GAL z ★ 2018

http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2018gw/

Wersja 8.6.2018

1 Zadania kategoryjne

Definicja produktu

Kategoryjna definijcja produktu: Jeśli V wraz z przekształceniami π_1, π_2 spełnia warunek *dla dowolnej przestrzeni U oraz przekształceń ϕ_i, ϕ_j istnieje dok:ladnie jedno przekształcenie ϕ, takie, że $\phi_i = \pi_i \phi$ dla $i = 1, 2$*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
V_1 & \exists!\,\phi & V_2 \\
 & Z \arrow[ul, "\forall\phi_1"] \arrow[ur, "\forall\phi_2"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

wtedy $V \simeq V_1 \times V_2$.

Definicja (zewnętrznej) sumy prostej (koproduktu):

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dd, dotted] & \\
V_1 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr, "\forall\phi_1"'] & \exists!\,\phi & V_2 \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\forall\phi_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Dane obiekty A_i dla $i \in I$.

(Ko)produkt rodziny obiektów

- Obiekt S wraz z odwzorowaniami $\iota_i : A_i \to S$ nazywamy koproduktem rodziny $\{A_i\}_{i \in I}$ gdy dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $f_i : A_i \to C$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : S \to C$ taki, że $f_i = f\iota_i$ dla każdego $i \in I$.
- Obiekt P wraz z odwzorowaniami $\pi_i : P \to A_i$ nazywamy produktem rodziny $\{A_i\}_{i \in I}$ gdy dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $f_i : C \to A_i$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : C \to P$ taki, że $f_i = \pi_i f$ dla każdego $i \in I$.

Produkty i koprodukty skończonych rodzin są izomorficzne w kategorii przestrzeni wektorowych.

Produkty i koprodukty nieskończonych rodzin naogól nie są izomorficzne w kategorii przestrzeni wektorowych.

Obiekt początkowy P to taki obiekt w kategorii $\mathcal{C}$, że dla każdego obiektu A zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(P, A)$ jest jednoelementowy.

Obiekt końcowy K to taki obiekt w kategorii $\mathcal{C}$, że dla każdego obiektu A zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(A, K)$ jest jednoelementowy.

Jądro różnicowe (uogólnienie definicji jądra): Dane dwa przekształcenia $f, g : V \to W$. Jądro różnicowe to taki morfizm $\iota : K \to V$ spełniający $f\iota = g\iota$ oraz mający własność uniwersalną: dla każdego morfizmu $h : Z \to W$ tahiego, że $fh = gh$ istnieje dokładnie jeden morfizm $h_0 : Z \to K$ taki, że $h = \iota h_0$.

1.1. Sformułować definicję kojądra różnicowego i udowodnić, że kojądra istnieją w kategorii przestrzeni wektorowych i w kategorii zbiorów.

1.2. Powiemy, że obiekty X, Y w kategorii $\mathcal{C}$ są izomorficzne jeśli istnieją morfizmy $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow X$ takie, że $gf = id_X$ oraz $fg = id_Y$.

(a) Udowodnić, że jeśli w kategorii mamy dwa obiekty początkowe, to są one izomorficzne.

(b) Udowodnić, że jeśli w kategorii mamy dwa obiekty końcowe, to są one izomorficzne.

1.3. Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieje obiekt początkowy i pushouty, to istnieją też koprodukty.

1.4. Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją koprodukty i kojądra różnicowe, to isnieją też pushouty.

1.5. Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją produkty i pullbacki, to istnieją też jądra różnicowe.

1.6. ($\star$) Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją kojądra różnicowe i pullbacki, to istnieją też jądra różnicowe.

2 O przestrzeniach ilorazowych

2.1. Niech $W \subset V$. Wyznaczyć wszystkie warstwy W w V (tzn elementy przestrzeni ilorazowej) V/W dla $V = \mathbb{Z}_2^3$, $W = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$.

2.2. Niech P będzie przestrzenią funkcji wielomianowych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Określamy $W = \{p \in P : p(0) = p(1)\}$ oraz $V = \{p \in P : p(0) = p(1) = 0\}$. Pokazać, że $P/W \simeq \mathbb{R}$ oraz $P/V \simeq \mathbb{R}^2$.

2.3. Niech $W \subset V$. Wykazać, że wszystkie warstwy W w V są równoliczne.

2.4. Uzupełnić szczegóły dowodu stwierdzenia: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na A. Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in A\,, f(x) = 0\}$.

2.5. Niech A z powyższego zadanią będzie zbiorem 2-elementowym, $A = \{x, y\}$. Wykazać, że każda warstwa $C(\mathbb{R})$ względem podprzestrzeni $I(A)$ jest postaci

$$X_{a,b} = \{f \in C(\mathbb{R}) \ : \ f(x) = a, \ f(y) = b\}$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$

2.6. Niech V będzie przestrzenią liniową, oraz niech $W \subseteq V$ oraz $U \subseteq W$. Pokazać, że W/U utożsamiać można z podprzestrzenią przestrzeni V/U oraz wskazać izomorfizm przestrzeni $(V/U)/(W/U)$ oraz V/W.

3 Endomorfizmy

Wieloman charakterystyczny. Wektory i wartości własne.

3.1. Znaleźć wartości własne macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

3.2. Niech $v^T = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz niech $A = v \cdot v^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Znaleźć wszystkie wektory własne macierzy $A + \lambda I$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3. Zbiór macierzy kwadratowych $\{A_1, \dots, A_k\}$ nad ciałem K tworzy grupę ze względu na operację mnożenia. Niech $M = A_1 + \ldots + A_k$. Pokazać, że M ma co najwyżej dwie wartości własne.

3.4. Udowodnić, że jeżeli przekształcenie liniowe $f \colon V \longrightarrow V$ przestrzeni liniowej nad K ma $n = \dim V$ różnych wartości własnych i dla $h \colon V \longrightarrow V$ zachodzi $fh = hf$, to istnieje baza V złożona z wektorów własnych h.

3.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki 0. Pokazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest endomorfizmem i $\operatorname{tr} \phi = 0$, to istnieje baza $\mathcal{A}$, w której macierz ϕ ma wyłącznie zera na przekątnej.

3.6. Pokazać, że jeśli A jest macierzą kwadratową nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz $p \in \mathbb{F}[x]$ jest wielomianem, to jeśli γ jest wartością własną macierzy A, wówczas $p(\gamma)$ jest wartością własną macierzy $p(A)$. Czy każda wartość własna macierzy $p(A)$ jest postaci $p(\lambda)$, dla pewnej wartości własnej λ macierzy A?

3.7. Niech $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ oraz niech $n > 0$. Przypuśćmy, że pewne $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ spełniają równość $fg - gf = \alpha \cdot f$. Pokazać, że dla wszystkich $k \geq 1$ mamy $f^k g - g f^k = \alpha k \cdot f^k$. Pokazać też, że istnieje $k \geq 1$ takie, że f^k jest przekształceniem zerowym (czyli f jest nilpotentne).

3.8. Wykazać równość wielomianów charakterystycznych $W_{\phi\psi} = W_{\psi\phi}$ dla dowolnych $\phi, \psi \in End(V)$.

3.9. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, przy czym rząd $\operatorname{rank} C = r$. Pokazać, że jeżeli $A \cdot C = C \cdot B \in M_{n\times m}$, to wielomiany charakterystyczne macierzy A i B maja wspólny dzielnik stopnia r.

3.10. Niech $f : V \to V$ będzie izomorfizmem przestrzeni n–wymiarowej. Wyrazić wielomian charakterystyczny $W_{f^{-1}}$ w terminach wielomianu W_f.

Podprzestrzenie niezmiennicze

3.11. Niech $f, h \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Niech $fh = hf$ Pokazać, że jądro $\ker(f)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu h.

