TENSORY

W ciągu całego wykładu mieliśmy do czynienia z takimi ogólnymi pojęciami, jak przestrzeń liniowa V nad ciałem $\mathfrak{K}$, dualna do niej przestrzeń V^* form liniowych na V, przestrzeń $\mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$ form dwuliniowych na V, przestrzeń $\mathcal{L}(V)$ (oznaczana też przez $\mathrm{End}(V)$ lub $\mathrm{Hom}(V, V)$) operatorów liniowych na V itp. Wprowadziliśmy nawet w rozdziale 1 (§ 4, p. 1) przestrzenie odwzorowań wieloliniowych. W każdym wypadku obliczenia na elementach przestrzeni V, V^*, $\mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$ stawały się efektywne, gdy wprowadziliśmy bazę w V i opisaliśmy reguły transformacji współrzędnych (wektora, formy liniowej lub dwuliniowej) przy przejściu od jednej bazy do drugiej.

Zamierzamy teraz spojrzeć na wszystkie te pojęcia z jednego punktu widzenia, wprowadzając jednocześnie pewien formalizm (lub porządek), od dawna z powodzeniem stosowany w mechanice, fizyce i geometrii ([1]).

§ 1. WSTĘPNE INFORMACJE O TENSORACH

1. Pojęcie tensora. Rozsądną ogólność w tej dziedzinie można osiągnąć, ograniczając się do rozpatrywania odwzorowań wieloliniowych specjalnego rodzaju.

Definicja 1. Niech $\mathfrak{K}$ będzie ciałem, V — przestrzenią liniową nad $\mathfrak{K}$, V^* — przestrzenią do niej dualną, a p i q — liczbami całkowitymi nieujemnymi. Rozpatrzmy iloczyn kartezjański

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q}$$

p egzemplarzy przestrzeni V oraz q egzemplarzy przestrzeni dualnej V^*. Każde odwzorowanie $(p+q)$-liniowe

---

([1]) W tłumaczeniu tego rozdziału dokonano szeregu drobnych zmian redakcyjnych (*przyp. tłum.*).

$$f : V^p \times (V^*)^q \to \mathfrak{K}$$

nazywamy *tensorem* na V *typu* (p, q) o *walencji* $p + q$ lub *rzędu* $p + q$. Mówimy też, że tensor f jest *p-krotnie kowariantny* i *q-krotnie kontrawariantny*.

Dla $p = 0$ mówimy po prostu o tensorze kontrawariantnym, a dla $q = 0$ – o tensorze kowariantnym; jeśli $p, q \geqslant 1$, to tensor nazywamy *mieszanym*. Ponadto przyjmujemy z definicji, że tensor typu $(0, 0)$ to skalar z ciała $\mathfrak{K}$.

W szczególności tensorami typu $(1, 0)$ są zwykłe formy liniowe na V, czyli elementy przestrzeni V^*, a tensorami typu $(0, 1)$ – formy liniowe na V^*, czyli elementy przestrzeni V^{**}.

Jeśli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa (co w dalszym ciągu zakładamy), to jest refleksywna (rozdz. 1, § 3, twierdzenie 2), tzn. istnieje naturalny izomorfizm między V i V^{**}, pozwalający na utożsamienie każdej formy liniowej $\varphi \in V^{**}$ z pewnym wektorem $\mathbf{x}_\varphi \in V$ (i na odwrót – każdego wektora $\mathbf{x} \in V$ z pewną formą liniową $\varepsilon_\mathbf{x} \in V^{**}$). Utożsamienie to wykorzystywaliśmy już poprzednio, zapisując formy liniowe na V w postaci

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f). \tag{1}$$

Przy ustalonym f wyrażenie to jest formą liniową na V, a przy ustalonym $\mathbf{x}$ formą liniową na V^*. Tensory typu $(0, 1)$ możemy więc uważać za wektory z V.

Z kolei tensor kowariantny typu $(2, 0)$ to forma dwuliniowa na V, a tensor kontrawariantny typu $(0, 2)$ to forma dwuliniowa na V^*.

Rozpatrzmy teraz najprostszy tensor mieszany typu $(1, 1)$. Z definicji jest to funkcja $(\mathbf{x}, u) \mapsto f(\mathbf{x}, u)$, liniowa względem $\mathbf{x} \in V$ i względem $u \in V^*$. Dla każdego ustalonego $\mathbf{x}$ funkcja f jest liniowa względem u, istnieje zatem wektor $\mathcal{F}\mathbf{x} \in V$ taki, że

$$f(\mathbf{x}, u) = (u, \mathcal{F}\mathbf{x}) \tag{2}$$

(zastosowaliśmy zapis (1)). Ponieważ $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, u) = \alpha f(\mathbf{x}, u) + \beta f(\mathbf{y}, u)$ dla dowolnych skalarów α, β, więc

$$(u, \mathcal{F}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})) = \alpha(u, \mathcal{F}\mathbf{x}) + \beta(u, \mathcal{F}\mathbf{y}) = (u, \alpha\mathcal{F}\mathbf{x} + \beta\mathcal{F}\mathbf{y}),$$

a stąd

$$\mathcal{F}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{F}\mathbf{x} + \beta\mathcal{F}\mathbf{y},$$

tj. $\mathcal{F}$ jest operatorem liniowym na V. Na odwrót, dla każdego $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(V)$ wzór (2) określa funkcję $f : V \times V^* \to \mathfrak{K}$, która jest liniowa względem $\mathbf{x} \in V$ i względem $u \in V^*$. Przyporządkowanie $f \mapsto \mathcal{F}$ jest więc bijekcją. Oznacza to, że tensory typu $(1, 1)$ odpowiadają wzajemnie jednoznacznie operatorom liniowym na V.

Jeśli przypomnimy umowę, że tensory typu $(0, 0)$ to dowolne skalary (elementy ciała $\mathfrak{K}$), to widać, że wszystkie tensory rzędu $\leqslant 2$ są nam dobrze znane.

Zbiór $\mathbb{T}_p^q(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Istotnie, jeśli $f, g \in \mathbb{T}_p^q(V)$ oraz $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$, to przez $\alpha f + \beta g$ oznaczamy tensor określony wzorem

$$(\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q) = \alpha f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q) + \beta g(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q). \tag{3}$$

2. Iloczyn tensorowy. Niech najpierw

$$f : V_1 \times \ldots \times V_r \to \mathfrak{K}, \qquad g : W_1 \times \ldots \times W_s \to \mathfrak{K}$$

będą dwiema dowolnymi formami wieloliniowymi; w szczególności, przestrzenie liniowe V_i i W_j nie są ze sobą w żaden sposób powiązane.

Definicja 2. *Iloczynem tensorowym* form f i g nazywamy odwzorowanie

$$f \otimes g : V_1 \times \ldots \times V_r \times W_1 \times \ldots \times W_s \to \mathfrak{K}$$

określone wzorem

$$(f \otimes g)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) = f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) g(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s).$$

Podkreślmy, że zmienne $\mathbf{v}_i$ są niezależne od $\mathbf{w}_j$. Odwzorowanie $f \otimes g$ jest oczywiście wieloliniowe, ponieważ jeśli w powyższym wyrażeniu ustalimy np. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ i $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$, to otrzymamy wielokrotność wyrażenia $g(\mathbf{w}_1, \ldots)$, liniowego względem $\mathbf{w}_1$.

Jeśli w szczególności f i g są formami liniowymi na V, to

$$(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y})$$

jest formą dwuliniową na V specjalnego rodzaju. Już ten prosty przykład pokazuje, że nie ma żadnych podstaw, by się spodziewać równości $f \otimes g = g \otimes f$: wartości

$$(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) \quad \text{i} \quad (g \otimes f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) f(\mathbf{y})$$

są na ogół różne. Dla dowolnych trzech form wieloliniowych zachodzi natomiast prawo łączności

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h), \tag{4}$$

ponieważ jeśli np. $h : U_1 \times \ldots \times U_t \to \mathfrak{K}$, to wartość obu stron dla układu wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t$ wynosi

$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) g(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) h(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t).$$

Niech teraz f będzie tensorem typu (p, q), a g — tensorem typu (r, s) na przestrzeni V. Wtedy $f \otimes g$ jest formą wieloliniową na iloczynie kartezjańskim

$$V^p \times (V^*)^q \times V^r \times (V^*)^s.$$

Iloczyn ten możemy jednak utożsamić z

$$V^{p+r} \times (V^*)^{q+s},$$

i uważać $f \otimes g$ za tensor typu $(p+r, q+s)$ na V, określony wzorem

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p+r}; u_1, \ldots, u_{q+s}) \\ = f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q) g(\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_{p+r}; u_{q+1}, \ldots, u_{q+s})\end{aligned} \tag{5}$$

dla dowolnych $\mathbf{v}_i \in V$ oraz $u_j \in V^*$. W dalszym ciągu na ogół używamy przecinka zamiast średnika pomiędzy argumentami różnych typów.

Definicja 3. Tensor $f \otimes g$ określony wzorem (5) nazywamy *iloczynem tensorowym* tensorów f i g.

Przykład 1. Niech f, g i h będą trzema formami liniowymi na V, a $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ — dwoma wektorami z V. Jak już zauważyliśmy, przy znanych utożsamieniach można uważać, że mamy tu do czynienia z trzema tensorami typu $(1,0)$ i dwoma typu $(0,1)$, można więc rozpatrzyć tensor

$$t = f \otimes g \otimes h \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

typu $(3,2)$. Jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ oraz $u, v \in V^*$, to

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, u, v) = f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) h(\mathbf{z}) \mathbf{a}(u) \mathbf{b}(v),$$

gdzie przez $\mathbf{a}(u)$ i $\mathbf{b}(v)$ należy rozumieć wyrażenia określone wzorem (1): $\mathbf{a}(u) = (\mathbf{a}, u) = (u, \mathbf{a}) = u(\mathbf{a})$.

Ze wzoru (5) i z określenia (3) kombinacji liniowej tensorów wynikają prawa rozdzielności

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g) \otimes h &= \alpha f \otimes h + \beta g \otimes h, \\ h \otimes (\alpha f + \beta g) &= \alpha h \otimes f + \beta h \otimes g.\end{aligned} \tag{6}$$

Podsumujmy:

(a) działanie $\otimes$ jest określone dla tensorów dowolnych typów;
(b) rząd iloczynu tensorowego tensorów jest sumą rzędów czynników;
(c) iloczyn tensorowy jest łączny i rozdzielny względem dodawania, ale nie przemienny.

3. Współrzędne tensora. Rachunek tensorowy w rozumieniu klasycznym rozpoczyna się wtedy, gdy w przestrzeni $\mathbb{T}^q_p(V)$ wybierzemy bazę i opiszemy tensory we współrzędnych. Na ogół w V i V^* wybieramy bazy dualne:

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle, \qquad V^* = \langle e^1, \ldots, e^n \rangle;$$

zwróćmy uwagę na położenie wskaźników oraz na fakt, że formy liniowe (kowektory) oznaczamy jasną czcionką. Położenie wskaźników w oznaczeniach współrzędnych będzie odwrotne, tzn. będziemy pisać $\mathbf{x} = \sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i \in V$ oraz $f = \sum_j \beta_j e^j \in V^*$.

Przypomnijmy, że ponieważ

$$(\mathbf{e}_i, e^j) = (e^j, \mathbf{e}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } i \neq j, \\ 1, & \text{jeśli } i = j, \end{cases} \tag{7}$$

więc (dla powyższych f i $\mathbf{x}$)

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = \sum_i \alpha^i \beta_i.$$

Górnych wskaźników nie należy mylić z wykładnikami potęg; te ostatnie u nas zresztą nie wystąpią.

W rachunku tensorowym często przyjmuje się tzw. *konwencję sumacyjną*: jeśli w danym wyrażeniu występuje ten sam wskaźnik u góry i u dołu, to należy dokonać sumowania względem tego wskaźnika. Na przykład zamiast $\mathbf{x} = \sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i$ pisze się $\mathbf{x} = \alpha^i \mathbf{e}_i$. Nie będziemy stosować tej konwencji; uprościmy jedynie zapis sum wielokrotnych, pisząc niekiedy np.

$$\sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_p} = \sum_i$$

i nie wskazując zakresu sumowania, jeśli jest jasny z kontekstu (najczęściej od 1 do $n = \dim V$).

Jeśli T jest tensorem typu (p, q), to definiujemy

$$T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} := T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_q}). \tag{8}$$

Definicja 4. Skalary $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ nazywamy *współrzędnymi* tensora T w bazie $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Aby nadać tej definicji zwykły sens, wprowadzimy bazę w przestrzeni liniowej $\mathbb{T}_p^q(V)$ tensorów typu (p, q), wyznaczoną przez daną bazę $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ przestrzeni V. Rozpatrzmy mianowicie tensory typu (p, q) postaci

$$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}; \tag{9}$$

podobnie jak poprzednio utożsamiamy tu wektory $\mathbf{e}_j$ z formami liniowymi na V^*: $\mathbf{e}_j(f) = f(\mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j)$. Ponieważ $(e^i, \mathbf{e}_{i'}) = \delta_{i'}^i$ oraz $(\mathbf{e}_k, e^{k'}) = \delta_k^{k'}$, więc

$$\begin{aligned}(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q})&(\mathbf{e}_{i_1'}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p'}, e^{j_1'}, \ldots, e^{j_q'}) \\ &= \delta_{i_1'}^{i_1} \ldots \delta_{i_p'}^{i_p} \delta_{j_1}^{j_1'} \ldots \delta_{j_q}^{j_q'}. \end{aligned} \tag{10}$$

Rozważmy tensor

$$T_1 = \sum_{i,j} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

będący kombinacją liniową tensorów (9) o współczynnikach (8). Wykorzystując równości (3) i (10), otrzymamy

$$T_1(\mathbf{e}_{i_1},\dots,\mathbf{e}_{i_p},e^{j_1},\dots,e^{j_q}) = T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p},$$

czyli tensor T_1 ma te same współrzędne co T. Każdy tensor jest jednak wyznaczony jednoznacznie przez swoje współrzędne: dla dowolnych wektorów

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i_1} \xi^{i_1}\mathbf{e}_{i_1},\ \dots,\ \mathbf{x}_p = \sum_{i_p} \varrho^{i_p}\mathbf{e}_{i_p}$$

oraz form liniowych

$$u^1 = \sum_{j_1} \sigma_{j_1} e^{j_1},\ \dots,\ u^q = \sum_{j_q} \tau_{j_q} e^{j_q}$$

mamy, na mocy wieloliniowości,

$$T(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_p,u^1,\dots,u^q) = \sum_{i,j} T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\xi^{i_1}\dots\varrho^{i_p}\sigma_{j_1}\dots\tau_{j_q}. \tag{11}$$

Wykazaliśmy zatem, że $T = T_1$, czyli jeśli tensor T ma współrzędne (8), to można go przedstawić w postaci

$$T = \sum_{i,j} T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\mathbf{e}_{j_q}. \tag{12}$$

Wynika stąd, że tensory postaci (9) generują przestrzeń liniową $\mathbb{T}^q_p(V)$. Bezpośrednio z (10) wynika również, że tensory te dla różnych układów wskaźników $i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q$ są liniowo niezależne. Istotnie, jeśli założymy, że

$$\sum \lambda^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\mathbf{e}_{j_q} = 0$$

dla pewnych współczynników $\lambda^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} \in \mathfrak{K}$, to postępując z lewą stroną tej równości jak wyżej z tensorem T_1, dojdziemy do wniosku, że $\lambda^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = 0$.

