GAL*, konspekt wykładów: Przestrzenie afiniczne

5 kwietnia 2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie Afiniczne [Kos roz. 4, §1]

1.1 Definicja przestrzeni afinicznej: (E, V, ω), gdzie E zbiór, V przestrzeń liniowa, $\omega : E \times E \to V$ odwzorowanie, które spełnia

1. $\omega(p, q) + \omega(q, r) = \omega(p, r)$

2. $\forall p \in E \; \forall \alpha \in V \; \exists! q \in E \; : \; v = \omega(p, q)$

tzn $\forall p \in E$ odwzorowanie $\omega(p, -) : E \to V$ jest bijekcją.

Przestrzeń V nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez TE.

1.2 Czasami wektor $\omega(p, q)$ jest oznaczany $\overrightarrow{pq}$.

1.3 Naczelny przykład: V – przestrzeń wektorowa, ($E = V$, V, $\omega(p, q) = q - p$).

1.4 Operacja $\boldsymbol{+} : E \times V \to E$ zdefiniowana przez warunek $p \boldsymbol{+} \omega(p, q) = q$:

1') $(p \boldsymbol{+} v) \boldsymbol{+} w = p \boldsymbol{+} (v + w)$ dla $p \in E$, $v, w \in V$

2') $\forall p \in E$, $V \ni v \mapsto p \boldsymbol{+} v \in E$ jest bijekcją.

1.5 Ćwiczenie: $(p \boldsymbol{+} v) \boldsymbol{+} w = p \boldsymbol{+} (v + w)$

1.6 Mamy $\omega(p, p) = 0$, $\omega(p, q) = -\omega(q, p)$ oraz $p \boldsymbol{+} 0 = p$ dla $p, q \in E$.

1.7 Kombinacje afiniczne, czyli środki ciężkości (barycentry) $\sum_{i=0}^{k} a_i \, p_i := q \boldsymbol{+} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \, \omega(q, p_i) \right)$ dla $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$. Niezależność od $q \in E$.

(W dalszej części nie będziemy już używać specjalnego $\boldsymbol{+}$, tylko zwykły $+$.)

2 Bazy punktowe, podprzestrzenie adiniczne

2.1 Układy rozpinające, niezależne układy punktów, bazy punktowe.

2.2 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą E wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(p_0, p_1), \omega(p_0, p_2) \ldots, \omega(p_0, p_n)$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą V.

2.3 Wniosek: Trzy warunki równoważne

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest bazą punktową

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to minimalnym układem rozpinającym,

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to maksymalnym układem niezależnym.

2.4 Współrzędne barycentryczne w bazie punktowej.

2.5 Mając bazę punktową $p_0, p_1, \ldots, p_n$ można utożsamiać E z podzbiorem $\mathbb{K}^{n+1}$

$$\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

2.6 Definicja: Niech $F \subset E$, $W \subset V$, $\omega' = \omega_{|F\times F}$. Trójka (F, W, ω') jest podprzestrzenią (E, V, ω) gdy
– $\forall p, q \in F$ $\omega(p.q) \in W$
– $\forall p \in F$ funkcja $\omega(p, \_) : F \to W$, $q \mapsto \omega(p, q)$ jest bijekcją.

2.7 Podzbiór $F \subset E$ jest podprzestrzenią afiniczną (a ściślej: istnieje $W \subset V$ takie, że $(F, W, \omega_{|F\times F})$ jest podprzestrzenią) wtedy i tylko wtedy, gdy F jest zamknięty ze względu na branie kombinacji afinicznych.