3.12. Pokazać, że $\ker f^k$ i $\operatorname{im} f^k$ są niezmienniczymi podprzestrzeniami dowolnego endomorfizmu $f : V \to V$.

3.13. Niech f będzie endomorfizmem $\mathbb{R}^4$, zadanym wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0)$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Czy istnieją f niezmiennicze podprzestrzenie dwuwymiarowe $W, Y \subseteq \mathbb{R}^4$, dla których $R^4 = W \oplus Y$?

3.14. Niech V będzie przestrzenią przestrzenią linową wielomianów o współczynnikach w ciele K. Niech $\phi\colon V \longrightarrow V$ będzie różniczkowaniem. Dla przekształcenia ϕ znaleźć:
a) podprzestrzenie niezmiennicze
b) wartości własne
c) wektory własne

Diagonalizowalność

3.15. Niech X będzie skończonym niepustym zbiorem, a $A \subseteq X$ ustalonym podzbiorem. Zbiór $\mathcal{P}(X) = \mathbb{Z}_2^X$ wszystkich podzbiorow jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$. Niech $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ będzie endomorfizmem $f(Y) = A \cap Y$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne. Czy endomorfizm f jest diagonalizowalny?

3.16. Znaleźć wielomian charakterystyczny i zbadać diagonalizowalność macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(Taka macierz nazywa się cykliczną.)

3.17. Niech endomorfizm $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie dany wzorem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$$

. Wykazać, że f jest diagonalizowalny i znaleźć bazę złożoną z wektorów własnych.

3.18. Udowodnić, że macierz rozmiaru $n \times n$ postaci $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1\dots n}$, gdzie

$$a_{ij} = (j - i) \mod n$$

jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$.

3.19. Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$ takim, że $\phi^n = id$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to ϕ jest przekształceniem diagonalizowalnym. Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych? Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym?

3.20. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $g\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ będą przekształceniami liniowymi, które w bazach standardowych mają macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbadać, czy istnieją bazy $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{C}^3$ odpowiednio, w których przekształcenia f i g mają macierz diagonalną.

3.21. Zbadać diagonalizowalność (nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$) macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Rozkład Jordana

(Trochę zadań rachunkowych, ☹.)

4.1. Znaleźć bazy w $\mathbb{C}^n$ w których przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ma formę Jordana (i wskazać tę formę) jeżeli w bazie standardowej $e_1, ..e_n$ przekształcenie ma macierz:

$$a)\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4.2. Niech $f\colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, które w pewnej bazie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ma macierz:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Znaleźć bazę, w której macierz ta ma formę Jordana.
b) Znaleźć wszystkie podprzestrzenie $W \subseteq V$ niezmiennicze względem f.

4.3. Macierze A i B poniżej, mają taki sam wielomian charakterystyczny. Ustalić, czy są podobne znajdując postać Jordana dla każdej z nich.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.4. Obliczyć A^{2013}, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ lub $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Wynik podać w postaci $C\,D\,C^{-1}$

4.5. Znaleźć formę Jordana macierzy nad $\mathbb{C}$:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & ... & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

4.6. Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

4.7. Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

4.8. Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz ϕ?

4.9. Korzystając z formy Jordana, pokazać, że każda macierz nad $\mathbb{C}$ jest produktem dwóch macierzy symetrycznych.

4.10. Niech $f : V \to V$ i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią cykliczną. Czy zawsze istnieje $U \subset V$ niezmiennicza, taka że $W \oplus U = V$?

4.11. Niech $f\colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$. Pokazać, że istnieją niezmiennicze podprzestrzenie W i U, takie że $f_{|_W} : W \to W$ jest przekształceniem nilpotentnym, a $f_{|_U} : U \to U$ izomorfizmem, $V = U \oplus W$. Pokazać, że przestrzenie W i U są wyznaczone jednoznacznie.

4.12. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem, którego macierz Jordana składa się z klatek odpowiadającym różnym wartościom własnym. Pokazać, że istnieje baza, w której macierz tego przekształcenia jest cykliczna, tzn jak w zad. 3.16.

4.13. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Pokazać, że każda macierz jest podobna do swojej transponowanej.

4.14. Pokazać, że jeżeli jedyną wartością własną macierzy A nad $\mathbb{C}$ jest 1, to dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ macierz A^k jest podobna do macierzy A.

4.15. Wielomian charakterystyczny macierzy A nad $\mathbb{R}$ jest równy $(\lambda - 5)^5(\lambda - 1)^2$, $\dim\ker(A - 5I) = 2$, $\dim\ker(A - 5I)^2 = 4$, $\ker(A - I) \cap im(A - I) \neq \{0\}$. Znaleźć formę Jordana. Uzasadnić starannie odpowiedź.

4.16. Rozpatrzmy endomorfizm $\phi : V \to V$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

(a) Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią ϕ – niezmienniczą i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu ϕ o parami różnych wartościach własnych. Wykazać, że jeśli zachodzi $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla $i = 1, ..., k$.

(b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa i K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to: endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny $\iff$ $(*)$ dla każdej podprzestrzeni ϕ -niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń ϕ –niezmiennicza $W' \subset V$ taka, że $V = W \oplus W'$.

4.17. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że char $\mathbb{K} = 0$ lub char $\mathbb{K} > \dim V$. Dany operator A działający na V. Pokazać, że jeśli $tr(A^k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots \dim V$, to A jest nilpotentny.

4.18. Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^2 = -Id$. Udowodnić, że wymiar V jest podzielny przez 2.

4.19. Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{Q}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^5 = Id$. Załóżmy, że 1 nie jest wartością własną. Udowodnić, że wymiar V jest podzielny przez 4.

4.20. Znaleźć wielomian minimalny macierzy A oraz podać przykład wielomianu $p \in \mathbb{K}[t]$ takiego, że $p(A)$ jest macierzą diagonalizowalną, a $A - p(A)$ jest macierzą nilpotentną, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.21. Niech V, $\dim V > 1$, będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, dla której określone jest działanie mnożenia $\bullet : V \times V \to V$, które wraz z dodawaniem wektorów spełnia aksjomaty ciała z wyjątkiem aksjomatu przemienności mnożenia. Wykazać, że $\dim V$ jest parzysty.

4.22. Niech $J_{\gamma,n} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ będzie klatką Jordana rozmiarów $n \times n$ o wartości własnej $\gamma \in \mathbb{K}$. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dane jest wzorem $f(v) = J_{\gamma,n}v$, dla $v \in \mathbb{K}^n$. Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie f-niezmiennicze w $\mathbb{K}^n$.

4.23. Niech $\phi : \mathbb{K}^8 \to \mathbb{K}^8$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wielomian minimalny oraz wyznaczyć bazę Jordana dla ϕ.

5 Przestrzenie afiniczne

5.1. Udowodnić za aksjomatów przestrzeni afinicznej, że jeśli $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ to dla dowolnych punktów $p_1, p_2, \ldots, p_n$ przestrzeni afinicznej E wektor $\sum_{i=1}^n a_i\omega(q, p_i)$ nie zależy od wyboru punktu q.

Oznaczenie: prostą przechodzącą przez punkty $p.q \in E$ oznaczamy przez $L(p, q)$.

5.2. Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a $A \subset E$ jej podzbiorem. Załóżmy, że dla dowolnej pary punktów $p, q \in A$ prosta $L(p, q) \subset A$. Czy A jest podprzestrzenią afiniczną?

5.3. Sformułować i udowodnić twierdzenie Talesa w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{K}$.

5.4. Mówimy, że $p, q, r, s \in E$ jest równoległobokiem gdy $\omega(p, q) = -\omega(r, s)$. Udowodnić, że jeśli $char(\mathbb{K}) \neq 2$, to $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$.