Odnotujmy w szczególności, że każdą formę dwuliniową f można jednoznacznie zapisać w postaci

$$f = \sum_{i,j} f_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Jest to tylko inna postać stosowanego przez nas wcześniej zapisu $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum f_{ij}x_iy_j$, któremu teraz nadalibyśmy zresztą postać $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum f_{ij}x^iy^j$.

Wymiar przestrzeni $\mathbb{T}^q_p(V)$ jest równy liczbie wektorów bazowych (9), czyli wynosi n^{p+q} — tyle jest układów wskaźników $i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q$, z których każdy przebiega, niezależnie od innych, wszystkie wartości od 1 do n. Podobnie jak współrzędne formy dwuliniowej tworzą macierz kwadratową, można sobie wyobrażać, że współrzędne tensora wypełniają tablicę w formie kostki wielowymiarowej, przy czym dla tensora typu (p,q) wymiar kostki wynosi $p+q$.

Podsumujmy powyższe rozważania w postaci twierdzenia:

TWIERDZENIE 1. *Tensory typu (p,q) na przestrzeni liniowej V wymiaru n tworzą przestrzeń liniową $\mathbb{T}^q_p(V)$ wymiaru n^{p+q}, której bazę stanowią tensory*

$$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

gdzie $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jest bazą w V, a $(e^1, \ldots, e^n)$ — dualną do niej bazą w V^*.

Istnieje dokładnie jeden tensor o danych współrzędnych $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$. ∎

4. Tensory w różnych układach współrzędnych. Chcemy teraz znaleźć regułę transformacji współrzędnych tensora przy przejściu od jednej bazy do drugiej. Niech $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ będzie inną bazą przestrzeni V, $(e'^1, \ldots, e'^n)$ — dualną do niej bazą w V^*, a $A = (a^i_j)$ — macierzą przejścia od $(\mathbf{e}_i)$ do $(\mathbf{e}'_i)$. Umawiamy się teraz, że górny wskaźnik wyrazu a^i_j to numer wiersza, a dolny to numer kolumny. Przy tych oznaczeniach

$$\mathbf{e}'_k = \sum_i a^i_k \mathbf{e}_i, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Jeśli oznaczymy przez $B = (b^i_j)$ macierz transponowaną do macierzy przejścia od (e^i) do (e'^i), to (jak łatwo sprawdzić)

$$e'^k = \sum_i b^k_i e^i, \tag{14}$$

co zgadza się z zasadą, że należy sumować po jednakowych wskaźnikach „na różnych piętrach". Wprowadźmy pomocniczą macierz $B^{-1} = C = (c^i_j)$. Wtedy

$$e^k = \sum_i c^k_i e'^i.$$

Wykorzystując własność (7) baz dualnych, otrzymujemy

$$c^k_j = \Big(\sum_i c^k_i e'^i, \mathbf{e}'_j\Big) = (e^k, \mathbf{e}'_j) = \Big(e^k, \sum_i a^i_j \mathbf{e}_i\Big) = a^k_j.$$

Tak więc $C = A$, czyli

$$e^k = \sum_i a^k_i e'^i.$$

Oznacza to, że $B = A^{-1}$; wykazaliśmy więc, że jeśli A jest macierzą przejścia od $(\mathbf{e}_i)$ do $(\mathbf{e}'_i)$, to macierzą przejścia od (e^i) do (e'^i) jest ${}^tB = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$; ostatnią macierz nazywamy *kontragredientną* do A.

Znajdziemy teraz współrzędne $T'^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ tensora T w bazie

$$e'^{i_1} \otimes \ldots \otimes e'^{i_p} \otimes \mathbf{e}'_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'_{j_q}.$$

Z definicji (zob. (8)) oraz ze wzorów (13) i (14) wynika, że

$$\begin{aligned} T &= \sum T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes \mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q} \\ &= \sum T'^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p} e'^{i'_1}\otimes\ldots\otimes e'^{i'_p}\otimes \mathbf{e}'_{j'_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}'_{j'_q} \\ &= \sum\Big(\sum b^{i'_1}_{i_1}\ldots b^{i'_p}_{i_p} T'^{j'_1\ldots j'_p}_{i'_1\ldots i'_p} a^{j_1}_{j'_1}\ldots a^{j_q}_{j'_q}\Big) e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q}. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem

TWIERDZENIE 2. *Przy przejściu od jednej pary baz dualnych* $(\mathbf{e}_i)$, (e^i) *w przestrzeniach* V *i* V^* *do innej za pomocą wzorów* (13) *i* (14) *współrzędne tensora* T *typu* (p,q) *transformują się następująco:*

$$T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \sum_{i',j'} b^{i'_1}_{i_1}\ldots b^{i'_p}_{i_p} T'^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p} a^{j_1}_{j'_1}\ldots a^{j_q}_{j'_q}. \tag{15}$$

Mówimy, że we wzorze (15) macierz $A = (a^i_j)$ *działa na górne wskaźniki* współrzędnych tensora, a macierz $B = (b^i_j) = A^{-1}$ *działa na dolne wskaźniki*.

Możemy teraz inaczej sformułować definicję tensora: tensorem typu (p,q) na przestrzeni V nazywamy przyporządkowanie T, które każdej bazie przestrzeni V przypisuje układ n^{p+q} skalarów $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$, przy czym układy odpowiadające różnym bazom spełniają zależności (15).

Działania na tensorach, opisane poprzednio za pomocą form wieloliniowych, można teraz łatwo opisać we współrzędnych. Jeśli np. S i T są dwoma tensorami tego samego typu, to ich kombinacja liniowa $\alpha S+\beta T$ ma współrzędne

$$\alpha S^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + \beta T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}.$$

Iloczynem tensorowym dowolnych tensorów $(Q^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p})$ i $(R^{l_1\ldots l_t}_{k_1\ldots k_s})$ jest tensor o współrzędnych

$$T^{j_1\ldots j_q l_1\ldots l_t}_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_s} = Q^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} R^{l_1\ldots l_t}_{k_1\ldots k_s}. \tag{16}$$

Widać od razu, że wyrażenie to transformuje się zgodnie ze wzorem (15) polega to jedynie na odpowiednim „rozprowadzeniu" czynników $a^j_{j'}$ i $b^{j'}_j$ pomiędzy współrzędnymi Q i R po prawej stronie.

Przykład 2. Niech $\mathcal{F}$ będzie operatorem liniowym na V. Jak widzieliśmy (przykład 1), można go interpretować jako tensor typu $(1,1)$. Zgodność obu ujęć widać również w zapisie we współrzędnych. Jeśli $V = \langle \mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ i $\mathcal{F}\mathbf{e}_k = \sum_i f^i_k \mathbf{e}_i$, to po przejściu do nowej bazy za pomocą wzorów

$$\mathbf{e}'_k = \sum_i a^i_k \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}_k = \sum_i b^i_k \mathbf{e}'_i, \qquad \sum_i b^i_k a^l_i = \delta^l_k$$

...ymamy

$$\sum_s f'^s_k \mathbf{e}'_s = \mathcal{F}\mathbf{e}'_k = \sum_i a^i_k \mathcal{F}\mathbf{e}_i = \sum_{i,j} a^i_k f^j_i \mathbf{e}_j = \sum_{i,j,s} a^i_k f^j_i b^s_j \mathbf{e}'_s,$$

...yli

$$f'^s_k = \sum_{i,j} a^i_k f^j_i b^s_j. \tag{17}$$

...est to dokładnie reguła transformacji tensora $F = (f^i_j)$ jednokrotnie ko...wariantnego i jednokrotnie kontrawariantnego. Ten sam wzór wystąpił już ...poprzednio w innych oznaczeniach, jako prawo transformacji macierzy prze...kształcenia liniowego przy zmianie bazy.

W fizyce i matematyce tensory występują najczęściej jako układy wielkości różnej natury, spełniające prawo transformacji (15). W fizyce ważne są ponadto nie same tensory, ale pola tensorowe (tensor krzywizny, tensor pola grawitacyjnego itp.). Najprościej mówiąc, *polem tensorowym* na przestrzeni V nazywamy odwzorowanie przestrzeni V w zbiór wszystkich tensorów ustalonego typu na V. Szczegóły można znaleźć w podręczniku [2] (część 4, § 8).

5. Iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych. Operacja iloczynu tensorowego tensorów ma naturalne uogólnienie, o rozlicznych zastosowaniach w geometrii różniczkowej, teorii reprezentacji grup i fizyce matematycznej. Nie dążąc do maksymalnej ogólności, z której pożytek byłby wątpliwy (a gdyby się nawet przydała, to po co wprowadzać ją przedwcześnie?), ograniczymy się do jednej, dostatecznie interesującej konstrukcji iloczynu tensorowego skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych. Konstrukcja ta znajdzie zastosowanie w części III.

TWIERDZENIE 3. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathfrak{K}$. Wtedy istnieje przestrzeń liniowa T nad $\mathfrak{K}$ oraz odwzorowanie dwuliniowe $\tau : V \times W \to T$ o następujących własnościach:*

(T1) *jeśli* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ *są liniowo niezależne oraz* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in W$, *to*

$$\sum_{i=1}^k \tau(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{w}_k = \mathbf{0};$$

(T2) *jeśli* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in W$ *są liniowo niezależne oraz* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, *to*

$$\sum_{i=1}^k \tau(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{v}_k = \mathbf{0};$$

(T3) *obraz odwzorowania* τ *generuje przestrzeń* T:

$$T = \langle \tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \rangle_{\mathfrak{K}}.$$

Ponadto para (T, τ) ma następującą własność uniwersalności: jeśli T' jest dowolną przestrzenią liniową, a $\tau' : V \times W \to T'$ — odwzorowaniem dwuliniowym, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\sigma : T \to T'$ spełniające warunek $\tau' = \sigma \circ \tau$, czyli

$$\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w})), \qquad \mathbf{v} \in V, \ \mathbf{w} \in W.$$

Para (T, τ) jest wyznaczona jednoznacznie w tym sensie, że jeśli (T, τ) i (T', τ') są dwiema parami o powyższych własnościach, to odwzorowanie σ, o którym wyżej mowa, jest izomorfizmem.

Dowód. Poniżej podajemy jedynie szkic rozumowania.

(a) Jeśli $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ i $W = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle$, to warunki (T1)–(T3) sprowadzają się do jednego: wektory $\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$, gdzie $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, m$, stanowią bazę przestrzeni T.

(b) Jeśli T jest dowolną przestrzenią wymiaru nm z bazą $\mathbf{t}_{ij}$ ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$) i określimy odwzorowanie $\tau : V \times W \to T$ wzorem

$$\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{t}_{ij} \qquad \text{dla } \mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i, \ \mathbf{w} = \sum_j \beta_j \mathbf{f}_j,$$

to para (T, τ) spełnia warunki (T1)–(T3) (na podstawie (a)).

(c) Jeśli (T, τ) jest parą opisaną w punkcie (b), a $\tau' : V \times W \to T'$ dowolnym odwzorowaniem dwuliniowym, to definiujemy przekształcenie liniowe $\sigma : T \to T'$, przyjmując

$$\sigma\Big(\sum \gamma_{ij} \mathbf{t}_{ij}\Big) = \sum \gamma_{ij} \tau'(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j), \qquad \gamma_{ij} \in \mathfrak{K}.$$

Zgodnie z (b) mamy (dla powyższych wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$)

$$\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum \alpha_i \beta_j \tau'(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \sigma\Big(\sum \alpha_i \beta_j \mathbf{t}_{ij}\Big) = \sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w})).$$

Na odwrót, jeśli $\sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, to $\sigma(\mathbf{t}_{ij}) = \sigma(\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)) = \tau'(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$, czyli przekształcenie σ jest wyznaczone jednoznacznie przez τ'.

(d) Jeśli (T, τ) i (T', τ') są dwiema parami uniwersalnymi, to przekształcenia liniowe $\sigma : T \to T'$ i $\sigma' : T' \to T$, istniejące na mocy własności uniwersalnej, są w istocie wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami: $\sigma' \circ \sigma = e_T$, $\sigma \circ \sigma' = e_{T'}$ [1]. ■

DEFINICJA 5. Parę (T, τ), o której mowa w twierdzeniu 3, wyznaczoną jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu przez przestrzenie liniowe V i W, nazywamy *iloczynem tensorowym* tych przestrzeni.

([1]) Warto przytoczyć ten (prosty) dowód: na podstawie własności uniwersalnej mamy $\tau' = \sigma \circ \tau$ oraz $\tau = \sigma' \circ \tau'$; stąd np. $\tau = (\sigma' \circ \sigma) \circ \tau$; mamy jednak również oczywiście $\tau = e_T \circ \tau$ i z jednoznaczności, o której mowa we własności uniwersalnej, wynika, że $\sigma' \circ \sigma = e_T$. Dowód drugiej równości jest analogiczny (*przyp. tłum.*).

Można wykazać, że w układzie warunków (T1)–(T3) można opuścić (T1) lub (T2), a jeśli a priori przyjmiemy, że $\dim T = nm$, to wystarczy którykolwiek z tych trzech warunków.

