)$ jest mnożeniem przez λ_k. Zatem $h(phi) = \phi_d$.

6.12 Przykład: jeśli $\mu_\phi = (a - t)^2 (b - t)^2$ to $H(t) = \frac{1}{(a-b)^2}(-2t^3 + 3(a + b)t^2 - 6abt + ab(a + b))$.

6.13 Wniosek: jeśli W jest ϕ-niezmennicza, to jest ϕ_d-niezmiennicza i ϕ_n-niezmiennicza.