5.5. Twierdzenie Menelaosa. Dane sześć różnych punktów a, b, c, p, q i r w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty p, q i r leżą odpowiednio na prostych $L(b, c)$, $L(c, a)$ i $L(a, b)$:

$$p = \lambda b + (1 - \lambda)c \qquad q = \mu c + (1 - \mu)a \qquad r = \nu a + (1 - \nu)b$$

dla $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$. Udowodnić, że p, q, r są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu\nu = (\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1)$.

5.6. Dane sześć różnych punktów a, b, c, p, q i r w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty p, q i r leżą odpowiednio na prostych $L(b,c)$, $L(c,a)$ i $L(a,b)$:

$$p = \lambda b + (1-\lambda)c\,, \qquad q = \mu c + (1-\mu)a\,, \qquad r = \nu a + (1-\nu)b\,.$$

Załóżmy, że żadne dwie proste występujące w zadaniu nie są równoległe. Znaleźć warunek dla $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ na to, by proste $L(a,p)$, $L(b,q)$ i $L(c,r)$ przecinały się w jednym punkcie. Wsk: Twierdzenie Cevy.

5.7. Niech $E_1 = p + V_1$, $E_2 = q + V_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej E. Udowodnić, że:

a) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \iff \omega(p,q) \in V_1 + V_2$

b) jeśli $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ to dim $< E_1 \cup E_2 >=$ dim E_1 + dim E_2 − dim $E_1 \cap E_2$

c) jeśli $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, to dim $< E_1 \cup E_2 >=$ dim E_1 + dim E_2 − dim $V_1 \cap V_2 + 1$.

5.8. Niech E_1, E_2 będą dwiema podprzestrzeniami afinicznymi w przestrzeni afinicznej E nad ciałem K. Niech $< E_1 \cup E_2 >= E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i niech $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0, 1$ będzie ustalonym elementem. Znaleźć miejsce geometryczne elementów $\lambda x + (1-\lambda)y$, gdzie x i y przebiegają E_1 i E_2 odpowiednio. (Czy to jest podprzestrzeń afiniczna, a jeśli tak, to jak ją opisać?)

5.9. Niech $E_1 = p + V_1$, $E_2 = q + V_2$ będą dwiema skośnymi podprzestrzeniami w przestrzeni afinicznej (tzn $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$). Pokazać, że dla każdego punktu $x \notin E_1 \cup E_2$ istnieje conajwyżej jedna prosta P przechodząca przez punkt x i przecinająca E_1 i E_2. Wykazać, że prosta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in < E_1 \cup E_2 >$ ale $\omega(p,x) \notin V_1 + V_2$ i $\omega(q,x) \notin V_1 + V_2$.

5.10. Niech $p = [-1,-1,1] \in \mathbb{R}^3$ i $L = [2,3,5] + \mathrm{lin}\{(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć równanie płaszczyzny w $H \subset \mathbb{R}^3$ zawierającej punkt p i prostą L.

(b) Niech prosta L' będzie opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 17 \end{cases}.$$

Sprawdzić, że istnieje prosta $K \subset \mathbb{R}^3$ zawierająca p i przecinająca proste L oraz L' i znaleźć punkty przecięcia prostej K z prostymi L i L'.

5.11. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dany jest punkt $c = [4,5,2,7]$ oraz dwie proste:
L przechodząca przez punkty $a_1 = [1,1,1,1]$, $a_2 = [0,-1,0,1]$
K przechodząca przez punkty $b_1 = [2,2,3,1]$, $b_2 = [1,2,2,-2]$
(a) Znaleźć prostą N przechodzącą przez punkt c i przecinającą proste L i K. Znaleźć punkty przecięcia L z N i K z N.
(b) Znaleźć prostą K', taką by L i K' były skośne i by nie istniała prosta zawierająca punkt c i przecinająca L i K'.

5.12. Znaleźć bazę punktową $\mathrm{af}(L_1 \cup L_2) \subset \mathbb{K}^3$, gdzie $L_1 = \{[4,1,0] + t(2,3,-1) :\ t \in \mathbb{K}\}$, $L_2 = \{[2,-2,1] + t(1,0,1)\}$.

5.13. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć przedstawienie parametryczne oraz układ równan opisujący podprzestrzen afiniczną generowaną przez punkty:

a) $\{[-1,1,0,1], [0,0,2,0], [-3,-1,5,4], [2,2,-3,-3])\}$

b) $\{[1,1,1,-1], [0,0,6,-7], [2,3,6,-7], [3,4,1,-1]\}$
Przestrzenie te przedstawić jako przecięcia hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^4$. (Hiperpłaszczyzna = przestrzeń kowymiaru jeden.)

5.14. Dana jest przestrzeń afiniczna wymiaru n, jej baza punktowa oraz $n+1$ punktów q_i. Niech $a_{i,0}, \ldots, a_{i,n}$ będą współrzednymi barycentrycznymi punktu q_i. Wykazać, że $det(a_{i,j}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy punkty są w położeniu szczególnym.

5.15. W przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ przez i-tą mediane układu punktów $a_1, \ldots, a_n$, gdzie $n > 2$, rozumiemy prostą łączącą punkt a_i oraz punkt o współrzędnych barycentrycznych $\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{n-1}$. Pokazać, że wszystkie mediany tego układu przecinają się w jednym punkcie i wyznaczyć go.

5.16. Jeśli $TF_1 \subset TF_2$ (tzn F_1 jest słabo równolełe do F_2), oraz $F_1 \not\subset F_2$ to $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

6 Przekształcenia afiniczne

6.1. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $F(p_i) = q_i$, gdzie $p_0 = [2,1]$, $p_1 = [1,2]$, $p_2 = [1,1]$
a) $q_0 = [1,1]$, $q_1 = [1,2]$, $q_2 = [0,1]$
b) $q_0 = [4,1]$, $q_1 = [3,3]$, $q_2 = [2,1]$
c) $q_0 = [3,1]$, $q_1 = [3,2]$, $q_2 = [2,1]$.
Znaleźć punkty stałe i proste niezmiennicze przekształcenia F. (Punkt $p \in E$ jest stałym dla przekształcenia F gdy $F(p) = p$. Prosta $L \subset E$ jest niezmiennicza ze względu na przekształcenie F gdy $F(L) \subset L$.)

6.2. Czy istnieje przekształcenie afiniczne $\mathbb{R}^4$, które punkty a_i przekształca na punkty b_i odpowiednio, zaś prostą P na prostą H. Jeżeli takie przekształcenie istnieje to znaleźć jego postać analityczną i ustalić, czy jest ono wyznaczone jednoznacznie.

a)

$$\begin{aligned} a_0 &= [1,1,1,1] & b_0 &= [-1,1,-1,1] \\ a_1 &= [2,3,2,3] & b_1 &= [0,4,0,4] \\ a_2 &= [3,2,3,2] & b_2 &= [2,2,2,2] \end{aligned}$$

$P = [1,2,2,2] + t(0,1,0,1)$
$H = [-1,2,0,3] + s(1,-5,1,-5)$

b)

$$\begin{aligned} a_0 &= [2,-1,3,-2] & b_0 &= [1,-2,3,5] \\ a_1 &= [3,1,6,-1] & b_1 &= [2,1,8,7] \\ a_2 &= [5,1,4,1] & b_2 &= [3,2,10,-6] \end{aligned}$$

$P = [2,0,4,-1] + t(0,1,2,0)$
$H = [1,-1,5,-2] + s(0,2,3,-3)$

6.3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń H zadana jest równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

Niech f będzie rzutem wzdłuż $\mathrm{lin}\{(1,0,-1,1),(0,1,1,0)\}$ na H.

a) Znaleźć przeciwobraz prostej $L = [1,0,1,0] + s(1,-1,1,1)$.

b) Znaleźć układ równań opisujący obraz płaszczyzny $K = [1,0,1,0] + \mathrm{lin}\{(1,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.