Dow ($\Leftarrow$): Definiujemy $W = \{\omega(p, q) \mid p, q \in F\}$. Sprawdzamy, że W jest podprzestrzenią liniową
– $a\omega(p, q) = \omega(p, q')$ dla $q' = (1 - a)p + aq$,
– $\omega(p, q) + \omega(r, s) = \omega(p, q) + \omega(r, p) + \omega(p, s) = \omega(p, q) - \omega(p, r) + \omega(p, s) = \omega(p, q')$
dla $q' = 1\,q + (-1)r + 1\,s$.
Przy okazji zauważamy, że dla ustalonego p, kładąc $p = q$, przestrzeń $\{\omega(p, q') \mid q' \in F\}$ jest równa W. Zatem przekształcenie $F \to W$, $q \mapsto \omega(p, q)$ jest ,,na" i oczywiście jest różnowartościowe.

2.8 Załóżmy $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Zbiór zamknięty ze względu na dwuelementowe kombinacje afiniczne jest podprzestrzenią afiniczną.

2.9 Każda podprzestrzeń $F \subset E$ jest postaci $p + W$, gdzie W jest podprzestrzenią liniową w TE. Przestrzeń liniowa W nie zależy od wyboru $p \in F$.

2.10 Każda podprzestrzeń afiniczna w E jest postaci $p + W$, gdzie $p \in E$, $W \subset V = TE$.

2.11 Parametryczne przedstawienie: np prosta $L(p, q) = \{p + t\omega(p, q) \mid t \in \mathbb{K}\}$.

2.12 Każda podprzestrzeń afiniczna w $\mathbb{K}^n$ jest opisana niejednorodnym układem równań liniowych.

2.13 Część wspólna rodziny podprzestrzeni jest pusta lub jest podprzestrzenią.

2.14 Istnieje najmniejsza podprzestrzeń $af(A)$ zawierająca dany zbiór A. Składa się ona z kombinacji afinicznych punktów z A.

2.15 Równoloegóść:
F_1 jest słabo równolełe do F_2 gdy $TF_1 \subset TF_2$ (to jest relacja kwaziporządku).
F_1 jest silnie równolełe do F_2 gdy $TF_1 = TF_2$ (to jest relacja równoważności)

2.16 Podprzestrzenie F_1 i F_2 są skośne jeśli $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ i $TF_1 \cap TF_2 = \{0\}$.

2.17 Ćwiczenie: jeśli F_1 i F_2 są skośne to $\dim(F_1) + \dim(F_2) < \dim(E)$.

2.18 Ćwiczenie: Jeśli F_1 jest słabo równolełe do F_2, oraz $F_1 \not\subset F_2$ to $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

3 Afiniczne przekształcenia

3.1 Definicja 1. Przekształcenie przestrzeni afinicznych

$$(E, V, \omega_E) \longrightarrow (F, W, \omega_F)$$

to para przekształceń

$$\phi : E \longrightarrow F \qquad \text{(przekształcenie zbiorów)}$$

$$D\phi : V \longrightarrow W \qquad \text{(przekształcenie liniowe)}$$

takie, że

$$\omega_F(\phi(p), \phi(q)) = D\phi(\omega_E(p, q))\,.$$

3.2 Definicja 2/Twierdzenie: Przekształcenie $\phi : E \to F$ jest afiniczne jeśli przeprowadza kombinacje afiniczne na kombinacje afiniczne obrazów.

Dow. Trzeba skonstruować przekształcenie liniowe przestrzeni stycznychh $\widetilde{\phi} = D\phi : TE \to TF$.

$$D\phi(v) := \omega(\phi(p), \phi(p + v))$$

(Sprawdzamy, że definicja nie zależy od wyboru $p \in E$, oraz że $D\phi$ jest liniowe. Wsk: $p' + v$ jest kombinacją afiniczną $1p' + 1(p + v) + (-1)p$.)

3.3 Przekształcenie styczne (pochodna) $D\phi$ i wybór $\phi(p) \in F$ dla ustalonego $p \in E$ definiuje przekształcenie afiniczne, tzn jeśli dane jest przekształacenie liniowe $\phi_0 : TE \to TF$ oraz dowolne punkty $p \in E$, $q \in F$, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\phi : E \to F$ takie, że $\phi(p) = q$ oraz $D\phi = \phi_0$.