Piszemy $T = V \otimes_{\mathfrak{K}} W$ lub po prostu $T = V \otimes W$; odwzorowanie dwuliniowe $\tau : V \times W \to T$ zapisujemy jako $\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) =: \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$. Element postaci $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ nazywamy *tensorem prostym*. Przestrzeń $V \otimes W$ składa się z kombinacji liniowych tensorów prostych $\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i$, gdzie $\mathbf{v}_i \in V$, $\mathbf{w}_i \in W$ oraz $\alpha_i \in \mathfrak{K}$, przy czym zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}, \\ &\lambda\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{v} \otimes \lambda\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{0}, \qquad \lambda \in \mathfrak{K}.\ (^1) \end{aligned} \tag{18}$$

Bezpośrednio z twierdzenia 3 wynika, że odwzorowania bijektywne $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$, $\mathbf{v} \otimes \lambda \mapsto \lambda \otimes \mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$ wyznaczają następujące izomorfizmy, zwane *kanonicznymi*:

$$\begin{gathered} V \otimes W \cong W \otimes V, \\ (U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W), \\ V \otimes \mathfrak{K} \cong \mathfrak{K} \otimes V \cong V \end{gathered}$$

(izomorfizmów nie można tu zastąpić równościami). Zachodzą też prawa rozdzielności

$$\begin{gathered} (U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W), \\ U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W). \end{gathered}$$

Możemy teraz (²) zinterpretować tensory typu (p, q), rozpatrywane w punktach 1–3 tego paragrafu, jako elementy iloczynów tensorowych odpowiednich przestrzeni: istnieje izomorfizm kanoniczny

$$\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q} \to \mathbb{T}^q_p(V),$$

przyporządkowujący tensorowi prostemu

$$f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_q, \qquad f^i \in V^*,\ \mathbf{v}_j \in V,$$

(¹) Własności te można też sformułować następująco: jeśli Z oznacza zbiór wszystkich formalnych kombinacji liniowych par uporządkowanych postaci $\sum_i \alpha_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i)$, gdzie $\mathbf{v}_i \in V$, $\mathbf{w}_i \in W$, $\alpha_i \in \mathfrak{K}$ i prawie wszystkie α_i są zerami, z oczywistą strukturą przestrzeni liniowej, a $N \subset Z$ – podprzestrzeń generowaną przez wszystkie kombinacje postaci $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ itd., odpowiadające lewym stronom równości (18), to iloczyn tensorowy $V \otimes W$ jest izomorficzny z przestrzenią ilorazową Z/N. Za pomocą tej konstrukcji można wykazać, że iloczyn tensorowy istnieje dla dowolnych przestrzeni liniowych, również nieskończenie wymiarowych (*przyp. tłum.*).

(²) Ten akapit dodano w tłumaczeniu (*przyp. tłum.*).

odwzorowanie wieloliniowe $T : V^p \times (V^*)^q \to \mathfrak{K}$ określone wzorem

$$T(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, g^1, \ldots, g^q) = f^1(\mathbf{u}_1) \ldots f^p(\mathbf{u}_p) \cdot g^1(\mathbf{v}_1) \ldots g^q(\mathbf{v}_q).$$

Niekiedy p-krotny iloczyn tensorowy $V \otimes \ldots \otimes V$ nazywa się *p-krotną potęgą tensorową* przestrzeni V i oznacza przez $V^{\otimes p}$; wtedy powyższy izomorfizm można zapisać jako

$$\mathbb{T}^q_p(V) \cong (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}.$$

Kolejnym krokiem rozważanej konstrukcji powinno być włączenie do niej operatorów liniowych:

DEFINICJA 6. Niech $\mathcal{A} : V \to V$ i $\mathcal{B} : W \to W$ będą operatorami liniowymi. Ich *iloczynem tensorowym* nazywamy operator

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : V \otimes W \to V \otimes W$$

spełniający warunek

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathcal{A}\mathbf{v} \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}. \tag{19}$$

Istnienie i jednoznaczność operatora $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ wynikają z twierdzenia 3, ponieważ odwzorowanie $\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{A}\mathbf{v} \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}$ jest dwuliniowe.

Odnotujmy także związki wynikające z definicji (19):

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) = \mathcal{AC} \otimes \mathcal{BD},\\
&(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{B},\\
&\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{D},\\
&\mathcal{A} \otimes \lambda\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Sprawdzenie tych związków pozostawiamy Czytelnikowi.

Niech, jak poprzednio, $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ i $W = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle$. Znajdziemy teraz macierz $A \otimes B$ wymiarów $nm \times nm$ operatora $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ w bazie

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_m, \ldots, \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_m).$$

Jeśli

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \sum_{i'} a_{i'i}\mathbf{e}_{i'}, \qquad \mathcal{B}\mathbf{f}_j = \sum_{j'} b_{j'j}\mathbf{f}_{j'},$$

to

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) = \sum_{i',j'} a_{i'i}b_{j'j}\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{f}_{j'}.$$

Oznacza to, że jeśli $A = (a_{i'i})$ i $B = (b_{j'j})$, to

$$A \otimes B = (a_{i'i}b_{j'j}) = \left\| \begin{matrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B \end{matrix} \right\|. \tag{20}$$

W szczególności dla śladu otrzymujemy równość

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = a_{11} \operatorname{tr} B + \ldots + a_{nn} \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B. \tag{21}$$

Odnotujmy również, że

$$\begin{aligned}\det(A \otimes B) &= \det((A \otimes E_m)(E_n \otimes B)) \\ &= \det(A \otimes E_m) \cdot \det(E_n \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n,\end{aligned} \tag{22}$$

a więc nieosobliwość operatorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ implikuje nieosobliwość ich iloczynu tensorowego $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Równości (21) i (22) znajdują zastosowanie w teorii reprezentacji grup.

ĆWICZENIA

1. (*Symbol Kroneckera*). Sprawdzić, że δ_i^j jest tensorem z $\mathbb{T}_1^1(V)$, reprezentującym operator tożsamościowy na (dowolnej) przestrzeni liniowej V.

2. (*Tensor metryczny*). Niech $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}$ będzie przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} g_{ij} x^i x^j, \qquad g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Tak więc g jest dodatnio określoną, symetryczną formą dwuliniową na V (użyliśmy tu litery g i symboli g_{ij}, zgodnie z tradycją przyjętą w geometr różniczkowej). Formę $g : V \times V \to \mathbb{R}$, czyli tensor (g_{ij}), przyjęto nazywać *ten sorem metrycznym* przestrzeni V; jest to więc tensor kowariantny typu (2, 0 Inaczej mówiąc, współrzędne tensora metrycznego w danej bazie to element macierzy Grama dla tej bazy.

Przypomnijmy teraz, że przestrzeń euklidesową można w kanoniczny sp sób utożsamić z jej przestrzenią dualną V^* (za pomocą odwzorowania $\mathbf{v}$ ↦ $(* \mid \mathbf{v})$; zob. rozdz. 3, § 1, twierdzenie 7). W ten sposób g wyznacza odwzor wanie $g : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$, czyli tensor kontrawariantny na V typu (0, 2). Nie (e^j) oznacza jak zwykle bazę dualną do $(\mathbf{e}_i)$. Wtedy $g^{ij} = g(e^i, e^j)$ są wsp rzędnymi tego tensora kontrawariantnego. Wykazać, że macierze $G_0 = (g$ i $G^0 = (g^{ij})$ są wzajemnie odwrotne, tj.

$$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i.$$

3. (*Rozszerzenie ciała skalarów*). Niech V będzie rzeczywistą przestrzeni niową z bazą $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, a $V^{\mathbb{C}}$ — jej kompleksyfikacją (rozdz. 3, § 4, p Ponieważ ciało $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ z bazą $(1, i)$, możemy patrzyć iloczyn tensorowy

$$\mathbb{C} \otimes V = \langle 1 \otimes \mathbf{e}_1, \ldots, 1 \otimes \mathbf{e}_n, i \otimes \mathbf{e}_1, \ldots, i \otimes \mathbf{e}_n \rangle.$$

Zauważyć, że przyporządkowanie

$$1 \otimes \mathbf{e}_k \mapsto \mathbf{e}_k, \qquad i \otimes \mathbf{e}_k \mapsto i\mathbf{e}_k$$

wyznacza izomorfizm $\mathbb{R}$-liniowy przestrzeni $\mathbb{C} \otimes V$ i $V^{\mathbb{C}}$.

Ogólnie, niech $\mathfrak{K}$ będzie podciałem ciała $\mathfrak{L}$, a V — przestrzenią liniową nad $\mathfrak{K}$. Uważając $\mathfrak{L}$ za przestrzeń liniową nad ciałem $\mathfrak{K}$, tworzymy iloczyn tensorowy $\mathfrak{L} \otimes_{\mathfrak{K}} V$ [1]. Określamy w nim strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathfrak{L}$, definiując mnożenie przez skalary $a \in \mathfrak{L}$ na tensorach prostych wzorem

$$a(b \otimes \mathbf{x}) = (ab) \otimes \mathbf{x}, \qquad a, b \in \mathfrak{L}, \qquad \mathbf{x} \in V.$$

Wykazać poprawność tej definicji.

4. Udowodnić, że jeśli $\dim V > 1$ i $\dim W > 1$, to w iloczynie tensorowym $V \otimes W$ istnieją elementy, które nie są tensorami prostymi, tzn. nie można ich przedstawić w postaci $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$.

5. Niech A i B będą odwracalnymi macierzami kwadratowymi. Znaleźć macierz odwrotną do $A \otimes B$.

6. Porównać macierz

$$\begin{Vmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \dots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \dots & b_{2m}A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \dots & b_{mm}A \end{Vmatrix}$$

z macierzą klatkową (20).

7. Udowodnić równość (22) dla zespolonych macierzy kwadratowych stopni odpowiednio n i m, wykorzystując możliwość sprowadzenia ich do postaci trójkątnej.

§ 2. KONTRAKCJA, SYMETRYZACJA I ANTYSYMETRYZACJA TENSORÓW

1. Kontrakcja tensora. Jednym z niezmienników operatora liniowego $\mathcal{F} : V \to V$ o macierzy $F = (f^i_j)$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ jest jego ślad

$$\operatorname{tr} \mathcal{F} = \sum_i f^i_i$$

---

[1] Zauważmy, że wymiar przestrzeni $\mathfrak{L}$ nad $\mathfrak{K}$ może być nieskończony; wystarczy wziąć np. $\mathfrak{K} = \mathbb{Q}$ i $\mathfrak{L} = \mathbb{Q}(x)$, ciało funkcji wymiernych. Istnienie iloczynu tensorowego dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych uzasadniliśmy w przypisie na str. 267 (*przyp. tłum.*).

(rozdz. 2, § 2, p. 4). Niezmienniczość śladu, tzn. jego niezależność od wyboru bazy, wynika również łatwo z prawa (17) transformacji tensora (f^i_j) typu $(1,1)$:

$$\sum_k f'^k_k = \sum_{i,j,k} a^i_k f^j_i b^k_j = \sum_{i,j} f^j_i \sum_k b^k_j a^i_k = \sum_{i,j} f^j_i \delta^i_j = \sum_i f^i_i = \operatorname{tr} \mathcal{F}.$$

Uogólnieniem śladu w analizie tensorowej jest operacja kontrakcji tensora. Operacja ta, dla ustalonej pary wskaźników $r \in \{1,\dots,p\}$ i $s \in \{1,\dots,q\}$, przyporządkowuje każdemu tensorowi mieszanemu typu (p,q) na przestrzeni liniowej V pewien tensor $\overline{T}$ typu $(p-1, q-1)$. Aby go określić, można przyjąć, iż $\overline{T}$ jako odwzorowanie wieloliniowe działa na układy $(p-1)+(q-1)$ argumentów postaci

$$\mathbf{x}_1,\dots,\widehat{\mathbf{x}}_r,\dots,\mathbf{x}_p, u^1,\dots,\widehat{u}^s,\dots,u^q, \tag{$*$}$$

gdzie $\mathbf{x}_i \in V$ i $u^j \in V^*$ (jak zwykle, daszki oznaczają, że $\mathbf{x}_r$ i u^s należy opuścić). Ustalmy taki układ argumentów; jest to więc „układ p wektorów i q form, w którym nie ma r-tego wektora i s-tej formy". Zapełniając te dwa wolne miejsca, otrzymujemy formę dwuliniową $f : V \times V^* \to \mathfrak{K}$:

$$f(\mathbf{x}, u) := T(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r,\dots,\mathbf{x}_p, u^1,\dots,u^s,\dots,u^q), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{x}_r := \mathbf{x},\ u^s := u.$$

DEFINICJA 1. Sumę

$$\overline{T} = \sum_k f(\mathbf{e}_k, e^k) \tag{1}$$

nazywamy *kontrakcją* tensora T względem r-tego wskaźnika kowariantnego i s-tego wskaźnika kontrawariantnego.

Przypominamy, że (e^j) jest bazą w V^* dualną do bazy $(\mathbf{e}_i)$ w V. Każdy składnik sumy (1) jest formą $(p+q-2)$-liniową zmiennych $(*)$, zależną od wyboru bazy $(\mathbf{e}_i)$. Udowodnimy jednak, że $\overline{T}$ nie zależy od wyboru bazy. Istotnie, jeśli $\mathbf{e}'_k = \sum_i a^i_k \mathbf{e}_i$ i $A = (a^i_k)$, to $e'^k = \sum_i b^k_i e^i$, gdzie $B = (b^k_i) = A^{-1}$ (§ 1, p. 4). Wobec tego

$$\sum_k f(\mathbf{e}'_k, e'^k) = \sum_{i,j,k} a^i_k b^k_j f(\mathbf{e}_i, e^j) = \sum_{i,j} \Big(\sum_k b^k_j a^i_k\Big) f(\mathbf{e}_i, e^j)$$
$$= \sum_{i,j} \delta^i_j f(\mathbf{e}_i, e^j) = \sum_i f(\mathbf{e}_i, e^i) = \overline{T},$$

co dowodzi niezmienniczości $\overline{T}$. Jak wiemy (§ 1, (2)), formę dwuliniową f można przedstawić w postaci

$$f(\mathbf{x}, u) = (u, \mathcal{F}\mathbf{x}),$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest operatorem liniowym na V, zależnym od zmiennych $(*)$. Widać, że $\overline{T} = \operatorname{tr} \mathcal{F}$, co jeszcze raz dowodzi niezmienniczości $\overline{T}$, a także wiąże operację kontrakcji i śladu.