6.4. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bdzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że jeśli f przeprowadza parę prostych skośnych na parę prostych równoległych, to f nie jest różnowartościowe. Podać przykład takiego przekształcenia.

6.5. Niech $K, L, M \subset \mathbb{K}^3$ będzie trójką prostych parami skośnych. Czy każdą taką trójkę można przekształcić na dowolną inną za pomocą izomorfizmu afinicznego? Jeśli nie, to orzec, które z trójek są afinicznie równoważne: $(K, L, M) \sim (K', L', M')$ gdy istnieje $\phi \in Aff(\mathbb{K}^3)$ tali, że $\phi(K) = K'$, $\phi(L) = L'$, $\phi(M) = M'$.

6.6. Niech $\phi : E \to E$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że jeżeli E jest przestrzenią skończenie wymiarową i przekształcenie ϕ ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń ϕ–niezmiennicza zawiera ten punkt stały.

6.7. Znaleźć wzór analityczny przekształcenia afinicznego $\mathbb{K}^4$ będącego rzutem na H wzdłuż W w przypadku, gdy podprzestrzeń H jest dana równaniem $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = k$, zaś $W = \mathrm{lin}\{[a,b,c,d]\}$.

6.8. Niech $\phi \colon E \longrightarrow E$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że 1 nie jest wartością własną $D\phi$. Pokazać, ϕ ma dokładnie jeden punkt stały.

7 Przestrzenie i przekształcenia rzutowe

Patrz osobny plik
http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/Przestrzenie_rzutowe-zadania.pdf .
Do zrobienia na ćwiczeniach: zadania 53.3, 53.4, 53.14, 53.16, 53.22(!!!).

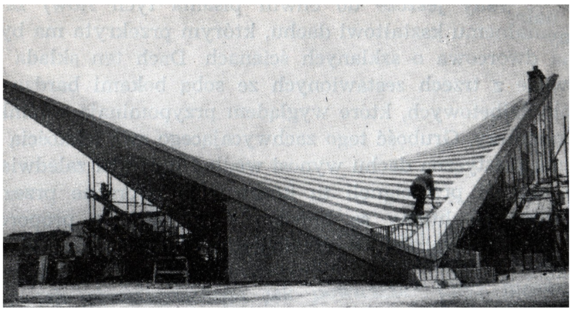
7.1. Znaleźć przekształcenie rzutowe przeksztacające kwadrykę (opisaną w przestrzeni afinicznej) równaniem $x^2 - y^2 = 2z$ na kwadrykę opisaną równaniem $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

7.2. Znaleźć przekształcenie liniowe, które rzeczywistą formę kwadratową sprowadza do postaci kanonicznej:

a) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$

b) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

7.3. Znaleźć przekształcenie wielomianowe $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ będące bijekcją na obraz, który jest opisany równaniem $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.



Uwaga: Nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $\neq 2$ każda nieosobliwa kwadryka (tzn. taka, że macierz odpowiadajacej jej formy dwuliniowej symetrycznej jest odwracalna) w $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ jest w pewnym układzie współrzędnych kwadryką zadaną równaniem $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.

7.4. Niech $f \in \mathbb{K}[x, y]$ bedzie niezerowym wielomianem jednorodnym, stopnia d. Wówczas równanie $f(x, y) = 0$ ma co najwyżej d rozwiązań w $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, a jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to dokładnie d (licząc krotności). *Uwaga. Jeśli* $[a : b]$ *jest rozwiązaniem to krotność jest największą potęgą* $(bx - ay)$ *dzielącą* f.

W zadaniach niżej $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte i $char(\mathbb{K}) \neq 2$.

7.5. Niech $f \in \mathbb{K}[x, y, z, t]$ będzie wielomianem jednorodnym stopnia 2, zaś $Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ - kwadryką opisaną równaniem $f = 0$. Niech ℓ będzie prostą w $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$. Pokazać, że $Q \cap \ell$ jest zawsze niepusty. Co więcej Q zawiera ℓ wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera trzy punkty tej prostej.

7.6. Niech ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 będą parami rozłącznymi prostymi w $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$. Istnieje wówczas nieosobliwa kwadryka $Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ zawierająca te proste.

8 Formy dwuliniowe

UWAGA: W zadaniach o formach dwuliniowych zakładamy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki różnej od 2.

8.1. Wyznaczyć macierz formy dwuliniowej na $\mathbb{R}^3$ w bazie $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$, $e_3' = 2e_1 + e_2 + e_3$ gdy dana jest macierz w bazie standardowej $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

8.2. Dana jest przestrzeń liniowa z formą symetryczną (V, ϕ) , $W \subset V$. Pokazać, że

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(V^{\perp} \cap W)\,.$$

8.3. Dane macierze:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$?

8.4. Niech A będzie symetryczną niezdegenerowaną macierzą kwadratową o wyrazach wymiernych. Udowodnić, że macierze

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$. (Powyżej macierz I oznacza macierz jednowtkową rozmiaru A.)

8.5. Dane macierze $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nad którymi z następujących ciał powyższe macierze są kongruentne: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

8.6. Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna 4×4, której znaki minorów są nastepujące?

a) $-$, $+$, 0 , $-$

b) $-$, $+$, 0 , $+$

Czy znamy sygnaturę tej macierzy?

8.7. W przestrzeni z formą symetryczną $(\mathbb{R}^4, \phi)$, gdzie ϕ w bazie standardowej jest zadane przez macierz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) znaleźć bazę prostopadłą tej przestrzeni.

b) znaleźć $W^{\perp}$, gdzie W jest podprzestrzenią zadaną przez układ równań:

$$\begin{aligned} x_2 \quad &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Czy $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp}$? Czy forma $\phi_{|W \times W}$ jest niezdegenerowana?

c) znaleźć stożek wektorów izotropowych.

Definicja *Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy całkowicie zdegenerowaną (ze względu na formę symetryczną ϕ), jeżeli $\phi_{|W \times W}$ jest formą zerową.*

Wektor v nazywa się izotropowy (ze względu na formę symetryczną ϕ) gdy $\phi(v, v) = 0$.

8.8. W przestrzeni W macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych rozpatrujemy formę dwuliniową $\phi(A, B) = tr(AB)$. Znaleźć największy wymiar podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

Definicja *Przestrzeń z formą symetryczną zadaną w pewnej bazie przez macierz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nazywa się płaszczyzną hiperboliczną.

8.9. Udowodnić, że płaszczyzna hiperboliczna zawiera wektor α, taki że $\mathrm{lin}\{\alpha\}^{\perp} = \mathrm{lin}\{\alpha\}$.

8.10. Dla niezdegenerowanej formy (V, ϕ) nad ciałem charakterystyki różnej od 2 następujące warunki są równoważne:

a) (V, ϕ) jest sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych

b) istnieje podprzestrzeń $W \subset V$, taka, że $W^{\perp} = W$

c) w pewnej bazie macierz ϕ ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie I jest macierzą identyczności

d) $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie W_1 i W_2 są całkowicie zdegenerowane.

8.11. Rozpatrujemy formę symetryczną nad $\mathbb{R}$ o macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wykazać, że płaszczyzny hiperboliczne o których mowa w a) zadaniu powyższym nie są wyznaczone jednoznacznie.

W powyższym zadaniu b) przestrzeń W nie jest wyznaczona jednoznacznie.