3.4 Przekształcenie afiniczne jest zadane przez wybór obrazów bazy punktowej.

3.5 We współrzędnych: przekształcenia afiniczne $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ są postaci

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_1, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_2, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_m)\,.$$

gdzie $D\phi = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jest przekształceniem liniowym, $\phi(0, 0, \ldots, 0) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

3.6 Przekształcenie afiniczne ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy $D\phi$ jest izomorfizmem liniowym.

3.7 Wybieramy $p \in E$ i $p' \in F$. Wtedy

$$\begin{array}{rcl} \text{przekształcenia afiniczne}(E, F) & \simeq & TF \times L(TE, TF), \\ \phi & \longrightarrow & (\omega(p', \phi(p)), D\phi) \\ \big(\, q \mapsto p' + v + D\phi(\omega(p, q))\,\big) & \longleftarrow & (v, D\phi)\,. \end{array}$$

3.8 Dany wektor $v \in V = TE$. Przez T_v oznaczamy przesunięcie $T_v(p) = p + v$.

3.9 Każde przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształcenia liniowego i przesunięcia.

3.10 Jeśli $D\phi$ jest izomorfizmem, to ϕ jest izomorfizmem. Każde dwie przestrzenie tego samego wymiaru są izomorficzne. W szczeglnoci jeśli $\dim E = n$, to $E \simeq \mathbb{K}^n$. Izomorfizm zależy od wyboru punktu $p \in E$ i wyboru bazy w TE.

3.11 Przeciwobraz podprzestrzeni afinicznej przy przekształceniu afinicznym jest podprzestrzenią afiniczną. Każda podprzestrzeń w $\mathbb{K}^n$ jest przeciwobrazem 0 przy pewnym przekształceniu afinicznym $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

3.12 Składanie przekształceń. Wybieramy $p_E \in E$, $p_F \in F$ oraz w $p_G \in G$. co pozwala nam utożsamić $E \simeq TE$, $F \simeq TF$ i $G \simeq TG$.

$$TF \times L(TE, TF) \simeq Aff(E, F) = \text{przekształcenia afiniczne}(E, F),$$

$$(v, D\phi) = T_v \circ D\phi$$

$$TG \times L(TF, TG) \simeq Aff(F, G) = \text{przekształcenia afiniczne}(F, G),$$

$$(w, D\psi) = T_w \circ D\psi$$

$$TG \times L(TE, TG) \simeq Aff(E, G) = \text{przekształcenia afiniczne}(E, G),$$

$$(w, D\psi) \circ (v, D\phi) = T_w \circ D\psi \circ T_v \circ D\phi$$

$$u \mapsto D\phi(u) + v \mapsto D\psi(D\phi(u) + v) + w = D\psi(D\phi(u)) + (D\psi(v) + w).$$

Zatem złożeniu o dpowiada para

$$(w, D\psi) \circ (v, D\phi) = (w + D\psi(v), D\psi \circ D\phi)$$

3.13 Wniosek: $D(\psi \circ \phi) = D\psi \circ D\phi$

Odsyłacz do grupy przekształceń: Kostrikin Roz 4,§3.

3.14 Grupa izomorfizmów afinicznych $Aff^o(E) \subset Aff(E, E)$.
Odwzorowanie $D : Aff^o(E) \to GL(TE)$ jest homomorfizmem, tzn

$$D(\phi \circ \psi) = D(\phi) \circ D(\psi)\,, \qquad D(Id_E) = Id_{TE}.$$

3.15 Odwzorowanie D jest epimorfizmem.

$$ker(D) = \{\phi \in Aff^o(E) \mid D\phi = Id_{TE}\} = \{T_v \mid v \in TE\}.$$

Mamy ciąg przekształceń

$$\begin{array}{ccccc} TE & \overset{mono}{\hookrightarrow} & Aff(E) & \overset{epi}{\twoheadrightarrow} & GL(TE) \\ v & \overset{i}{\mapsto} & T_v & & \\ & & \phi & \mapsto & D\phi \end{array}$$

Mówimy, że ten ciąg jest dokładny (warunek $im(i) = ker(D)$).