Oznaczając operację kontrakcji względem pary wskaźników r, s przez tr_r^s otrzymujemy przekształcenie liniowe

$$\mathrm{tr}_r^s : \mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V).$$

W języku iloczynów tensorowych (§ 1, p. 5) mamy więc odwzorowanie

$$\mathrm{tr}_r^s : (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to (V^*)^{\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1},$$

które, jak nietrudno sprawdzić, przeprowadza tensor prosty

$$R = f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_q, \qquad f^i \in V^*, \ \mathbf{v}_j \in V,$$

na tensor

$$\mathrm{tr}_r^s(R) = (f^r, \mathbf{v}_s) f^1 \otimes \ldots \otimes \widehat{f^r} \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{v}}_s \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_q.$$

Wykorzystując fakt, że $(e^r, \mathbf{e}_s) = \delta_s^r$, wyrazimy teraz operację kontrakcji we współrzędnych. Jeśli

$$T = \sum_{i,j} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

(§ 1, (12)), to

$$\begin{aligned}
\overline{T} = \mathrm{tr}_r^s(T) &= \sum_{i,j} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \mathrm{tr}_r^s(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}) \\
&= \sum_{i,j} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \delta_{j_s}^{i_r} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q} \\
&= \sum_{i,j} \overline{T}_{i_1 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p}^{j_1 \ldots \hat{j}_s \ldots j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\overline{T}_{i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \ldots j_q} = \sum_k T_{i_1 \ldots i_{r-1} k i_{r+1} \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_{s-1} k j_{s+1} \ldots j_q}. \tag{2}$$

Ponieważ wiemy, że tensory proste

$$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V)$, więc wzór (2) określa współrzędne tensora $\overline{T}$. Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 1. *Kontrakcja względem r-tego wskaźnika kowariantnego i s-tego wskaźnika kontrawariantnego przeprowadza tensor mieszany T typu (p, q) na tensor $\overline{T}$ typu $(p-1, q-1)$ o współrzędnych określonych wzorem* (2).

Jeśli tensor $\overline{T}$ jest nadal tensorem mieszanym (tzn. $p-1, q-1 \geqslant 1$), to można do niego znowu zastosować kontrakcję względem pewnej pary wskaźników. W wyniku wykonania m kolejnych kontrakcji, gdzie $m = \min(p, q)$, otrzymamy tensor.

na którym nie można już wykonać kontrakcji. Mówimy wtedy o *pełnej kontrakcji* tensora. Przykładem pełnej kontrakcji jest wzięcie śladu operatora. Z kolei złożenie operatorów liniowych to (niepełna) kontrakcja ich iloczynu tensorowego. Istotnie, jeśli $A = (a^i_j)$ oraz $B = (b^k_l)$ to macierze tych operatorów w dowolnej bazie, to iloczynem tensorowym tensorów (a^i_j) i (b^k_l) jest tensor o współrzędnych

$$T^{ik}_{jl} = a^i_j b^k_l.$$

Jeśli dokonamy jego kontrakcji względem wskaźnika kowariantnego tensora A i wskaźnika kontrawariantnego tensora B, otrzymamy tensor $C = (c^i_l)$, gdzie

$$c^i_l = \sum_j T^{ij}_{jl} = \sum_j a^i_j b^j_l.$$

Widać, że c^i_l jest wyrazem iloczynu macierzy AB.

Powyższy przykład ilustruje często stosowaną operację, która polega na wzięciu iloczynu tensorowego dwóch tensorów (niebędących jednocześnie kowariantnymi lub kontrawariantnymi), a następnie dokonaniu kontrakcji względem jednej lub kilku par wskaźników.

2. Tensor strukturalny algebry. Niech V będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem $\mathfrak{K}$ (rozdz. 2, § 2, definicja 1); mnożenie w V oznaczamy przez $a * b$, przy czym nie zakładamy, że jest ono łączne. Jeśli $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jest bazą w V, to

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = \sum_k \gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k.$$

Definicja 2. Skalary γ^k_{ij} nazywamy *stałymi strukturalnymi* algebry V w bazie $(\mathbf{e}_i)$.

Ponieważ działanie mnożenia w V jest dwuliniowe, więc mnożenie w algebrze V jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie dowolnej bazy i stałych strukturalnych w tej bazie. Znajdziemy teraz związek stałych strukturalnych w różnych bazach. Jeśli

$$\mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \sum_k \gamma'^k_{ij} \mathbf{e}'_k,$$

gdzie

$$\mathbf{e}'_i = \sum_s a^s_i \mathbf{e}_s, \qquad \mathbf{e}_j = \sum_t b^t_j \mathbf{e}'_t,$$

czyli $B = (b^t_j) = A^{-1}$, $A = (a^s_i)$, to

$$\sum_k \gamma'^k_{ij} \mathbf{e}'_k = \mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \Big(\sum_s a^s_i \mathbf{e}_s\Big) * \Big(\sum_t a^t_j \mathbf{e}_t\Big)$$

$$= \sum_{s,t} a^s_i a^t_j \mathbf{e}_s * \mathbf{e}_t = \sum_{s,t,r} a^s_i a^t_j \gamma^r_{st} \mathbf{e}_r = \sum_{s,t,r,k} a^s_i a^t_j \gamma^r_{st} b^k_r \mathbf{e}'_k.$$

a zatem

$$\gamma'^k_{ij} = \sum_{s,t,r} a^s_i a^t_j \gamma^r_{st} b^k_r.$$

Porównując tę równość z ogólnym wzorem (15) z § 1, widzimy, że stałe strukturalne transformują się tak jak współrzędne tensora typu $(2, 1)$. Mamy więc prawo mówić o *tensorze strukturalnym* $\Gamma = (\gamma^k_{ij})$ algebry V. Podanie tego tensora wyznacza całkowicie strukturę algebry w przestrzeni liniowej V.

Dla ustalonego $\mathbf{a} \in V$ rozpatrzmy odwzorowanie $L_\mathbf{a} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} * \mathbf{x}$, będące oczywiście operatorem liniowym na V. Ważnym instrumentem służącym do badania struktury algebry V jest jej *forma śladu*, symetryczna forma dwuliniowa na V określona wzorem

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{tr} L_\mathbf{a} L_\mathbf{b}. \tag{3}$$

Dwuliniowość odwzorowania f_V wynika z dwuliniowości działania $*$, a symetryczność — z własności $\operatorname{tr} \mathcal{A}\mathcal{B} = \operatorname{tr} \mathcal{B}\mathcal{A}$ (rozdz. 2, § 2, (12′)). Zapiszemy tę formę we współrzędnych: jeśli

$$\mathbf{a} = \sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{b} = \sum_i \beta^i \mathbf{e}_i,$$

to

$$L_\mathbf{a} L_\mathbf{b} \mathbf{e}_k = \mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \mathbf{e}_i * (\mathbf{e}_j * \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j,s} \alpha^i \beta^j \gamma^s_{jk} \gamma^t_{is} \mathbf{e}_t.$$

Aby znaleźć $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, należy dodać wszystkie elementy diagonalne macierzy $R = (R^t_k)$, gdzie

$$R^t_k = \sum_{i,j,s} \alpha^i \beta^j \gamma^s_{jk} \gamma^t_{is},$$

a więc

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j,s,t} \alpha^i \beta^j \gamma^s_{jk} \gamma^t_{is}. \tag{4}$$

Jak się należało spodziewać, zapisaliśmy formę f_V w postaci pełnej kontrakcji pewnego tensora.

Przykład 1. Duże znaczenie w mechanice i fizyce ma trójwymiarowa rzeczywista algebra Liego $V = \mathbb{R}^3$ (rozdz. 2, § 2, przykład 6), w której mnożenie $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} * \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ jest iloczynem wektorowym: jeśli $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ jest bazą standardową, to

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3, \qquad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \qquad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1.$$

Tutaj $\gamma^k_{ij} \neq 0$ tylko wtedy, gdy wskaźniki i, j, k są różne, przy czym $\gamma^k_{ji} = -\gamma^k_{ij}$. Dla dowolnych wektorów

$$\mathbf{a} = \alpha^1 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2 + \alpha^3 \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{b} = \beta^1 \mathbf{e}_1 + \beta^2 \mathbf{e}_2 + \beta^3 \mathbf{e}_3$$

ich iloczyn skalarny oblicza się według znanego wzoru

$$(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b}) = \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3, \tag{5}$$

a iloczyn w algebrze V — według wzoru

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = (\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)\mathbf{e}_1 + (\alpha^3\beta^1 - \alpha^1\beta^3)\mathbf{e}_2 + (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)\mathbf{e}_3. \tag{6}$$

Warto zwrócić uwagę, że w fizyce jest to wzór na wektor momentu siły $\mathbf{b}$ względem punktu $\dot{p}$, jeśli siła ta jest przyłożona w punkcie $\dot{p}+\mathbf{a}$.

Wykorzystując wzór (6), można bezpośrednio sprawdzić, że iloczyn skalarny (5) ma własność „łączności"

$$([\mathbf{a},\mathbf{b}]\,|\,\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\,|\,[\mathbf{b},\mathbf{c}]). \tag{7}$$

Ten piękny związek jest w gruncie rzeczy konsekwencją łączności formy śladu w dowolnej skończenie wymiarowej algebrze Liego:

$$f_V([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = f_V(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]). \tag{8}$$

Aby udowodnić (8), zauważmy, że tożsamość Jacobiego

$$[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] + [[\mathbf{z},\mathbf{x}],\mathbf{y}] + [[\mathbf{y},\mathbf{z}],\mathbf{x}] = 0,$$

przepisana w postaci

$$[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] = [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]],$$

oznacza, że

$$L_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]} = L_\mathbf{x}L_\mathbf{y} - L_\mathbf{y}L_\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x},\mathbf{y}\in V.$$

Ponieważ $\operatorname{tr}\mathcal{AB} = \operatorname{tr}\mathcal{BA}$, więc biorąc najpierw $\mathcal{A} = L_\mathbf{b}L_\mathbf{a}$, $\mathcal{B} = L_\mathbf{c}$, a następnie $\mathcal{A} = L_\mathbf{c}L_\mathbf{b}$, $\mathcal{B} = L_\mathbf{a}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_V([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) &= \operatorname{tr} L_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}L_\mathbf{c} = \operatorname{tr}(L_\mathbf{a}L_\mathbf{b}L_\mathbf{c} - L_\mathbf{b}L_\mathbf{a}L_\mathbf{c}) \\ &= \operatorname{tr} L_\mathbf{a}L_\mathbf{b}L_\mathbf{c} - \operatorname{tr} L_\mathbf{c}L_\mathbf{b}L_\mathbf{a} \\ &= \operatorname{tr} L_\mathbf{a}L_\mathbf{b}L_\mathbf{c} - \operatorname{tr} L_\mathbf{a}L_\mathbf{c}L_\mathbf{b} \\ &= \operatorname{tr} L_\mathbf{a}(L_\mathbf{b}L_\mathbf{c} - L_\mathbf{c}L_\mathbf{b}) \\ &= \operatorname{tr} L_\mathbf{a}L_{[\mathbf{b},\mathbf{c}]} = f_V(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]), \end{aligned}$$

co kończy dowód równości (8).

Równoważność (7) i (8) dla rozpatrywanej algebry łatwo wynika z obliczenia $f_V(\mathbf{a},\mathbf{b})$ we współrzędnych (równość (4)):

$$f_V(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -2(\alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3) = -2(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b}).$$

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że własność (7) można przepisać w postaci

$$(L_\mathbf{a}\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) + (\mathbf{x}\,|\,L_\mathbf{a}\mathbf{y}) = 0,$$

oznaczającej, że operator $L_{\mathbf{a}}$ jest antysymetryczny w przestrzeni euklidesowej $(V, (* \mid *))$ (rozdz. 3, § 3, definicja 2). Okazuje się, że źródła tego faktu tkwią w związku algebry Liego V z grupą ortogonalną $O_3(\mathbb{R})$, czyli grupą operatorów $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniających warunek

$$(\mathcal{A}\mathbf{x} \mid \mathcal{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}).$$

3. Tensory symetryczne. W teorii form dwuliniowych koncentrowaliśmy uwagę na dwóch klasach form: symetrycznych i antysymetrycznych. W wypadku ogólnych tensorów można mówić o ich symetryczności lub antysymetryczności względem ustalonego podzbioru wskaźników, jednocześnie kowariantnych lub kontrawariantnych. Na przykład symetryczność tensora względem pierwszych dwóch wskaźników kowariantnych i względem ostatnich dwóch wskaźników kontrawariantnych oznacza po prostu, że zachodzą równości

$$T^{r\ldots st}_{ij\ldots k} = T^{r\ldots ts}_{ij\ldots k} = T^{r\ldots st}_{ji\ldots k} = T^{r\ldots ts}_{ji\ldots k}.$$

Zamiana miejscami wskaźnika kowariantnego z kontrawariantnym nie ma na ogół sensu, gdyż nie prowadzi do tensora.

Badając symetryczność i antysymetryczność tensorów, nie zmniejszymy ogólności, ograniczając się do tensorów typu $(p, 0)$ i $(0, q)$ oraz do permutacji wszystkich wskaźników, a nie ustalonej ich części. Ponadto o ciele $\mathfrak{K}$, które było dotychczas dowolne, założymy, że ma charakterystykę zero. W zastosowaniach najważniejsze są ciała $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Rozpatrzmy więc dla ustalenia uwagi tensor kowariantny $T \in \mathbb{T}^0_p(V)$, tj.

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_p} T_{i_1\ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}. \tag{9}$$

Przypominamy, że S_p oznacza p-tą grupę symetryczną, działającą na zbiorze $\{1, \ldots, p\}$. Dla dowolnej permutacji $\pi \in S_p$ definiujemy

$$f_\pi(T)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}) \tag{10}$$

(tutaj $\mathbf{x}_i$ oznacza wektor o numerze i; jego k-tą współrzędną oznaczamy przez x_i^k).

Ponieważ T jest formą p-liniową na V, więc i $f_\pi(T)$ ma tę własność: jeśli np. $\pi k = 1$, to

$$\begin{aligned} f_\pi(T)(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p) &= T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}) \\ &= \alpha T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}) + \beta T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}) \\ &= \alpha f_\pi(T)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p) + \beta f_\pi(T)(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p). \end{aligned}$$

Łatwo też zauważyć, że

$$f_\pi(\alpha T' + \beta T'') = \alpha f_\pi(T') + \beta f_\pi(T''),$$

czyli π indukuje (nieosobliwy) operator liniowy $f_\pi : \mathbb{T}^0_p \to \mathbb{T}^0_p$. Ponadto $f_\sigma \circ f_\pi = f_{\sigma\pi}$ (część I, rozdz. 1, § 8, p. 4).