8.12. Niech (V, ϕ) będzie rzeczywistą przestrzenią wymiaru $2n$ z formą symetryczną. Niech V będzie sumą ortogonalną n-wymiarowych podprzestrzeni V_+ i V_- takich, że ϕ jest dodatnio określona na V_+ i ujemnie określona na V_-. Udowodnić, że:

a) Każda podprzestrzeń (V, ϕ) całkowicie zdegenerowana ma wymiar nie większy niż n;

b) Istnieje podprzestrzeń (V, ϕ) całkowicie zdegenerowana wymiaru n;

c) Każda podprzestrzeń całkowicie zdegenerowana jest zawarta w n wymiarowej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

9 Przestrzenie z iloczynem skalarnym

W poniższych zadaniach:
,,przestrzeń euklidesowa" = ,,skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym".

9.1. Niech A będzie macierzą formy 2-liniowej w $\mathbb{R}^n$ w bazie standardowej. Wykazać, że jeśli A jest macierzą iloczynu skalarnego, to dla każdego $n > 0$ macierz A^n też jest macierzą iloczynu skalarnego.

9.2. Wykazać, że funkcja $f(t) = 1$ wraz z funkcjami $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_{>0}$ stanowią układ ortogonalny w przestrzeni funkcji okresowych o okresie 2π z iloczynem skalarnym zadanym przez

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx\,.$$

9.3. Zastosować metodę ortogonalizacji Gramma-Schmidta do bazy $1, x, x^2, .., x^n$ w przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$. Wypisać kilka pierwszych wielomianów. Postarać się samodzielnie znaleźć wzór ogólny, lub przejrzeć notatki z wykładu.

9.4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortonormalną złożoną z wektorów postaci $\frac{1}{2}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, gdzie $a_i \in \{-1, 1\}$. (Macierz Hadamarda.)

9.5. Pokazać, że jeśli w liniowej przestrzeni z iloczynem skalarnym $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą ortonormalną zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest układem wektorów takim, że $\sum_{i=1}^{i=n} \|\beta_i\|^2 < 1$, to układ $\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ jest liniowo niezależny.

9.6. a) Wykazać że forma 2-liniowa $\phi(A, B) = -Tr(AB)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej antysymetrycznych macierzy $n \times n$.
b) Niech $C \in O(n)$. Wykazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczną, to CAC^{-1} też jest macierzą antysymetryczną. Ponadto $A \mapsto CAC^{-1}$ jest izometrią przestzreni macierzy antysymetrycznych ze względu na formę ϕ.

9.7. W przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle A, B\rangle = Tr(AB^T)$ znaleźć, podając jej bazę lub opisujący ją układ równań, podprzestrzeń prostopadłą do podprzestrzeni złożonej z macierzy o śladzie równym 0.

9.8. Niech A będzie macierzą formy 2-liniowej w $\mathbb{R}^n$ w bazie standardowej. Dana jest hiperpłaszczyzna opisana wzorem $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Podać wzór na odległość wektora od tej hiperpłaszczyzny.

9.9. Pokazać, że wyznacznik Gramma spełnia nierówność:

$$G(\alpha_1, .., \alpha_2, \beta_1, .., \beta_l) \leq G(\alpha_1, .., \alpha_k)G(\beta_1, .., \beta_l)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $(\alpha_i, \beta_j) = 0$ dla dowolnych $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$ lub conajmniej jeden z układów $\alpha_1, .., \alpha_k$, $\beta_1, .., \beta_l$ jest liniowo zależny.
Wsk: Rzut ortogonalny nie zwiększa objętości.

9.10. Udowodnić że norma L_1 i L_∞ na $\mathbb{R}^n$ nie pochodzą od iloczynu skalarnego.

9.11. Niech B będzie ograniczoną bryłą w $\mathbb{R}^n$ która jest wypukła i środkowo-symetryczna. Ponadto ma niepuste wnętrze i jest domknięta. Wykazać, że istnieje norma w $\mathbb{R}^n$, dla której

$$B = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid ||\alpha|| \leq 1\}.$$

9.12. Udowodnić wzory w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym:
$||a \times b||^2 + (a, b)^2 = ||a||^2||b||^2$,
$(a \times b, c) = (c \times a, b)$.

9.13. Niech u, v, w będą wektorami w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o normie 1. Znaleźć minimalną i maksymalną wartość wyrażenia $(u, w) + (w, v) + (v, u)$.

9.14. Niech v_1, v_2, v_3, v_4 będą wektorami w $\mathbb{R}^4$. Pokazać, że jeśli $(v_i, v_j) < 0$ dla $i \neq j$ to pewne trzy z tych wektorów są liniowo niezależne.

9.15. Dane macierze $A, B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$. Wykazać, że jeśli $A^T B = 0$ to $r(A) + r(B) = r(A|B)$. Czy twierdzenie jest prawdziwe nad $\mathbb{C}$?

10 Izometrie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym

10.1. Wykazać, że dla ciała $\mathbb{K}$ zbiór

$$O_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n} \mid A^T A = I\}$$

jest podgrupą grupy macierzy odwracalnych.

10.2. Niech f, g będą endomorfizmami przestrzeni euklidesowej V takimi, że dla każdego $v \in V$ mamy $(f(v), f(v)) = (g(v), g(v))$. Pokazać, że istnieje przekształcenie ortogonalne h takie, że $f = hg$.

10.3. Niech u $\in V$ bdzie wektorem o normie 1 w przestrzeni euklidesowej V. Określamy $f(x) = x - 2(x, u)u$, dla $x \in V$. Pokazać, że:
- f jest ortogonalne,
- wyznacznik macierzy przekształcenia f jest równy -1,
- macierz f ma w każdej bazie ortonormalnej posta $I - 2vv^T$, gdzie v to pewien wektor kolumnowy,
- jeśli g jest przekształceniem ortogonalnym o wartości własnej 1 takim, że podprzestrzeń wasna V_1 jest wymiaru $\dim(V) - 1$, to $g(x) = x - 2(x, w)w$, dla pewnego wektora $w \in V$ takiego, że $||w|| = 1$.

10.4. Wykazać, że jeśli A jest macierzą przekształcenia ortogonalnego f w bazie ortogonalnej, to f jest symetrią wtedy i tylko wtedy gdy macierz A symetryczna.

10.5. Pokazać, że jeżeli (V, ϕ) przestrzenią z iloczynem skalarnym, $\phi(\alpha, \alpha) = \phi(\beta, \beta) \neq 0$, to istnieje symetria ortogonalna $f\colon V \longrightarrow V$, taka że $f(\alpha) = \beta$.

10.6. Pokazać, że każde przekształcenie ortogonalne przestrzeni euklidesowej wymiaru n jest złożeniem co najwyżej n symetrii prostopadłych.

10.7. Udowodnić, że złożenie dowolnej liczby obrotów przestrzeni liniowej euklidesowej trójwymiarowej jest obrotem.

10.8. Przekształcenie przestrzeni euklidesowej zadane jest, w kanonicznej bazie ortonormalnej e_1, e_2, e_3 macierzą:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przedstawić to przekształcenie w postaci złożenia co najwyżej trzech symetrii prostopadłych względem płaszczyzn.

10.9. Rozpatrujemy $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć macierz w bazie standardowej i wzór analityczny opisujący rzut prostopadły na podprzestrzeń $W = \text{lin}\{(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\}$.

10.10. Przekształcenie ortogonalne $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ przestrzeni euklidesowej ze standardowym iloczynem skalarnym ma w standardowej bazie ortonormalnej macierz:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę ortonormalną, w której przekształcenie f ma formę kanoniczną. Znaleźć tę formę. Opisać geometrycznie czym jest to przekształcenie. Jeśli któryś z bloków jest obrotem, to proszę podać kąt obrotu.