3.16 Jeśli utożsamić $Aff(E)$ z $TE \times GL(TE)$ (wybierając punkt bazowy w E) to składanie zadane jest wzorem

$$(w, \psi_0) \circ (v, \phi_0) = (w + \psi_0(v), \psi_0 \circ \phi_0)\,.$$

Grupa z takim działaniem składania jest szczególnym przypadkiem tzw produktu półprostego $TE \rtimes GL(TE)$.

3.17 Niezmienniki przekształceń afinicznych:
- współliniowość (koplanarność, etc) punktów
- równoległość podprzestrzeni (słaba i silna)
- proporcje podziału odcinka.
- np przecinanie się trzech prostych $L(p_i, q_i)$, $i = 1, 2, 3$ w jednym punkcie

4 Różne rachunki w przestrzeniach afinicznych

4.1 Dane punkty $[p_1, p_2, p_3]$, $[q_1, q_2, q_3]$, $[r_1, r_2, r_3] \in \mathbb{K}^3$, które są afinicznie niezależne. Wzór na powierzchnnię $af(p, q, r)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Można traktować ten wzór jako otrzymany ze wzoru na przestrzeń liniową w $\mathbb{K}^4$ rozpiętą przez wektory $(1, p_1, p_2, p_3)$, $(1, q_1, q_2, q_3)$, $(1, r_1, r_2, r_3)$.

4.2 Pęk płaszczyzn: każda płaszczyzna zawierająca prostę

$$L = \{x \in \mathbb{K}^3 \mid a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\}$$

ma równanie postaci

$$\{x \in \mathbb{K}^3 \mid \lambda(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0\}$$

dla pewnych $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Można wykorzystać to szukając równania płaszczyzny zawierającej dany punkt p oraz L.

4.3 Czy każde dwie trójki prostych w $\mathbb{K}^3$ parami skośnych są afinicznie równoważne? TAK, jeśli ich przestrzenie styczne rozpinają przestrzeń liniową $\mathbb{K}^3$.

4.4 Przykład przekształcenia: rzutownie afiniczne. Niech $F \subset E$, $TE = TF \oplus V$. Istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne ϕ, które jest stałe na F oraz $D\phi$ jest rzutowaniem względem TF wzdłuż V.

Przestrzenie rzutowe.

4.5 Dana przestrzeń wektorowa V nad ciałem K. Zbiór prostych (przechodzących przez 0) w V oznaczamy przez $\mathbb{P}(V)$. Mamy $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$, gdzie $v \sim w$ gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $v = \lambda w$.

4.6 Oznaczenie $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Elementy przestrzeni rzutowej są oznaczane przez

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$$

(to jest klasa wektora $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, czyli prosta rozpięta przez ten wektor, albo inaczej — wektor z dokładnością do proporcjonalności).

4.7 Niech $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$ będzie podprzestrzenią liniową rozpiętą przez ostatnie n współrzędnych. Niech $E = (1, 0, 0, 0, \dots, 0) + \mathbb{K}^n$, Każda prosta nie zawarta w $\mathbb{K}^n$ przecina E w dokładnie jednym punkcie. To daje utożsamienie $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) \setminus \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ z E. Swoją drogą $E \simeq \mathbb{K}^n$.

4.8 Ogólniej Niech $E \subset V$ będzie podprzestrzenią afiniczną, $0 \notin E$, $\dim V - \dim E = 1$. Dopełnienie $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(TE)$ można utożsamić z E.