Jeśli współrzędne tensora T w bazie $(\mathbf{e}_i)$ są wyznaczone przez (9), tj. $T_{i_1\ldots i_p} = T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p})$, to współrzędne tensora $f_\pi(T)$ w tej samej bazie wynoszą

$$f_\pi(T)_{i_1\ldots i_p} = f_\pi(T)(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}) = T(\mathbf{e}_{i_{\pi 1}}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{\pi p}}) = T_{i_{\pi 1}\ldots i_{\pi p}},$$

tj.

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} T_{i_{\pi 1}\ldots i_{\pi p}} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p},$$

lub równoważnie

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} T_{i_1\ldots i_p} e^{i_{\pi^{-1}1}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi^{-1}p}}. \tag{11}$$

Wynika stąd, nawiasem mówiąc, że

$$f_{\pi^{-1}}(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}) = e^{i_{\pi 1}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi p}}.$$

Gdybyśmy rozpatrywali działanie grupy S_p na tensorach kontrawariantnych, otrzymalibyśmy wzór

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} T^{i_1\ldots i_p} \mathbf{e}_{i_{\pi^{-1}1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{\pi^{-1}p}}. \tag{11'}$$

DEFINICJA 3. Tensor T typu $(p, 0)$ (lub typu $(0, q)$) nazywamy *symetrycznym*, jeśli $f_\pi(T) = T$ dla każdego $\pi \in S_p$ (odpowiednio dla każdego $\pi \in S_q$). Podprzestrzenie tensorów symetrycznych w $\mathbb{T}^0_p(V)$ i $\mathbb{T}^q_0(V)$ oznaczamy przez (odpowiednio) $\mathbb{T}^+_p(V)$ i $\mathbb{T}^q_+(V)$.

Symetryzacją tensorów z $\mathbb{T}^0_p(V)$ nazywamy przekształcenie liniowe

$$S = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\pi : \mathbb{T}^0_p(V) \to \mathbb{T}^0_p(V). \tag{12}$$

Na przykład,

$$S(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2) = \frac{1}{3}(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1).$$

Symetryzacja przekształca dowolny tensor z $\mathbb{T}^0_p(V)$ na tensor symetryczny:

$$f_\sigma(S(T)) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\sigma(f_\pi(T)) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_{\sigma\pi}(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} f_\tau(T) = S(T).$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że dla ustalonego $\sigma \in S_p$ każdy element grupy S_p można przedstawić w postaci $\sigma\pi$ dla dokładnie jednego $\pi \in S_p$. Zatem $\operatorname{Im} S \subset \mathbb{T}^+_p(V)$.

Na odwrót, z (12) wynika bezpośrednio, że operator symetryzacji nie zmieni tensorów symetrycznych: $T \in \mathbb{T}^+_p(V) \Rightarrow T = S(T)$. Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 2. *Symetryzacja $S : \mathbb{T}_p^0 \to \mathbb{T}_p^0$ jest operatorem rzutowania na podprzestrzeń tensorów symetrycznych: $S^2 = S$ oraz $\operatorname{Im} S = \mathbb{T}_p^+$.* ■

Przykład 2. Klasycznym przykładem tensora jest *tensor bezwładności* — macierz symetryczna $J = (J_{ij})$ stopnia 3, gdzie J_{ii} jest momentem bezwładności ciała sztywnego względem osi o kierunku $\mathbf{e}_i$ (tutaj $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ jest bazą ortonormalną w $\mathbb{R}^3$), a J_{ij} dla $i \neq j$ są odśrodkowymi momentami bezwładności, wziętymi ze znakiem minus.

Rozpatrzmy mianowicie ciało sztywne, obracające się wokół punktu $\dot{o}$. Przyjmujemy, że ciało to składa się z pewnej liczby n cząstek o masach m_k; położenie każdej cząstki jest określone przez wektor kolumnowy $[x_k, y_k, z_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Tensor J, opisujący rozkład masy ciała i wykorzystywany przy obliczaniu momentu pędu i energii kinetycznej ciała, jest określony przez równość macierzową

$$J = \Big(\sum_k m_k(x_k, y_k, z_k)[x_k, y_k, z_k]\Big)E - \sum_k m_k[x_k, y_k, z_k](x_k, y_k, z_k). \qquad (*)$$

Jak zwykle, E jest tu macierzą jednostkową stopnia 3, (x_k, y_k, z_k) jest wektorem wierszowym, a w przypadku ciągłego rozkładu masy sumowanie zastępujemy całkowaniem. Przechodząc od wyjściowego układu współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ do układu primowanego za pomocą macierzy *ortogonalnej* A według zwykłego wzoru $[x_k, y_k, z_k] \mapsto A[x_k, y_k, z_k] = [x'_k, y'_k, z'_k]$ (oczywiste jest, że A nie działa na masy m_k), otrzymamy macierz

$$J' = AJ\,{}^tA = AJA^{-1},$$

tj. $J'_{ij} = \sum_{r,s} a_i^r a_j^s J_{rs}$, zgodnie z regułą transformacji tensora typu $(2, 0)$. Jeśli obliczymy współrzędne J_{ij} ze wzoru $(*)$, otrzymamy

$$J = \begin{Vmatrix} \sum_k m_k(y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k x_k y_k & \sum_k m_k(x_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k x_k z_k & -\sum_k m_k y_k z_k & \sum_k m_k(x_k^2 + y_k^2) \end{Vmatrix}.$$

Współrzędnych J_{ij} nie można uważać za wielkości fizyczne, mające sens niezależny od układu współrzędnych; tensor J jako całość ma jednak taki sens i wiąże się z nim trzy niezmienniki:

$$J_1 = \operatorname{tr} J = 2\sum_k m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2),$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \det J.$$

Niezmienniczość J_1, J_2 i J_3 względem obrotów jest skutkiem niezmienniczości wielomianu charakterystycznego macierzy J.

Ponieważ macierz J jest symetryczna, można ją sprowadzić do osi głównych (zdiagonalizować), co prowadzi do macierzy $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, której wartości własne $\lambda_i > 0$ nazywamy *głównymi momentami bezwładności*. W szczególności tensor momentu bezwładności jest dodatnio określony. Jeśli ω jest wektorem prędkości kątowej obracającego się ciała, a $\mathbf{j}$ — wektorem momentu pędu, to $\mathbf{j} = J\omega$. Wektory $\mathbf{j}$ i ω są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ciało obraca się wokół jednej ze swych osi głównych.

W rozdziale 1 (§ 4, twierdzenie 3) ustaliliśmy odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między formami kwadratowymi i symetrycznymi formami dwuliniowymi. W słabszej formie podobna odpowiedniość istnieje również dla form wieloliniowych.

DEFINICJA 4. Funkcję $Q : V \to \mathfrak{K}$ nazywamy *jednorodną stopnia p*, jeśli istnieje forma p-liniowa $F : V^p \to \mathfrak{K}$ taka, że

$$Q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \in V. \tag{13}$$

Jak wiemy, symetryzacja $S(F)$ powyższej formy F, określona wzorem

$$(S(F))(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} F(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}),$$

jest symetryczną formą p-liniową; forma ta oczywiście również spełnia warunek (13).

Jeśli forma F spełniająca (13) jest symetryczna, to nazywamy ją *formą biegunową* dla Q. Otrzymaliśmy w ten sposób część poniższego twierdzenia.

TWIERDZENIE 3. *Dla każdej funkcji jednorodnej Q stopnia p na przestrzeni liniowej V istnieje dokładnie jedna symetryczna forma p-liniowa F, biegunowa dla Q, czyli spełniająca równość* (13).

Dowód. Jednoznaczność formy biegunowej wynika z jej zapisu we współrzędnych: jeśli F jest formą biegunową dla Q oraz

$$F(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = \sum F_{i_1 \ldots i_p} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p}$$

(tutaj wektor $\mathbf{x}_i$ ma współrzędne x_i^j), to

$$Q(\mathbf{x}) = \sum F_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1} \ldots x^{i_p}, \qquad \mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n). \tag{14}$$

...omian jednorodny $f(X_1, \ldots, X_n)$ stopnia p względem n zmiennych niezależnych, którego wartość dla $X_i = x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ wynosi $Q(\mathbf{x})$, można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p} f_{i_1 \ldots i_p} X_{i_1} \ldots X_{i_p}. \tag{15}$$

Porównując (14) i (15), otrzymujemy

$$f_{i_1 \ldots i_p} = c F_{i_1 \ldots i_p},$$

gdzie $c = c(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{Z}$ to liczba wszystkich możliwych uporządkowań ciągu $i_1, \ldots, i_p$ (pamiętajmy, że elementy tego ciągu mogą się powtarzać). Na przykład dla $p = 4$ mamy $c(i, i, k, l) = 12$, $c(i, i, i, j) = 4$ itd. Ponieważ współczynniki $f_{i_1 \ldots i_p}$ są wyznaczone jednoznacznie, więc $F_{i_1 \ldots i_p}$ również. ■

W gruncie rzeczy otrzymaliśmy odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między przestrzenią $\mathbb{T}_p^+(V)$ tensorów symetrycznych a przestrzenią $\mathfrak{K}[X_1, \ldots, X_n]_p$ wielomianów jednorodnych (form) stopnia p względem n zmiennych niezależnych. To samo odnosi się do przestrzeni $\mathbb{T}_+^p(V)$ symetrycznych tensorów kontrawariantnych. Zauważmy przy tym, że

$$\dim \mathfrak{K}[X_1, \ldots, X_n]_p = \binom{n+p-1}{p}.$$

4. Tensory antysymetryczne. Podobnie jak poprzednio, ograniczymy się do tensorów typu $(p, 0)$ lub $(0, q)$. Przypominamy, że działanie grupy symetrycznej S_p na $\mathbb{T}_p^0(V)$ jest określone wzorem (10) lub (11).

DEFINICJA 5. Tensor $T \in \mathbb{T}_p^0(V)$ nazywamy *antysymetrycznym*, jeśli

$$f_\pi(T) = \varepsilon_\pi T \quad \forall \pi \in S_p, \tag{16}$$

gdzie ε_π jest znakiem permutacji π.

Przypomnijmy, że $\varepsilon : \pi \mapsto \varepsilon_\pi$ jest homomorfizmem grupy S_p w $\{\pm 1\}$, przy czym $\varepsilon_\tau = -1$ dla każdej transpozycji τ.

Warunek (16) jest równoważny żądaniu, by

$$f_\tau(T) = -T \tag{16'}$$

dla każdej transpozycji τ (wynika to z faktu, że każda permutacja jest iloczynem transpozycji oraz $f_\sigma(f_\pi(T)) = f_{\sigma\pi}(T)$); to z kolei można zapisać w postaci

$$T(\ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{y}, \ldots) = -T(\ldots, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}, \ldots), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \tag{17}$$

gdzie kropki oznaczają dowolne wektory, te same po obu stronach równości. Ponieważ zakładamy, że $\operatorname{char} \mathfrak{K} = 0$, więc dla $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$ z równości (17) wynika, że

$$T(\ldots, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{z}, \ldots) = 0. \tag{17'}$$

Przyjmując $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ w (17') i korzystając z wieloliniowości T, otrzymamy

$$T(\ldots, \mathbf{x}+\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}+\mathbf{y}, \ldots) = T(\ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}, \ldots) + T(\ldots, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{y}, \ldots) + T(\ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{y}, \ldots) + T(\ldots, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}, \ldots),$$

co oznacza, że z (17') wynika (17), czyli warunki (17) i (17') są równoważne.

Antysymetryczność tensora T wyraża się w oczywisty sposób w jego współrzędnych $T_{i_1 \ldots i_p}$. Jeśli np. $p = 2$ (czyli tensor jest formą dwuliniową na V), to antysymetryczność oznacza, że $T_{ij} = -T_{ji}$, a więc macierz formy w dowolnej bazie jest antysymetryczna. W ogólnym przypadku

$$T_{i_{\pi 1} \ldots i_{\pi p}} = \varepsilon_\pi T_{i_1 \ldots i_p}.$$

Widać, że jeśli którekolwiek dwa spośród wskaźników $i_1, \ldots, i_p$ są równe, to współrzędna $T_{i_1 \ldots i_p}$ jest zerem; jeśli wszystkie te wskaźniki są różne, to współrzędna ta jest wyznaczona przez współrzędną o tych samych wskaźnikach, ustawionych np. w porządku rosnącym:

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_p}, \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n. \tag{18}$$

Z drugiej strony, między współrzędnymi typu (18) nie ma już żadnych ogólnych zależności, czyli mamy $\binom{n}{p}$ niezależnych współrzędnych. Za chwilę uzasadnimy i sprecyzujemy te wstępne rozważania.

DEFINICJA 6. Odwzorowanie

$$A = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi : \mathbb{T}^0_p(V) \to \mathbb{T}^0_p(V) \tag{19}$$

nazywamy *antysymetryzacją* tensorów kowariantnych z $\mathbb{T}^0_p(V)$.

Przypominamy, że $\mathbb{T}^0_p(V) \cong (V^*)^{\otimes p}$. Podzbiór tensorów antysymetrycznych w $\mathbb{T}^0_p(V)$ oznaczamy przez $\bigwedge^p V^*$, a odpowiedni podzbiór tensorów kontrawariantnych przez $\bigwedge^q V \subset \mathbb{T}^q_0(V)$. Oba te podzbiory są podprzestrzeniami liniowymi, ponieważ jeśli $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ oraz $f_\pi(P) = \varepsilon_\pi P$ i $f_\pi(R) = \varepsilon_\pi R$, to

$$f_\pi(\alpha P + \beta R) = \alpha f_\pi(P) + \beta f_\pi(R) = \alpha \varepsilon_\pi P + \beta \varepsilon_\pi R = \varepsilon_\pi(\alpha P + \beta R).$$

TWIERDZENIE 4. *Antysymetryzacja $A : \mathbb{T}^0_p(V) \to \mathbb{T}^0_p(V)$ jest operatorem liniowym o następujących własnościach:*

(a) $A^2 = A$;
(b) $\operatorname{Im} A = \bigwedge^p V^*$;
(c) $A(f_\sigma(T)) = \varepsilon_\sigma A(T)$.

Dowód. Liniowość odwzorowania A wynika z liniowości f_π.