10.11. Znalezć warunki konieczne i dostateczne na to, by by zbiór liczb dodatnich $\{a_{ij}\colon 0 \geq j \geq n, i > j\}$ był

1. zbiorem odległości wszystkich możliwych par wierzchołków n wymiarowego sympleksu w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$,
2. zbiorem odległości wszystkich możliwych par punktów pewnego zbioru $n+1$ punktów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ (to znaczy nie zakładamy tak jak w a), że punkty są w położeniu ogólnym).

10.12. Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą ortogonalną i $\det A = 1$. Pokazać, że

1. $(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2 = 2 \operatorname{tr} A$
2. $((\sum_{i=1}^{3} a_{ii}) - 1)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 3}(a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$

10.13. Pokazać,że jeżeli $w(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym $n \times n$ macierzy ortogonalnej A. Pokazać, że $\lambda^n w(\lambda^{-1}) = \pm w(\lambda)$.

10.14. Pokzać, że jeśli przekształcenie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym $f : V \to V$ zachowuje kąty (a ściślej $\cos(\sphericalangle(\alpha,\beta))$ dla dowolnej pary wektorów), to f jest postaci $c\,g$, gdzie c jest stałą, a g przekształceniem ortogonalnym (izometrią).

11 Przestrzenie i przekształcenia unitarne

11.1. Załóżmy, że dla pewnego $n > 1$ macierz A^n jest unitarna. Czy wynika stąd, że A jest macierzą unitarną?

11.2. Załóżmy, że dla pewnego endomorfizmu f przestrzeni unitarnej V mamy równość $f^2 = -id$. Czy f jest przekształceniem unitarnym?

11.3. Niech f będzie automorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle\!\langle, \rangle\!\rangle)$ takim, że $f^n = id$, dla pewnego n. Pokazać, że na V można zadać (nową) strukturę $\langle\!\langle, \rangle\!\rangle'$ przestrzeni unitarnej tak, że f jest przekształceniem unitarnym przestrzeni dwuliniowej$(V, \langle\!\langle, \rangle\!\rangle')$.

11.4. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej V spełniającym warunek

$$\langle\!\langle f(u), v\rangle\!\rangle = -\langle\!\langle u, f(v)\rangle\!\rangle,$$

dla każdych $u, v \in V$. Pokazać, że jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną f, to $re(\lambda) = 0$.

11.5. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej V. Pokazać, że dla każdego wektora jednostkowego $x \in V$ zachodzi nierówność:

$$\langle\!\langle f(x), x\rangle\!\rangle\langle\!\langle x, f(x)\rangle\!\rangle \leq \langle\!\langle f(x), f(x)\rangle\!\rangle.$$

W szczególnosci dla macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ mamy $|\langle\!\langle Ax, x\rangle\!\rangle| \leq ||Ax||$, gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $||x|| = 1$ oraz x jest wektorem własnym A.

11.6. Niech V będzie przestrzenia unitarną. Dla endomorfizmu f przestrzeni V określamy „ciało wartości" $W(f) \subset \mathbb{C}$ („numerical range") przekształcenia f przez

$$W(f) = \{\langle\!\langle f(x), x\rangle\!\rangle \mid x \in V,\ ||x|| = 1\}.$$

(a) Pokazać, że $W(f + cI) = W(f) + c$ oraz $W(cf) = cW(f)$, dla każdego $c \in \mathbb{C}$.

(b) Pokazać, że wartości własne f należa do $W(f)$,

(c) Opisać postać geometryczną $W(f)$ w przypadku, gdy macierz f jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}.$$

(d) W przestrzeni l^2 ciągów liczb zespolonych $(x_0, x_1, \ldots)$, dla których $\sum_i |x_i|^2 < \infty$ z iloczynem hermitowskim $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \sum_i a_i \overline{b_i}$ rozważmy operator f zadany przez

$$f(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Pokazać, że $W(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z < 1\}$.

11.7. Niech V będzie przestrzenią z iloczynem hermitowskim, $\dim V < \infty$. Definiujemy normę w $End(V)$:

$$||f|| = sup\{||f(v)|| \ : \ ||v|| = 1 \ \}.$$

Udowdnić, że to rzeczywiście jest norma. Wykazać, że $||fg|| \leq ||f||\,||g||$. Ponadto $||f^* f|| = ||f^*||\,||f||$.

12 Afiniczne przestrzenie euklidesowe

12.1. Dane $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Niech $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x\rangle = b\}$. Podać ogólny wzór na:
– odległości $d(x, H)$
– rzutu ortogonalnego punktu $x \in \mathbb{R}^n$ na H
– symetrii prostokątną względem H.

12.2. Znaleźć wzór na symetrię prostokątną euklidesowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym względem $lin\{\beta_1, \beta_2\}$, gdzie $\beta_1 = [1, 1, -1, -2]$, $\beta_2 = [5, 8, -2, -3]$.

12.3. Udowodnić, że odległość $d(x_0, H)$ punktu x_0 od podprzestrzeni afinicznej $H = y_0 + S(H)$, gdzie $S(H) = \text{lin}\{\alpha_1, .., \alpha_k\}$, można wyrazić przy pomocy wyznacznika Gramma G:

$$(d(x_0, H))^2 = \frac{G(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k, \omega(x_0, y_0))}{G(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k)},$$

12.4. W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć (conajmniej na dwa sposoby) odległość punktu $(4, 2, -5, 1)$ od podprzestrzeni opisanej przez układ równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

12.5. W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć odległość punktu $(2, 4, -4, 2)$ od podprzestrzeni danej przez układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - \ x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

12.6. W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ dane są proste $L = \{[0, 7, 1, 2] + t(0, 1, -1, 0)\}$ oraz $K = \{[1, 1, 1, 1] + t(1, 0, 0, -1)\}$. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[4, 1, 3, 1]$, która jest prostopadła do L i nie przecina K.

12.7. Niech H i K bedą podprzestrzeniami euklidesowej przestrzeni afinicznej E i niech $H \cap K = \emptyset$. Pokazać,że istnieje prosta L taka, że $L \perp H$, $L \perp K$, i L ma punkty wspólne z H i z K.

12.8. Pokazać, że jeżeli izometria afinicznej przestrzeni euklidesowej ma dwie niezmiennicze podprzestrzenie afiniczne skośne, to ma punkt stały.

13 Kwadryki w przestrzeni euklidesowej

13.1. Opisać typ kwadryki i znaleźć jej środek symetrii (jeśli istnieje)

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 = 0.$$

13.2. Znaleźć oś symetrii paraboli $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + y = 8$.

13.3. Znaleźć osie kwadryki $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$.

14 Przekształcenia samosprzężone i twierdzenie spektralne

14.1. Niech ϕ będzie przekształceniem samosprzężonym prestrzeni skończonego wymiaru. Wykazać, że $ker\,\phi \perp im\,\phi$ oraz $ker\,\phi$ i $im\,\phi$ rozpinają całą przestrzeń (ortogonalna suma prosta).

14.2. Niech przekształcenie samosprzężone ϕ przestrzeni euklidesowej będzie dane w pewnej bazie ortonormalnej przez macierz A. Znaleźć ortonormalną bazę wektorów własnych ϕ oraz macierz ϕ w tej bazie. (Uwaga: Zadanie to jest równoważne sformułowaniu: znaleźć macierz ortogonalną B taką, że B^TAB jest macierzą diagonalną. Baza, lub równoważnie macierz B, nie musi być wyznaczona jednoznacznie).

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.3. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem przestrzeni euklidesowej, takim że f jest samosprzężone i ortogonalne. Pokazać, że f jest symetrią względem pewnej podprzestrzeni wzdłuż podprzestrzeni do niej prostopadłej.