4.9 $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ można pokryć zbiorami $U_i = \{x_i \neq 0\}$. W zbiorze U_i mamy wspóżżędne

$$u_0 = \tfrac{x_0}{x_i},\ u_1 = \tfrac{x_1}{x_i}, \dots,\ \text{bez } u_i\,, \dots\ u_n = \tfrac{x_n}{x_i}\,.$$

4.10 Przykład $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$:
- $u = \frac{x_1}{x_0}$ współrzędna w U_0,
- $v = \frac{x_0}{x_1}$ współrzędna w U_1.

Mamy $u = 1/v$ (tam gdzie to ma sens).

4.11 Przykład $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$:
- $u_1 = \frac{x_1}{x_0}$, $u_2 = \frac{x_2}{x_0}$ współrzędne w U_0,
- $v_0 = \frac{x_0}{x_1}$, $v_2 = \frac{x_2}{x_1}$ współrzędne w U_1,
- $w_0 = \frac{x_0}{x_2}$, $w_1 = \frac{x_1}{x_2}$ współrzędne w U_2.

Mamy

$$u_1 = \tfrac{1}{v_0} = \tfrac{w_1}{w_0}\,, \qquad u_2 = \tfrac{v_2}{v_0} = \tfrac{1}{w_0}$$

(tam gdzie to ma sens).

4.12 Zobaczyć jak wygląda okrąg $(u_1)^2 + (u_2)^2 = 1$ we współrzędnych v_0, v_2 oraz we współrzędnych w_0, w_1.

5 Przestrzenie rzutowe

5.1 Przyglądamy się krzywym na płaszczyźnie rzutowej $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ w różnych układach współrzędnych.

— Dana parabola $u_2 = u_1^2$ (tzn $\frac{x_1}{x_0} = (\frac{x_1}{x_0})^2$). Zobaczyć jakie jest jej przecięcie z ,,prostą w nieskończoności" zadanaą przez równanie $x_0 = 0$ we współrzędnych $v_0 = \frac{x_0}{x_1}$, $v_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

— Ćw: Dane proste w $\mathbb{K}^2$ ze współrzędnymi u_1, u_2 zadane równaniami $u_2 = a$ i $u_2 = b$, $a \neq b$. Jako proste afiniczne są równoległe (nie przecinają się). Utożsamiamy $\mathbb{K}^2$ z $U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Zobaczyć jak wyglądają te proste we współrzędnych $v_0 = 1/u_1$, $v_2 = u_2/u_1$.

5.2 Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej: $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto [f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_n(x)]$, gdzie $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ oraz $f = (f_0, f_1, \dots f_n) : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ jest izomorfizmem liniowym.

5.3 Przekształcenia rzutowe przestrzeni afinicznej $\mathbb{K}^n$ utożsamianej z U_0 (jest nie wszędzie określone):

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto (\frac{\bar{f}_1}{\bar{f}_0}, \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_0}, \dots, \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_0}),$$

gdzie $\bar{f}_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \dots, n$ są funkcjami afinicznymi powstałymi z funkcji liniowych $f_i : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ przez podstawienie $x_0 = 1$ w **(5.2)**).

5.4 Przykład: $\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u_2/u_1)$, przeciwobraz okręgu $(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1$ jest hiperbolą.

5.5 Przekształcenia przestrzeni rzutowej zadane izomorfizmem liniowym przestrzeni V są oznaczane przez $PGL(V)$, lub gdy $V = \mathbb{K}^{n+1}$ przez $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$. Mamy $PGL(V) = GL(V)/\sim$, gdzie $\phi \sim \psi$ gdy $\phi\psi^{-1} = \lambda Id_V$.

5.6 Przekształcenie $(u_1, u_2) \mapsto (\frac{2u_1}{1+u_2}, \frac{1-u_2}{1+u_2})$ przekształaca parabolę $u_2 = u_1^2$ na okrąg.