(a) Na mocy (19) mamy

$$A^2 = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma, \pi \in S_p} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\pi f_\sigma \circ f_\pi = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma, \pi \in S_p} \varepsilon_{\sigma\pi} f_{\sigma\pi} = \frac{1}{p!} \sum_{\varrho \in S_p} \varepsilon_\varrho f_\varrho = A.$$

Uwzględniliśmy tu fakt, że każdy element $\varrho \in S_p$ można przedstawić w postaci $\sigma\pi$ na dokładnie $p!$ sposobów: wybieramy dowolne σ, a następnie przyjmujemy $\pi = \sigma^{-1}\varrho$. Wykorzystaliśmy też multiplikatywność ε_σ i f_σ względem σ.

(b) Dla każdego $T \in \mathbb{T}_p^0(V)$ mamy

$$f_\sigma(A(T)) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi f_\sigma(f_\pi(T)) = \varepsilon_\sigma \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_{\sigma\pi} f_{\sigma\pi}(T) = \varepsilon_\sigma A(T),$$

czyli $\operatorname{Im} A \subset \bigwedge^p V^*$. Na odwrót, jeśli $T \in \bigwedge^p V^*$, to

$$A(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi^2 T = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} T = T,$$

w szczególności $\bigwedge^p V^* \subset \operatorname{Im} A$.

(c) W dowodzie (a) wykazaliśmy, że $f_\sigma A = \varepsilon_\sigma A$. Uzasadnienie, że $A f_\sigma = \varepsilon_\sigma A$, przebiega tak samo. ∎

Wprowadzimy jeszcze terminologię, ogólnie przyjętą w różnych działach matematyki.

DEFINICJA 7. Kowariantny tensor antysymetryczny na przestrzeni liniowej V, czyli element przestrzeni $\bigwedge^p V^*$, nazywamy *p-formą zewnętrzną*, *formą zewnętrzną stopnia p* lub *p-kowektorem* na V. Kontrawariantne tensory antysymetryczne, czyli elementy przestrzeni $\bigwedge^p V$, nazywamy *p-wektorami*.

5. Algebra tensorowa. Rozważmy nieskończoną zewnętrzną sumę prostą

$$\begin{aligned}\bigotimes V^* &:= \mathfrak{K} \oplus \mathbb{T}_1^0(V) \oplus \mathbb{T}_2^0(V) \oplus \mathbb{T}_3^0(V) \oplus \ldots \\ &\cong \mathfrak{K} \oplus V^* \oplus (V^*)^{\otimes 2} \oplus (V^*)^{\otimes 3} \oplus \ldots \end{aligned} \tag{20}$$

wszystkich przestrzeni tensorów kowariantnych na V. Elementami tej sumy są, z *definicji*, ciągi

$$(f_0, f_1, f_2, \ldots) =: \sum_{i\geqslant 0} f_i, \qquad f_i \in \mathbb{T}_i^0(V),$$

o tej własności, że prawie wszystkie f_i (tzn. wszystkie poza skończoną liczbą) są zerami. Zbiór $\bigotimes V^*$ ma naturalną strukturę (nieskończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej, a także (łącznej) algebry nad ciałem $\mathfrak{K}$, jeśli mnożenie elementów, oznaczane przez $\otimes$, określimy, wykorzystując zdefiniowany poprzednio iloczyn tensorowy $(V^*)^{\otimes i} \times (V^*)^{\otimes j} \to (V^*)^{\otimes(i+j)}$ (§ 1, definicja 2):

$$\Big(\sum_{i=0}^{s} f_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j=0}^{t} g_j\Big) = \sum_{k=0}^{s+t} \sum_{i+j=k} f_i \otimes g_j =: \sum_{k=0}^{s+t} h_k. \tag{21}$$

Mnożenie to spełnia oczywiście warunek

$$\lambda(f \otimes g) = \lambda f \otimes g = f \otimes \lambda g, \qquad \lambda \in \mathfrak{K}.$$

Algebrę $\bigotimes V^*$ nazywamy *algebrą tensorową kowariantną* przestrzeni liniowej V.

Mnożenie (6) przypomina bardzo mnożenie wielomianów i różni się od niego jedynie nieprzemiennością. W każdej przestrzeni $\mathbb{T}^0_p(V)$ można rozpatrzyć podprzestrzeń $\mathbb{T}^+_p(V)$ tensorów symetrycznych, którą — jak wiemy (koniec p. 3) — można utożsamić z przestrzenią wielomianów jednorodnych stopnia p względem n zmiennych. Suma prosta tych podprzestrzeni z odpowiednio określonym działaniem (symetryzujemy wyniki działania (21)) jest już izomorficzna z algebrą wielomianów n zmiennych.

Analogicznie definiujemy *algebrę tensorową kontrawariantną* przestrzeni V:

$$\begin{aligned}\bigotimes V &= \mathfrak{K} \oplus \mathbb{T}^1_0(V) \oplus \mathbb{T}^2_0(V) \oplus \mathbb{T}^3_0(V) \oplus \ldots \\ &\cong \mathfrak{K} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \ldots,\end{aligned} \tag{22}$$

a w niej podprzestrzeń

$$\mathbb{S}(V) = \mathbb{T}_+(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbb{T}^q_+(V)$$

tensorów symetrycznych. Podprzestrzeń ta *nie jest* podalgebrą w $\bigotimes V$; jeśli jednak przyjmiemy (jak sugerowaliśmy wyżej)

$$T_1T_2 = S(T_1 \otimes T_2), \qquad T_1 \in \mathbb{T}^p_+(V),\ T_2 \in \mathbb{T}^q_+(V)$$

(gdzie S oznacza operator symetryzacji), to przestrzeń $\mathbb{S}(V)$ z tym działaniem jest algebrą, łączną i przemienną; nazywamy ją *algebrą symetryczną* przestrzeni V.

Podobnie można określić podprzestrzenie liniowe

$$\begin{aligned}\bigwedge V^* &= \mathfrak{K} \oplus \bigwedge^1 V^* \oplus \bigwedge^2 V^* \oplus \ldots \subset \bigotimes V^*, \\ \bigwedge V &= \mathfrak{K} \oplus \bigwedge^1 V \oplus \bigwedge^2 V \oplus \ldots \subset \bigotimes V,\end{aligned} \tag{23}$$

które również nie są podalgebrami odpowiednich algebr tensorowych. Znowu okazuje się, że definicja mnożenia analogiczna do powyższej, ale z użyciem operatora antysymetryzacji, wprowadza w $\bigwedge V^*$ i $\bigwedge V$ struktury algebry łącznej (zob. następny paragraf).

Uwaga. Operatory symetryzacji i antysymetryzacji wymagały przyjęcia założenia, że ciało $\mathfrak{K}$ ma charakterystykę zero (dzieliliśmy przez $p!$). W podręczniku [pokazano, jak uwolnić się od tego założenia.

ĆWICZENIA

1. (*Podnoszenie i opuszczanie wskaźników*). Niech (V, g) będzie przestrzenią euklidesową (tzn. g jest tensorem metrycznym), a T — tensorem typu $(p,$ o współrzędnych $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$. Rozważmy tensor o współrzędnych $\sum_k g^{ik} T^{j_1 j_2 \ldots}_{k i_2 \ldots i}$ oznaczmy w nim wskaźnik i przez i_1, a następnie przyjmijmy

$$T^{i_1 j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_2 \ldots i_p} = \sum_k g^{i_1 k} T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{k i_2 \ldots i_p}.$$

Mówimy, że tensor po lewej stronie (typu $(p-1, q+1)$) powstał z T przez *podniesienie wskaźnika* i_1. Operacja *opuszczania wskaźników* za pomocą tensora metrycznego jest określona analogicznie. Na przykład

$$T_{i_1\ldots i_p j_2}^{j_1 j_3\ldots j_q} = \sum_k g_{j_2 k} T_{i_1\ldots i_p}^{j_1 k j_3\ldots j_q}$$

to współrzędne tensora, który powstał z T przez opuszczenie wskaźnika j_2 na ostatnie miejsce w dolnym rzędzie wskaźników.

Ogólnie, podniesienie s-tego wskaźnika kowariantnego i opuszczenie t-tego wskaźnika kontrawariantnego to przekształcenia liniowe

$$\mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p-1}^{q+1}, \quad \mathbb{T}_p^q \to \mathbb{T}_{p+1}^{q-1}.$$

Współrzędne tensorów otrzymanych w ich wyniku zapisujemy w postaci blokowej

$$T_{i_1\ldots i_{s-1}}{}^{i_s}{}_{i_{s+1}\ldots i_p}{}^{j_1\ldots j_q}, \quad T_{i_1\ldots i_p}{}^{j_1\ldots j_{t-1}}{}_{j_t}{}^{j_{t+1}\ldots j_q}.$$

Na przykład współrzędne tensora $T \in V^* \otimes V$ często zapisuje się w postaci $T_i{}^j$, a współrzędne tensora $T \in V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V^*$ — w postaci $T_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2 i_3}$.

Operacje podnoszenia i opuszczania wskaźników można wykonywać wielokrotnie, w szczególności na samym tensorze metrycznym.

Wykazać, że

$$g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ij}, \quad g_{ik} g_{jl} g^{kl} = g_{ij}.$$

Sprawdzić równość $\sum_k g^{ik} x_k = x^i$, która oznacza, że kontrawariantne współrzędne x^i wektora $\mathbf{x}$ otrzymuje się z kowariantnych współrzędnych x_i tego wektora przez podniesienia wskaźnika.

2. Wykazać, że jeśli $\dim V > 1$, to algebra tensorowa $\bigotimes V$ jest nieprzemienna, nie ma dzielników zera i jedynymi jej elementami odwracalnymi są niezerowe skalary.

3. Znaleźć jawne wzory na niezmienniki J_2 i J_3 z przykładu 2.

§ 3. ALGEBRA ZEWNĘTRZNA

1. Iloczyn zewnętrzny. Nie ma znaczenia, czy dalszy wykład będziemy prowadzili dla form zewnętrznych, czy dla p-wektorów. Dla urozmaicenia rozpatrzymy teraz przestrzeń $\bigwedge V$.

DEFINICJA 1. Określimy *iloczyn zewnętrzny* w przestrzeni $\bigwedge V$ w następujący sposób. Jeśli $Q \in \bigwedge^q V$ i $R \in \bigwedge^r V$, to przyjmujemy

$$Q \wedge R = A(Q \otimes R), \tag{1}$$

gdzie A oznacza operator antysymetryzacji ([1]); ponadto przyjmujemy $\lambda \wedge R = R \wedge \lambda = \lambda R$ dla $\lambda \in \mathfrak{K}$. Ponieważ $Q \otimes R \in \mathbb{T}_0^{q+r}$, a tensor $A(Q \otimes R)$ jest antysymetryczny (§ 2, twierdzenie 4), więc określiliśmy w ten sposób odwzorowanie

$$\wedge : \bigwedge^q V \times \bigwedge^r V \to \bigwedge^{q+r} V.$$

Odwzorowanie to jest dwuliniowe: jeśli $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ i $R' \in \bigwedge^r V$, to

$$\begin{aligned} Q \wedge (\alpha R + \beta R') &= A(Q \otimes (\alpha R + \beta R')) = A(\alpha Q \otimes R + \beta Q \otimes R') \\ &= \alpha A(Q \otimes R) + \beta A(Q \otimes R') = \alpha(Q \wedge R) + \beta(Q \wedge R'). \end{aligned}$$

Analogicznie $(\alpha Q + \beta Q') \wedge R = \alpha(Q \wedge R) + \beta(Q' \wedge R)$.

Iloczyn zewnętrzny $Q \wedge R$ dowolnych elementów przestrzeni $\bigwedge V$ określamy teraz tak, by nadal otrzymać odwzorowanie dwuliniowe: jeśli

$$Q = \sum_{i \geqslant 0} Q_i, \qquad R = \sum_{j \geqslant 0} R_j, \qquad Q_i \in \bigwedge^i V, \ R_j \in \bigwedge^j V,$$

to przyjmujemy

$$Q \wedge R = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{i+j=k} Q_i \wedge R_j.$$

2. Algebra zewnętrzna przestrzeni liniowej. Ponieważ działanie iloczynu zewnętrznego w $\bigwedge V$ jest dwuliniowe, wprowadza ono w $\bigwedge V$ strukturę algebry.

DEFINICJA 2. Algebrę $\bigwedge V$ nazywamy *algebrą zewnętrzną* lub *algebrą Grassmanna* przestrzeni liniowej V.

Algebra $\bigwedge V$ ma jedynkę, którą można utożsamić ze skalarem $1 \in \mathfrak{K}$. Znacznie ważniejszą własność tej algebry zawiera twierdzenie 2 poniżej.

TWIERDZENIE 1. *Dla dowolnych tensorów $Q \in \mathbb{T}_0^q(V)$ i $R \in \mathbb{T}_0^r(V)$ zachodzą równości*

$$A(A(Q) \otimes R) = A(Q \otimes A(R)) = A(Q \otimes R).$$

Dowód. Z definicji mamy

$$A(Q) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} \varepsilon_\pi f_\pi(Q),$$

podczas gdy

$$A(A(Q) \otimes R) = \frac{1}{(q+r)!} \sum_{\sigma \in S_{q+r}} \varepsilon_\sigma f_\sigma(A(Q) \otimes R).$$

([1]) Zwracamy uwagę, że często przyjmowana jest inna definicja iloczynu zewnętrznego $Q \wedge R = \frac{(q+r)!}{q!r!} A(Q \otimes R)$. Oba działania mają te same własności algebraiczne, różnią się jedynie związkiem z iloczynem tensorowym, inaczej mówiąc, interpretacją iloczynu zewnętrznego jako formy wieloliniowej (*przyp. tłum.*).