14.4. !!! Dane $0 < k < n$. Niech $A \in End(\mathbb{R}^n)$ zachowuje objętość równoległościanów k-wymiarowych. Pokazać, że A jest izometrią.

14.5. Niech φ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że

a) funkcja $f(x) = (\varphi(\alpha), \alpha)$ osiąga minimum na sferze jednostkowej

b) jeżeli λ_1 jest minimum funkcji f na sferze jednostkowej przyjmowanym w punkcie α_1, to α_1 jest wektorem własnym o wartości własnej λ_1.

c) pokazać, że przestrzeń $lin\{\alpha_1\}^\perp$ jest φ niezmiennicza i opisana w punkcie b) procedura stosowana indukcyjnie prowadzi do znalezienia ciągu rosnącego wartości własnych $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ i odpowiadających im wektorów własnych.

14.6. Operator $A \in End(\mathbb{C}^2)$ jest zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 4+2i & 5+4i \\ 4+3i & 2 \end{pmatrix}$$

Przedstawić A jako złożenie BP operatora samosprężonego dodatnio-określonego P i unitarnego B. (To jest zadanie na rozkład biegunowy.)

14.7. Znałeźć rozkład biegunowy macierzy $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

14.8. Udowodnić, że przekształcenia samosprzężone ϕ i ψ przestrzeni euklidesowej są przemienne (tzn. $\phi\psi = \psi\phi$) wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają wspólną ortonormalną bazę wektorów własnych.

14.9. Znaleźć wspólną bazę ortonormalną (względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$) złożoną z wektorów własnych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.10. Niech φ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej takim, że $(\varphi(\alpha), \alpha) \geq 0$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli dla pewnego wektora α_0, $(\varphi(\alpha_0), \alpha_0) = 0$, to $\varphi(\alpha_0) = 0$;

14.11. Jeśli A jest operatorem samosprzężony, to $\exp(iA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!}$ jest unitarny. Jeśli B jest unitarny, to istnieje samosprzężony A, taki, że $B = \exp(iA)$.

14.12. Niech $A \in U(n)$. Wykazać, dla każdej liczby naturalnej k istnieje wielomian f (być może zależny od A) taki, że $(f(A))^k = A$.

14.13. Niech A będzie operatorem dodatnio określonym, a B operatorem półdodatnio określonym. Udowodnić że wartości własne AB są rzeczywiste. (Uwaga: nie zakładamy, że $AB = BA$.)

14.14. (**Teoria Hodge'a**) Niech $f : V \to V$ będzie endomorfizmem spełniającym $f^2 = 0$. Niech $\Delta = f^* f + f f^*$. Wykazać, przy załżeniu, że $\dim V < \infty$
1) $ker(\delta) = ker(f) \cap ker(f^*)$
2) $V = ker(\delta) \oplus im(f) \oplus im(f^*)$ i ten rozkład jest ortogonalny.

14.15. Niech A będzie operatorem samosprzężonym przestrzeni $\mathbb{C}^n$ oraz niech $\lambda_{min}(A)$ oraz $\lambda_{max}(A)$ będą odpowiednio najmniejszą i największą wartością własną macierzy A. Pokazać, że:

$$\lambda_{min}(A) = \min_{||x||=1} x^* A x, \quad \lambda_{max}(A) = \max_{||x||=1} x^* A x.$$

14.16. Niech A, B będą operatorami samosprzężonymi przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Pokazać, że:

(a) $tr((AB)^k)$ jest liczbą rzeczywistą, dla każdego dodatniego k,

(b) $tr((AB)^2) \leq tr(A^2 B^2)$. Kiedy zachodzi równość?

(c) $tr((AB)^2) \leq tr(A^2) tr(B^2)$. Kiedy zachodzi równość?

14.17. Niech A będzie symetryczną rzeczywistą macierzą rozmiarów $n \times n$. Przez $S(A)$ oznaczamy sumę wszystkich wyrazów A. Pokazać, że zachodzi nierówność $S(A)/n \leq S(A^2)/S(A)$.

14.18. Niech $Z \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Pokazać, że $\det(I_m - ZZ^*) = \det(I_n - Z^* Z)$.

Elementy spektralnej teorii grafów

Patrz http://math.mit.edu/~csikvari/spectral_graph_theory.pdf
Definicja. Przez macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego G o zbiorze n wierzchołkow $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz zbiorze krawędzi E rozumiemy macierz symetryczną $M(G) = (m_{ij}) \in M_{n \times n}(\{0, 1\})$ taką, że $m_{ij} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krawędź w G łącząca i oraz j.

14.19. Pokazać, że jeśli G jest grafem prostym (nie ma cykli i wielokrotnych krawędzi) to wartości własne λ_i macierzy sąsiedztwa tego grafu spełniaja równosci $\sum \lambda_i = 0$ oraz $\sum \lambda_i^2 = 2e(G)$, gdzie $e(G)$ oznacza liczbę krawędzi w E. Ogólniej, pokazać, że $\sum \lambda_i^l$ równe jest liczbie zamknietych dróg długości l w G.

14.20. Pokazać, że graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy spektrum jego macierzy sąsiedztwa jest symetryczne względem zera.

14.21. (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa) Niech G będzie grafem spójnym oraz $M(G)$ jego macierzą sąsiedztwa . Niech $\lambda_{max}(G)$ będzie największą z wartości własnych macierzy $M(G)$. Pokazać, że:

(a) Jeśli $v \in V_{(\lambda_{max})}$ jest wektorem niezerowym, to żadna jego współrzędna nie jest zerowa.

(b) Krotność λ_{max} jako wartości własnej jest równa 1.

(c) Jeśli $v \in V_{(\lambda_{max})}$ jest wektorem niezerowym, to wszystkie współrzędne v mają ten sam znak.

(d) Niech H będzie podgrafem G. Wówczas $\lambda_{max}(H) \leq \lambda_{max}(G)$, przy czym jeśli H jest właściwy, to nierówność jest ostra,

(e) Pokazać, że jeśli G jest grafem d-regularnym (każdy wierzchołek jest połaczony z dokladnie d wierzchołkami), to $\lambda_{max}(G) = d$, a krotność $\lambda_{max}(G)$ to liczba składowych spójnych tego grafu. Każdy wektor własny macierzy $M(G)$ o wartości wlasnej d jest stały na każdej składowej.

14.22. Pokazać, że jeśli graf G ma średnicę (odległość między wierzchołkami grafu to długość najkrótszej łączącej je ścieżki, a średnica grafu to maksimum z odległości między jego wierzchołkami) równą d, to liczba róznych wartości własnych macierzy sąsiedztwa tego grafu równa jest przynajmniej $d+1$.

Wsk. $I, A, \ldots, A^d$ są liniowo niezależne.

14.23. Pokazać, że jeśli $\lambda_{\max}$ jest najwiekszą wartością własną macierzy sąsiedztwa grafu $G=(V,E)$ to

$$\max_{v\in V} d(v) \geq \lambda_{\max} \geq \frac{2|E|}{|V|},$$

gdzie $d(v)$ jest stopniem wierzchołka v grafu G.

14.24. (*) Pokazać, że jeśli $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G oraz λ_{max} jest najwiekszą wartością własną macierzy sąsiedztwa grafu G, to $\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}$. (**) Pokazać, że równość zachodzi jedynie dla grafu pełnego oraz dla cyklu o nieparzystej liczbie wierzchołków.

Uwaga. Zagadnieniem wciąż aktualnie badanym jest dolne oszacowanie liczby chromatycznej przy pomocy wartości własnych macierzy sąsiedztwa. Więcej na ten temat można przeczytać na przykład w artykule: http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/v19i1p39/pdf.