5.7 Przekształcenia rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ zachowujące $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, są indukowane przez $\phi \in GL(\mathbb{K}^{n+1})$,

$$\phi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (f_0(x_0, x_1, \dots, x_n), f_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_0, x_1, \dots, x_n))$$

takie, że $f_0(1, x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Czyli takie, że $f_0(1, x_1, \dots, x_n) = a_{0,0}$. Tzn macierz ϕ ma w ,,zerowym" wierszu tylko ,,zerowy" wyraz różny od zera. Takie przekształcenie rzutowe ma wzór we spółrzędnych afinicznych

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{f_0(1, x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{0,0}}, \frac{f_1(1, x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{0,0}}, \dots, \frac{f_n(1, x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{0,0}} \right),$$

Zatem jest przekształceniem afinicznym. (Inna charakteryzacja: $\phi(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}$, tzn zachowuje hiperpłaszczyznę w nieskończoności.)

5.8 Mamy
$\{\phi \in Aff(\mathbb{K}^n) \mid \phi(0) = 0\} = GL(\mathbb{K}^n)$
$\{\phi \in$ Przekształcenia rzutowe $\mid \phi(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}\ \} = Aff(\mathbb{K}^n)$

5.9 Przekształcenie prostej rzutowej: $x \mapsto \frac{a_{10}+a_{11}x}{a_{00}+a_{11}x}$ można przedstawić jako złożenie przekształceń afinicznych i $x \mapsto 1/x$ bo $\frac{a_{10}+a_{11}x}{a_{00}+a_{11}x} = \alpha(1 + \beta\frac{1}{x+\gamma})$ dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
(Przekształcenia postaci $a \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ nazywamy homografiami.)

5.10 Przekształcenia liniowe zachowują proporcję $a := \alpha/\beta$, dla $\alpha = a\beta$.
Przekształcenia afiniczne zachowują stosunek $\lambda(p, q, r) := \lambda = \frac{p-r}{p-q}$ gdy $r = (1 - \lambda)p + \lambda q$.

5.11 Niech $L \subset \mathbb{P}(V)$ będzie prostą w przestrzeni rzutowej. Wprowadzamy współrędną na prostej, tzn utożsamić L z $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Dla $p, q, r, s \in \mathbb{K}$ definiujemy dwustosunek:

$$(p, q; r, s) := \frac{\lambda(p, s, r)}{\lambda(q, s, r)} = \frac{p - r}{p - s} \cdot \frac{q - s}{q - r} \in \mathbb{K}.$$

5.12 Tw: Przekształcenia rzutowe zachowują dwustosunek.
(Dw: Bo przekształcenia afiniczne zachowują stosunek trzech punktów na prostej. Wystarczy sprawdzić dla $x \mapsto 1/x$.)

5.13 Przekształcenie liniowe jest wyznaczone przez wartośći na n wektorach liniowo niezależnych $(n = \dim(V))$.

5.14 Przekształcenie afiniczne jest wyznaczone przez wartośći na $n+1$ punktach afinicznie niezależnych $(n = \dim(E))$.

5.15 Niecv $\dim V = n+1$. Punkty $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ są w położeniu ogólnym, gdy żadne $n+1$ z nich nie leży w przestrzeni rzutowej mniejszego wymiaru (Warunek na położenie ogólne w języku przestrzeni liniowych: Niech $L_i = lin\{v_i\}$, $i = 0, 1, \ldots n+1$; zakładamy, że każde $n+1$ wektorów v_i jest liniowo niezależnych.)

5.16 Tw: Przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ jest wyznaczone przez wartości na $n+2$ punktach położeniu ogólnym.

6 c.d.