Ponieważ antysymetryzacja jest operatorem liniowym, wynika stąd, że

$$A(A(Q) \otimes R) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} \varepsilon_\pi A(f_\pi(Q) \otimes R). \tag{2}$$

Rozpatrzmy zanurzenie $\varphi : S_q \to S_{q+r}$ określone następująco: jeśli $\pi \in S_q$, to permutację $\widetilde{\pi} = \varphi(\pi)$ definiujemy wzorem

$$\widetilde{\pi} i = \begin{cases} \pi i, & \text{jeśli } i \leqslant q, \\ i, & \text{jeśli } i > q. \end{cases}$$

Wtedy łatwo zauważyć, że $f_\pi(Q) \otimes R = f_{\widetilde{\pi}}(Q \otimes R)$ (zapisując tensory w bazie; por. § 2, wzór (11)). Wobec tego, na podstawie twierdzenia 4(c) z § 2,

$$A(f_\pi(Q) \otimes R) = A(f_{\widetilde{\pi}}(Q \otimes R)) = \varepsilon_{\widetilde{\pi}} A(Q \otimes R).$$

Jeśli teraz zauważymy, że $\varepsilon_{\widetilde{\pi}} = \varepsilon_\pi$, to równość (2) przyjmie żądaną postać

$$A(A(Q) \otimes R) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} \varepsilon_\pi^2 A(Q \otimes R) = A(Q \otimes R),$$

ponieważ $\varepsilon_\pi^2 = 1$. Dowód równości $A(Q \otimes A(R)) = A(Q \otimes R)$ jest analogiczny. ∎

TWIERDZENIE 2. *Algebra zewnętrzna $\bigwedge V$ jest łączna.*

Dowód. Mamy wykazać, że

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) \tag{3}$$

dla dowolnych $P, Q, R \in \bigwedge V$. Ponieważ działanie $\wedge$ jest dwuliniowe, wystarczy rozpatrzyć przypadek

$$P \in \textstyle\bigwedge^p V, \qquad Q \in \bigwedge^q V, \qquad R \in \bigwedge^r V.$$

Na mocy definicji (1) mamy

$$(P \wedge Q) \wedge R = A(A(P \otimes Q) \otimes R),$$

a z twierdzenia 1 wynika, że

$$A(A(P \otimes Q) \otimes R) = A((P \otimes Q) \otimes R).$$

Wykorzystujemy teraz łączność iloczynu tensorowego i ponownie stosujemy twierdzenie 1:

$$A((P \otimes Q) \otimes R) = A(P \otimes (Q \otimes R)) = A(P \otimes A(Q \otimes R)) = P \wedge (Q \wedge R).$$

W ten sposób dowód równości (3) został zakończony. ∎

W algebrze łącznej, podobnie jak np. w grupie, rozstawienie nawiasów w wielokrotnych iloczynach nie odgrywa roli, mają więc sens zapisy postaci $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.

Odnotujmy jeszcze szczególny przypadek definicji (1) — dla $q = r = 1$: jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, to

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) = A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}), \tag{4}$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0. \tag{5}$$

WNIOSEK. *Jeśli $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ są dowolnymi wektorami, to*

$$\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p = A(\mathbf{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_p). \tag{6}$$

Dowód. Dla $p = 2$ równość (6) pokrywa się z (4). Przez indukcję względem p, na podstawie twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p &= (\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_{p-1}) \wedge \mathbf{x}_p = A((\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_{p-1}) \otimes \mathbf{x}_p) \\ &= A(A(\mathbf{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_{p-1}) \otimes \mathbf{x}_p) = A(\mathbf{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_{p-1} \otimes \mathbf{x}_p). \ \blacksquare \end{aligned}$$

TWIERDZENIE 3. *Jeśli $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V, to p-wektory*

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n, \tag{7}$$

tworzą bazę przestrzeni $\bigwedge^p V$.

Dowód. Rozpatrzmy wszystkie możliwe iloczyny $\mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_p}$, gdzie wskaźniki j_k są dowolne. Z równości (5) wynika, że albo iloczyn taki jest zerem (gdy $j_r = j_s$ dla pewnych $r \neq s$), albo też, przestawiając czynniki, można go doprowadzić — z dokładnością do znaku — do postaci (7).

Weźmy teraz dowolny tensor $P \in \bigwedge^p V$. Podobnie jak każdy tensor z $\mathbb{T}_0^p(V)$, można go zapisać w bazie:

$$P = \sum_{j_1, \ldots, j_p} P^{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_p}.$$

Na mocy liniowości operatora antysymetryzacji, twierdzenia 4 z § 2 oraz równości (6) otrzymujemy

$$P = A(P) = \sum_{j_1, \ldots, j_p} P^{j_1 \ldots j_p} A(\mathbf{e}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{jp}) = \sum_{j_1, \ldots, j_p} P^{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_p}.$$

Wynika stąd, na podstawie powyższej uwagi, że p-wektory (7) rozpinają przestrzeń $\bigwedge^p V$.

Wykażemy, że są one liniowo niezależne. Przypuśćmy, że

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \lambda^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = 0.$$

Wtedy, na mocy (6),

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \lambda^{i_1 \ldots i_p} A(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) = 0,$$

czyli (zgodnie z definicją antysymetryzacji)

$$\frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n}\lambda^{i_1\ldots i_p}\sum_{\pi\in S_p}\varepsilon_\pi f_\pi(\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_p})=0.$$

Wykorzystując równość (11′) z § 2 oraz fakt, że $\varepsilon_\pi=\varepsilon_{\pi^{-1}}$, otrzymujemy stąd

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n}\lambda^{i_1\ldots i_p}\sum_{\pi\in S_p}\varepsilon_\pi(\mathbf{e}_{i_{\pi 1}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_{\pi p}})=0. \tag{8}$$

Jeśli $\pi\neq e$, to ciąg $i_{\pi 1},\ldots,i_{\pi p}$ nie jest już uporządkowany rosnąco. Wobec tego równość (8) można przepisać w postaci

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n}\lambda^{i_1\ldots i_p}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_p}+\ldots=0, \tag{9}$$

gdzie wielokropek oznacza kombinację liniową tensorów $\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_p}$, dla których ciąg $j_1,\ldots,j_p$ nie jest uporządkowany rosnąco. Ponieważ wszystkie tensory $\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_p}$ (dla różnych układów wskaźników) są liniowo niezależne, wynika stąd, że $\lambda^{i_1\ldots i_p}=0$. ■

Przypomnijmy, że $\bigwedge V$ jest sumą prostą przestrzeni $\bigwedge^p V$ (§ 2, wzór (23)), w szczególności

$$\dim\bigwedge V=\sum_{p\geqslant 0}\dim\bigwedge^p V,$$

skąd wynika

WNIOSEK. *Jeśli* $\dim V=n$, *to*

$$\dim\bigwedge^p V=\binom{n}{p},\qquad \dim\bigwedge V=2^n.$$

W szczególności przestrzeń $\bigwedge^n V$ *jest jednowymiarowa i generowana przez* n*-wektor*

$$\mathbf{e}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_n,$$

gdzie $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ *jest dowolną bazą w* V.

Dowód. Stwierdzenie jest niemal oczywiste: liczba p-wektorów $\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_p}$, gdzie $i_1<\ldots<i_p$, jest równa liczbie $\binom{n}{p}$ p-elementowych podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Ponadto $\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{p}=0$ dla $p>n$ oraz

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n. \;■$$

Odnotujmy jeszcze jedną ważną własność iloczynu zewnętrznego:

$$[Q\in\bigwedge^q V,\ R\in\bigwedge^r V]\ \Rightarrow\ Q\wedge R=(-1)^{qr}R\wedge Q. \tag{10}$$

Mówimy, że algebra zewnętrzna jest *antyprzemienną algebrą z gradacją*.

Dzięki dwuliniowości iloczynu zewnętrznego wystarczy udowodnić (10) dla

$$Q = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_q}, \qquad R = \mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_r}.$$

Wykorzystując q-krotnie związek (5), otrzymujemy

$$(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_q}) \wedge \mathbf{e}_{j_k} = (-1)^q \mathbf{e}_{j_k} \wedge (\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_q}),$$

tj. $Q \wedge \mathbf{e}_{j_k} = (-1)^q \mathbf{e}_{j_k} \wedge Q$ (niezależnie od tego, czy wskaźnik j_k jest jednym ze wskaźników i_s, czy też nie). Zatem

$$\begin{aligned} Q \wedge R &= Q \wedge (\mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_r}) = (-1)^q \mathbf{e}_{j_1} \wedge (Q \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_r}) \\ &= (-1)^{2q} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge (Q \wedge \mathbf{e}_{j_3} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_r}) = \ldots = (-1)^{qr} R \wedge Q. \end{aligned}$$

Ze związku (10) wynika w szczególności, że jeśli p jest nieparzyste, to

$$P \wedge P = 0 \tag{11}$$

dla każdego p-wektora P; dla parzystego p równość (11) może już nie zachodzić.

Przykład 1. Niech $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ będzie bazą w V, przy czym $n \geqslant 4$. Wtedy

$$\begin{aligned} &(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) \\ &\quad = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \neq 0. \end{aligned}$$

3. Związek z wyznacznikami. Wykorzystując iloczyn zewnętrzny, łatwo sformułować kryterium liniowej niezależności wektorów, a także wyprowadzić jeszcze raz wszystkie własności wyznaczników.

TWIERDZENIE 4. *Wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p \neq 0.$$

Dowód. Jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ są liniowo zależne, to jeden z nich, np. $\mathbf{x}_p$, jest kombinacją liniową pozostałych. Jeśli zastąpimy $\mathbf{x}_p$ tą kombinacją, to iloczyn zewnętrzny $\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p$ stanie się sumą składników postaci $\alpha_i \mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_{p-1} \wedge \mathbf{x}_i$ dla $i < p$; każdy taki składnik zawiera jednak co najmniej dwa identyczne wektory, jest więc zerem.

Na odwrót, jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ są liniowo niezależne, to można je uzupełnić do bazy w V; wtedy p-wektor $\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p$ jest elementem bazy przestrzeni $\bigwedge^p V$ (twierdzenie 3), w szczególności nie jest zerem. ∎

Niech teraz $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ będzie bazą przestrzeni V, a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — dowolnym układem n wektorów w V. Mamy

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i \mathbf{e}_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Na mocy wniosku z twierdzenia 3 mamy

$$\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n = \Delta \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n,$$

gdzie Δ jest pewną skalarną funkcją wektorów $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ lub, co na jedno wychodzi, kolumn macierzy (x_j^i). Z własności iloczynu zewnętrznego natychmiast wynika, że funkcja ta jest n-liniowa i antysymetryczna, przy czym $\Delta = 1$, jeśli $\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ dla $j = 1, \ldots, n$. Własności te ma jednak tylko wyznacznik (część I, rozdz. 3, § 1, twierdzenie 3), więc $\Delta = \det(x_j^i)$. Inaczej mówiąc,

$$\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n = \det(x_j^i)\, \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n. \tag{12}$$

Uwaga. Ze związku (12) można bez trudu wyprowadzić wszystkie własności wyznaczników; co więcej, algebrę zewnętrzną można uczynić podstawą dużej części algebry liniowej, przy czym wiele dowodów twierdzeń osiąga wtedy znaczny stopień naturalności. To już dla nas jednak uwaga nieco spóźniona, zresztą nie ma czego żałować („wszystko we właściwym czasie").

Uogólnieniem równości (12) jest analogiczna równość dla p wektorów $\mathbf{x}_j \in V$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p &= \sum_{i_1, \ldots, i_p} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \Big(\sum_{\pi \in S_p} x_1^{i_{\pi 1}} \ldots x_p^{i_{\pi p}} \mathbf{e}_{i_{\pi 1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_{\pi p}} \Big) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \Big(\sum_{\pi \in S_p} x_1^{i_{\pi 1}} \ldots x_p^{i_{\pi p}} (\varepsilon_\pi \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}) \Big) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \Big(\sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi x_1^{i_{\pi 1}} \ldots x_p^{i_{\pi p}} \Big) \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}.
\end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia o pełnym rozwinięciu wyznacznika (część I, rozdz. 3, § 1, (3)) mamy

$$\begin{aligned}
\Delta_{i_1 \ldots i_p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) &:= \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi x_1^{i_{\pi 1}} \ldots x_p^{i_{\pi p}} \\
&= \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_p^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{i_p} & \ldots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} = \det(x_j^{i_k}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 5. *Jeśli* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *jest bazą przestrzeni liniowej* V, *a*

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i \mathbf{e}_i, \qquad j = 1 \ldots, p,$$

dowolnym układem p wektorów z V, to

$$\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \Delta_{i_1 \ldots i_p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \tag{14}$$

gdzie $\Delta_{i_1 \ldots i_p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ *jest wyznacznikiem postaci* (13). ∎

Dla $p = n$ wzór (14) przechodzi w (12). Zauważmy, że na $T = \Delta_{i_1 \ldots i_p}$ można patrzeć jak na p-formę zewnętrzną (czyli element przestrzeni $\bigwedge^p V^*$) o własności $\Delta_{i_1 \ldots i_p}(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}) = 1$. W szczególności $\det = \Delta_{1 \ldots n}$ jest, dla danej bazy $(\mathbf{e}_i)$, jedyną n-formą zewnętrzną na V, dla której $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Zauważmy, że z twierdzenia 5 wynika uogólnienie wzoru (12): jeśli $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ i $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ są dwiema bazami w podprzestrzeni liniowej $U \subset V$, to

$$\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p = \lambda \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_p \quad \text{dla pewnego } \lambda \in \mathfrak{K}. \tag{14'}$$

Istotnie, wtedy wszystkie wyznaczniki $\Delta_{i_1 \ldots i_p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ w (14) poza wyznacznikiem $\Delta_{1 \ldots p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ są zerami, ponieważ mają wiersz zerowy.

4. Podprzestrzenie liniowe i p-wektory. Nadal V pozostaje n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathfrak{K}$.

DEFINICJA 3. *Anihilatorem* p-wektora $P \in \bigwedge^p V \setminus \{0\}$ nazywamy podprzestrzeń liniową

$$\operatorname{Ann} P = \{\mathbf{x} \in V \mid P \wedge \mathbf{x} = 0\}.$$

Umówimy się ponadto, by p-wektor P nazywać *prostym* (lub *rozkładalnym*), jeśli

$$P = \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$$

dla pewnych wektorów $\mathbf{a}_i \in V$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Fakt, że $\operatorname{Ann} P$ jest istotnie podprzestrzenią liniową, łatwo wynika z dwuliniowości iloczynu zewnętrznego: jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{Ann} P$ i $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$, to

$$P \wedge (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha P \wedge \mathbf{x} + \beta P \wedge \mathbf{y} = 0,$$

czyli $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \operatorname{Ann} P$.