15 Kwaterniony

15.1. Udowodnić, że jeśli a i b są liczbami całkowitymi będącymi sumami czterech kwadratów liczb całkowitych, to iloczyn ab też jest sumą czterech kwadratów.

15.2. Udowodnić, że wszystkie elementy $h \in \mathbb{H}$ speniające $h^2=-1$ są sprzężone, tzn jeśli $g^2=h^2=-1$, to istnieje element $k \in \mathbb{H}$, taki, że $khk^{-1}=g$.

15.3. Opisać wszystkie sposoby na jakie można zanurzyć $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$ z zachowaniem działań? (Tu przez zanurzenie rozumiemy przekształcenie $\mathbb{R}$-liniowe $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ takie, że $\phi(1)=1$ oraz $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest ciałem, więc każde takie przekształcenie automatycznie będzie różnowartościowe.)

15.4. Utożsamiając kwaterniony z macierzami wykazać, że iloczyn skalarny w kwaternionach jest równy $2(x,y)=tr(xy^*)$.

15.5. Pokazać, że $\{q \in \mathbb{H} : qq' = q'q, \forall_{q'\in H}\} = \mathbb{R}$.

15.6. Identyfikujemy zbiór czystych kwaternionów $im\mathbb{H}$ z $\mathbb{R}^3$ przez $q = bi+cj+dk \mapsto (b,c,d)$. Pokazać, że:

(a) Jeśli $q_1, q_2 \in im\mathbb{H}$, to $q_1q_2 = -(q_1 \circ q_2) + q_1 \times q_2$, gdzie $q_1 \circ q_2$ to iloczyn skalarny reprezentantów q_1, q_2 elementów q_1, q_2 w $\mathbb{R}^3$, a $q_1 \times q_2$ to iloczyn wektorowy,

(b) Pokazać, że $\frac{1}{2}\cdot(q_1q_2q_3 - q_2q_3q_1) = q_1 \times (q_2 \times q_3)$.

Grupa Lorentza

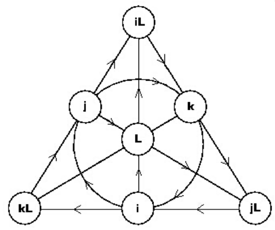
15.7. ♠ Każde przekształcenie liniowe zachowujące stożek $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ jest postaci $const \cdot \phi$, gdzie $\phi \in O(1,3)$.

15.8. ♠ Rozważyć odwzorowanie $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1,3)$ opisane w §7.18–24 w notatkach do wykładu (Iloczyny skalarne). Wykazać, że dla każdej macierzy $A \in SO(1,3)$ albo A jest w obrazie, albo $-A$ jest w obrazie.
Wsk: Wykazać, że każdy element $SO^+(1,3)$ można predstawić jako ABC, gdize $A, C \in SU(2)$, $B \in SO^+(1,1)$.

Oktoniony

15.9. Definiujemy odwzorowanie $\star : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ wzorem

$$(a,b) \star (c,d) = (ac - d^* b\ ,\ da + bc^*)$$



$$\text{for } h \in \mathbb{H} \quad h := (h,0) \qquad \ell := (0,1)$$

Niech $(a,b)^{\#} = (a^*, -b)$.
Udowodnić, że dla $v \in \mathbb{H}^2$ produkt $v \star v^{\#} \in \mathbb{H}^2$ jest postaci $(r,0)$, gdzie $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.
Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $v \in \mathbb{H}^2$ istnieje w taki, że $v \star w = w \star v = (1,0)$.

15.10. Niech

$$V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid A = A^*,\ tr(A) = 0\} = lin_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sprawdzić, że $\exp(iA) \in SU(2)$ dla $A \in V$. Zbadać obrazy prostych $\exp(itA)$ dla macierzy A takich jak powyżej.

16 tensory

16.1. ♠ Ćwiczenie: Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, oraz $\sum v_i \otimes w_i = 0$ to $w_1 = w_2 = \cdots = w_k$.

16.2. Opisac rownaniami zbiór tensorow prostych w $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}^2$. Uogólnić rezultat do wyższych wymiarów.

16.3. Opisać jak wygląda macierz naturalnego przekształcenia $End(V) \times End(W) \to End(V \otimes W)$ w bazach pochodzących od wyboru baz w V i W.

16.4. Obliczyć $tr(f \otimes g)$ za pomocą $tr(f)$ i $tr(g)$.

16.5. Znaleźć współczynniki wielomianu charakterystycznego $f \otimes g$ w terminach współczynników wielomianów charakterystycznych dla f i g. Rozważyć przypadek $f \in End(\mathbb{K}^n)$, $g \in End(\mathbb{K}^m)$, $n, m \leq 3$.

16.6. Obliczyć wymiar potęgi symetrycznej $S^q(\mathbb{R}^n)$.

16.7. ♠ (Zanurzenie Veronese) Rozważyć przekształcenie

$$\mathbb{K}^n = V \to S^k(V) \quad v \mapsto \underbrace{v \otimes v \otimes \cdots \otimes v}_{k}.$$

Pokazać, że indukuje ono włożenie $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^k(V))$. Opisać równaniami obaz dla małych wrtości k i $\dim V$. Np $k = 2$, $\dim V = 2, 3$.

16.8. ♠ (Zanurzenie Plückera). Niech $Gras_k(\mathbb{K}^n)$ oznacza zbiór k-wymiarowych podprzestrzeni w $\mathbb{K}^n$. Wykazać, że przekształcenie $V = lin(v_1, v_2, \ldots, v_k) \mapsto lin(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) \in \mathbb{P}(\Lambda^k(\mathbb{K}^n))$ jest dobrze określone. Opisać wielomianami obraz. (Rozważyć przypadek $n = 4$, $k = 2$.)

16.9. ♠ Niech $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ będzie antysymetryczną formą 2-liniową na $V = \mathbb{K}^{2n}$. Wykazać, że ω jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} \neq 0$.

16.10. Niech $v \in V$, $a \in \Lambda^q V$. Wykazać, że $v \wedge a = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = v \wedge b$ dla pewnego $b \in \Lambda^{q-1} V$

16.11. Pokazać, że Λ^q rozszerza się do funktora $\Lambda^q : Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$.

16.12. Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarny. Iloczyn skalarny to jest pewien tensor $m : V \otimes V \to \mathbb{R}$, który można zamienić na izomorfizm $m^{\#} : V \to V^*$. Stąd otrzymujemy $\Lambda^q(m^{\#}) : \Lambda^q V \to \Lambda^q(V^*) = (\Lambda^q V)^*$. W ten sposób jest skonstruowana forma dwuliniowa w $\Lambda^q V$.
– Udowodnić, że jest to iloczyn skalarny.
– Mając bazę ortonormalną w V wslazać bazę ortonormalną w $\Lambda^q V$
– Udowodnić

$$||v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_q|| = vol(\langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle)$$

– Niech $V = \mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Udowodnić

$$vol(\langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle)^2 = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\},\ |I|=q} m_I^2$$

gdzie m_I jest wyznacznikiem minora $q \times q$ macierzy rozmiaru $n \times q$ mającej wektory v_i jako kolumny.

16.13. Niech $f \in End(\mathbb{C}^3)$. Obliczyć wielomian charakterystyczny $W(\Lambda^2 f)$ za pomocą $W(f)$.

16.14. ♠ Niech V będzie przestrzenią zespoloną. Wskazać naturalny izomorfizm $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}$, gdzie $\overline{V}$ jako zbiór jest równy V, ale ma zmienione mnożenie przez skalary zespolone: $z \odot v := \overline{z} v$.

16.15. ♠ Który z poniższych tensorów (w klasycznej notacji) typu (0,1) jest prosty
a) $T^{i,j} = ij$,
b) $T^{i,j} = i + j$?