Dowód: niech $p_i = [\varepsilon_i] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dla $0 \leq i \leq n$ będzie prostą rozpiętą przez standardowy i-ty wektor bazowy $\mathbb{K}^{n+1}$ oraz $p_{n+1} = [1 : 1 : \cdots : 1]$. Dany $q_i = [w_i]$ inny układ prostych, takich, że każde $n+1$ spośród wektorów w_i są liniowo niezależne. Istnieje przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^{n+1}$ przekształcające ε_i na w_i dla $i \leq n$. Dlatego można założyć, że $w_i = \varepsilon_i$ dla $i \leq n$. Niech $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ będą współrzędnymi wektora w_{n+1}. Przekształcenie o macierzy diagonalnej z $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na przekątnej przeprowadza $(1, 1, \ldots, 1)$ na w_{n+1}. Z dokładnością do proporcjonalności przekształcenie to jest jedyne, jeśli ma zachowywać osie w $\mathbb{K}^{n+1}$, a obraz $(1, 1, \ldots, 1)$ ma być proporcjonalny do w_{n+1}.

6.1 Dla $n = 1$, tzn dla $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$, w jezyku przestrzeni liniowych: przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^2$ jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do skalara przez warunek na trójce prostych: $\phi(K) = K'$, $\phi(L) = L'$, $\phi(M) = M'$ (pod warunkiem, że K, L, M są parami różne).

6.2 Twierdzenie Pappusa Aleksandryjskiego 290–350 n.e. (patrz wykład Hitchina poniżej). (Dowód stosujący Tw 5.16.)

6.3 Więcej o przestrzeniach rzutowych
Wykład Hitchina
https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/Projective_geometry/Chapter_1_Projective_geometry.pdf

6.4 Ćwiczenie: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = Sfera/antypodyzm = dysk $\cup$ wtęga Möbusa.

6.5 Zbiory algebraiczne
1) w przestrzeni afinicznej $\mathbb{K}^n$,
2) w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
Podstawianie $x_0 = 1$ w równaniu pozwala przechodzić z 2) do 1)
Przejście 1) do 2): operacja ujednoradniania równań.

6.6 Suma i część wspólna zbiorów algebraicznych jest zbiorem algebraicznym.

6.7 Przykłady:
– krzywe stożkowe,
– krzywe eliptczne w postaci Weierstrassa $y^2 = x^3 + px + q$ (postać rzutowa $x_0 x_2^2 - (x_1^3 + p x_0^2 x_1 + q x_0^3) = 0$).

6.8 Ćwiczenie: dana jest krzywa $Q \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ zadana równaniem $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ (czyli afinicznie równanie okręgu). Podać przekształcenie wielomianowe $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ zadające bijekcję $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \simeq Q$. (Nad dowolnym ciałem !!!)

6.9 Formy jednorodne. Formy kwadratowe = formy jednorodne stopnia 2.

6.10 Twierdzenie: Zakładamy, że charakterystyka ciała jest różna od 2. Dana forma kwadratow f w $\mathbb{K}^n$. Istnieję liniowa zamiana zmiennych w $\mathbb{K}^n$ taka, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$$

przy czym $a_i \neq 0$.

6.11 Wniosek: Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte (wystarczy, że można wyciągać pierwiastki), to

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

w pewnych współrzędnych. Liczba r to rząd formy. Ta liczba w pełni charakteryzuje formę.

6.12

6.13 Wniosek: Jeśli ciało $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r_+} x_i^2 - \sum_{i=1+r_+}^{r} x_i^2$$

w pewnych współrzędnych. Liczba r i r_+ w pełni charakteryzują formę. (To jest twierdzenie o bezwładności, będzie później.)

6.14 Uwaga: dla odmiany klasyfikacja form trzeciego stopnia (dla trzech zmienych) jest o wiele bardziej skomplikowana. Patrz „j-invariant" dla krzywej eliptycznej. Dla postaci Weierstrassa $j = 1728\frac{4p^3}{4p^3+27q^2}$.

6.15 Zadania o przestrzeniach rzutowych:
http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/Przestrzenie_rzutowe-zadania.pdf .
Do zrobienia na ćwiczeniach: zadania 53.3, 53.4, 53.14, 53.16, 53.22(!!!).