TWIERDZENIE 6. *Jeśli* $P \in \bigwedge^p V \setminus \{0\}$ *i* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$ *jest bazą podprzestrzeni* $\operatorname{Ann} P$, *to* $r \leqslant p$ *oraz istnieje taki* $(p-r)$*-wektor* Q, *że*

$$P = \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_r \wedge Q.$$

Równość $r = p$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* p*-wektor* P *jest prosty.*

Dowód. Uzupełniamy $(\mathbf{e}_i)$ do bazy $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w V. Jeśli

$$P = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} P^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \quad (1$$

to z definicji anihilatora wynika, że

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} P^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, r. \tag{16}$$

Jeśli wskaźnik j jest jednym z i_k, to $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_j = 0$, więc możemy uważać, że lewa strona równości (16) jest kombinacją liniową $(p+1)$-wektorów $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_j$, dla których $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$. Wektory te są jednak (dla każdego j) liniowo niezależne, więc (16) implikuje, że $P^{i_1 \ldots i_p} = 0$ dla każdego układu wskaźników, w którym nie ma którejś z liczb $1, \ldots, r$. Ponieważ z założenia $P \neq 0$, więc $p \geqslant r$ oraz

$$\begin{aligned} P &= \sum_{r < i_{r+1} < \ldots < i_p \leqslant n} P^{12 \ldots r i_{r+1} \ldots i_p} \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \\ &= \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_r \wedge Q, \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie

$$Q = \sum_{r < i_{r+1} < \ldots < i_p \leqslant n} P^{12 \ldots r i_{r+1} \ldots i_p} \mathbf{e}_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$$

jest pewnym $(p-r)$-wektorem.

Jeśli $p = r$, to powyżej wykazaliśmy, że $P = \lambda \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_p$, czyli P jest p-wektorem prostym. Na odwrót, jeśli $P \neq 0$ oraz

$$P = \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p,$$

to wektory $\mathbf{a}_i$ są liniowo niezależne (twierdzenie 4) oraz oczywiście $\mathbf{a}_i \in \operatorname{Ann} P$ dla $i = 1, \ldots, p$, a więc $\dim \operatorname{Ann} P \geqslant p$. Ponieważ wyżej wykazaliśmy, że zawsze $\dim \operatorname{Ann} P \leqslant p$, więc $\dim \operatorname{Ann} P = p$. ■

TWIERDZENIE 7. *Niech $U = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p \rangle$ i $W = \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p \rangle$ będą dwiema podprzestrzeniami liniowymi w V tego samego wymiaru p. Wówczas $U = W$ wtedy i tylko wtedy, gdy p-wektory $P = \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$ i $Q = \mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_p$ są proporcjonalne.*

Dowód. Jeśli $U = W$, to $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p)$ i $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p)$ są dwiema bazami w tej samej przestrzeni; wiemy już (wzór (14')), że wtedy $P = \lambda Q$. Na odwrót, jeśli $P = \lambda Q$, gdzie $\lambda \neq 0$, to ponieważ w dowodzie twierdzenia 6 wykazaliśmy, że $U = \operatorname{Ann} P$, więc

$$U = \operatorname{Ann} P = \operatorname{Ann} Q = W. \ ■$$

A oto uogólnienie twierdzeń 6 i 7:

TWIERDZENIE 8. *Niech $U = \operatorname{Ann} P$ i $W = \operatorname{Ann} Q$, gdzie P jest p-wektorem prostym, a Q — q-wektorem prostym. Wtedy:*

(a) *$U \supset W \Leftrightarrow P = Q \wedge R$ dla pewnego $(p-q)$-wektora R.*
(b) *$U \cap W = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow P \wedge Q \neq 0$. Jeśli $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, to $U \oplus W = \operatorname{Ann}(P \wedge Q)$.*

Dowód. Stwierdzenie (a) jest częścią twierdzenia 6. Jeśli teraz $P = \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$, $Q = \mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_q$ oraz $P \wedge Q \neq 0$, to wektory $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$ dla $i = 1, \ldots, p$ oraz $j = 1, \ldots, q$ są liniowo niezależne i tworzą bazę podprzestrzeni $U \oplus W$. Jeśli natomiast $P \wedge Q = 0$, to istnieje między nimi nietrywialna zależność liniowa

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{a}_p + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \beta_q \mathbf{b}_q = \mathbf{0},$$

z której wynika, że $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$. ■

5. Kryteria prostoty p-wektorów. Twierdzenia 6–8 wskazują na szczególną rolę p-wektorów prostych, pojawiających się również w innych zagadnieniach.

Sprawdzenie, czy dany p-wektor $P \in \bigwedge^p V$ jest prosty, można przeprowadzić, jeśli znamy jego współrzędne w pewnej bazie.

Istotnie, niech $\mathbf{x} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i$ będzie dowolnym wektorem. Iloczyn zewnętrzny $P \wedge \mathbf{x}$ jest $(p+1)$-wektorem, którego współrzędne są (danymi) formami liniowymi zmiennych $x^1, \ldots, x^n$. Współrzędnych tych jest $\binom{n}{p+1}$. Warunek $\mathbf{x} \in \operatorname{Ann} P$ jest więc równoważny układowi $\binom{n}{p+1}$ równań liniowych jednorodnych o n niewiadomych. Zbiór rozwiązań tego układu, czyli $\operatorname{Ann} P$, ma na mocy twierdzenia 6 wymiar $r \leqslant p$, przy czym $r = p$ wtedy i tylko wtedy, gdy p-wektor P jest prosty. Inaczej mówiąc, p-wektor P jest prosty dokładnie wtedy, gdy rząd macierzy rozpatrywanego układu nie przekracza $n - p$, czyli gdy wszystkie minory stopnia $n - p + 1$ tej macierzy są zerami. To jest właśnie szukany warunek prostoty.

TWIERDZENIE 9. *Każdy niezerowy $(n-1)$-wektor P w przestrzeni n-wymiarowej jest prosty.*

Dowód. Niech $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ będzie dowolną bazą w V. Ponieważ n-wektor $\mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n$ stanowi bazę jednowymiarowej przestrzeni $\bigwedge^n V$, więc dla każdego $\mathbf{x} \in V$ mamy

$$P \wedge \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n,$$

gdzie $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{K}$. Z własności iloczynu zewnętrznego wynika, że funkcja $f : V \to \mathfrak{K}$ jest liniowa. Ponadto $\operatorname{Ann} P = \operatorname{Ker} f$, a więc $\dim \operatorname{Ann} P \geqslant n - 1$. Z drugiej strony, $\dim \operatorname{Ann} P \leqslant n - 1$ na mocy twierdzenia 6. Wobec tego $\dim \operatorname{Ann} P = n - 1$, a to oznacza, że $(n-1)$-wektor P jest prosty, znowu na podstawie twierdzenia 6. ■

Przykład 2. Niech $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ będzie bazą ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej V. Jeśli $P = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$, to

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} = (\mathbf{c} \,|\, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,$$

gdzie $(\mathbf{c} \,|\, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Można sprawdzić, że $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ jest iloczynem wektorowym wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Jeśli p-wektor P jest prosty, to oczywiście $P \wedge P = 0$. Okazuje się, że dla $p = 2$ prawdziwa jest też implikacja odwrotna:

TWIERDZENIE 10. *Biwektor*

$$P = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \tag{18}$$

jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $P \wedge P = 0$.

Dowód. Mamy wykazać, że jeśli $P \wedge P = 0$, to biwektor P jest prosty. Rozumujemy przez indukcję względem $n = \dim V$. Dla $n = 3$ teza wynika z twierdzenia 9.

Wydzielmy w (18) składniki zawierające $\mathbf{e}_1$:

$$P = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + Q,$$

gdzie $\mathbf{a}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ oraz

$$Q = \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} P^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j. \tag{19}$$

Można przyjąć, że $Q \neq 0$ (w przeciwnym razie biwektor P jest prosty). Z warunku $P \wedge P = 0$ wynika, że

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a}) \wedge Q + Q \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a}) + Q \wedge Q = 0.$$

Ponieważ iloczyn zewnętrzny jest antyprzemienny (równość (10)), więc

$$2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge Q + Q \wedge Q = 0. \tag{20}$$

Jeśli oba składniki po lewej stronie równości zapiszemy w bazie $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l$ $(i < j < k < l)$, to pierwszy składnik będzie kombinacją liniową czterowektorów $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l$, podczas gdy (na mocy (19)) w zapisie $Q \wedge Q$ żaden z tych czterowektorów nie wystąpi. Wobec tego równość (20) rozpada się na dwie równości

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge Q = 0, \qquad Q \wedge Q = 0. \tag{21}$$

Możemy jednak uważać, że $Q \in \bigwedge^2 U$, gdzie $U = \langle \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$. Na mocy założenia indukcyjnego biwektor Q jest prosty: $Q = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Jeśli podstawimy to wyrażenie do pierwszej równości w (21), otrzymamy

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0, \tag{22}$$

co oznacza liniową zależność wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, a w konsekwencji liniową zależność wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in U$.

Jeśli $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, to $P = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{e}_1 - \lambda \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}$ i dowód jest zakończony. Możemy wobec tego przyjąć, że wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ są liniowo niezależne. Wtedy $R := \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$ (twierdzenie 4) oraz $\dim \operatorname{Ann} R = 3$ (twierdzenie 3); dokładniej, $\operatorname{Ann} R = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Ale (22) oznacza, że również $\mathbf{c} \in \operatorname{Ann} R$, więc $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$. Wtedy

$$Q = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

i ostatecznie

$$P = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + Q = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a}. \blacksquare$$

WNIOSEK. *Biwektor*

$$\begin{aligned} P = {} & P^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + P^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + P^{14}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 \\ & + P^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + P^{24}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + P^{34}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne P^{ij} spełniają warunek

$$P^{12}P^{34} - P^{13}P^{24} + P^{14}P^{23} = 0. \blacksquare \tag{23}$$

Niech teraz $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$ będzie trójwymiarową przestrzenią rzutową, generowaną przez czterowymiarową rzeczywistą przestrzeń liniową V. Przypomnijmy, że proste rzutowe w $\mathbb{P}^3$ odpowiadają dwuwymiarowym podprzestrzeniom liniowym $U \subset V$. Na mocy twierdzenia 6 każda taka podprzestrzeń jest anihilatorem pewnego biwektora prostego P, wyznaczonego jednoznacznie z dokładnością do stałej. Inaczej mówiąc, współrzędne $(P^{12} : P^{13} : \ldots : P^{34})$ biwektora P można uważać za współrzędne jednorodne prostej rzutowej w $\mathbb{P}^3$ (tzw. *współrzędne Plückera*). Współrzędne te (jest ich 6) określają też punkt w $\mathbb{RP}^5$. Widzimy, że proste rzutowe w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej odpowiadają wzajemnie jednoznacznie punktom kwadryki o równaniu (23) w pięciowymiarowej przestrzeni rzutowej.

ĆWICZENIA

1. Niech $V = \mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią rozpiętą na wektorach kolumnowych $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$, a B — dowolnym wektorem kolumnowym. Wykazać, że współrzędne λ_k rozwiązania równania wektorowego

$$\sum_k \lambda_k A^{(k)} = B$$

są wyznaczone przez relacje

$$(A^{(1)} \wedge \ldots \wedge A^{(n)})\lambda_k = A^{(1)} \wedge \ldots \wedge A^{(k-1)} \wedge B \wedge A^{(k+1)} \wedge \ldots \wedge A^{(n)}.$$

Wyprowadzić stąd wzory Cramera (część I, rozdz. 3, § 3).

2. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathfrak{K}$ o charakte rystyce zero, a

$$Z = \sum_{k=0}^{n} Z_k \quad (Z_k \in \textstyle\bigwedge^k V)$$

— elementem algebry zewnętrznej $\bigwedge V$. *Centrum* tej algebry to z definic zbiór

$$\mathcal{Z}(\textstyle\bigwedge V) = \{Z \in \bigwedge V \mid Z \wedge X = X \wedge Z \ \forall X \in \bigwedge V\}.$$

Wykazać, że:

(a) element Z jest odwracalny (tj. istnieje element $Z^{-1} \in \bigwedge V$ taki, że $Z \wedge Z^{-1} = 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy $Z_0 \neq 0$;

(b) $Z \in \mathcal{Z}(\bigwedge V) \Leftrightarrow \begin{cases} Z_{2i-1} = 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m, & \text{jeśli } n = 2m, \\ Z_{2i-1} = 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m-1, & \text{jeśli } n = 2m-1. \end{cases}$

Jak należy przeformułować te warunki, jeśli przestrzeń V jest nieskończenie wymiarowa?

3. Niech $\mathcal{A} : V \to V$ będzie operatorem liniowym. Wykazać, że dla każdego p istnieje dokładnie jeden operator liniowy

$$\bigwedge^p \mathcal{A} : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p V,$$

zwany p-tą *potęgą zewnętrzną* operatora $\mathcal{A}$, spełniający warunek

$$(\bigwedge^p \mathcal{A})(\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}(\mathbf{x}_p)$$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}_i \in V$. Udowodnić, że

$$\det(\bigwedge^p \mathcal{A}) \cdot \det(\bigwedge^{n-p} \mathcal{A}) = (\det \mathcal{A})^{\binom{n}{p}}.$$

4. Niech q będzie niezdegenerowaną formą kwadratową na przestrzeni liniowej V, a f — odpowiadającą jej symetryczną formą dwuliniową. Wtedy na przestrzeni $\bigwedge^p V$ (dla $p \geqslant 0$) istnieje dokładnie jedna forma kwadratowa $q^{\wedge p}$ spełniająca warunek

$$q^{\wedge 0} = 1, \qquad q^{\wedge p}(\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p) = \begin{vmatrix} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \ldots & f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_1) & \ldots & f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p) \end{vmatrix}.$$

Udowodnić, że w ten sposób otrzymujemy niezdegenerowaną formę kwadratową na $\bigwedge V$.

5. Nazwijmy *orientacją* n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej V element $d \in \bigwedge^n V$, dla którego $(d \mid d)^{\wedge n} = 1$ (tutaj $(* \mid *)^{\wedge n}$ oznacza formę kwadratową na $\bigwedge^n V$, o której mowa w ćwiczeniu 4).

Z drugiej strony, jeśli $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ i $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ są dwiema bazami w rzeczywistej przestrzeni liniowej V, to powiemy, że są one *zgodnie zorientowane*, jeśli wyznacznik macierzy przejścia od jednej z tych baz do drugiej jest dodatni. Widać, że kolejność elementów bazy jest tu istotna oraz że otrzymujemy w ten sposób relację równoważności w zbiorze wszystkich uporządkowanych baz przestrzeni liniowej V. Ponadto relacja ta ma dokładnie dwie klasy równoważności; każdą z nich nazywamy *orientacją* przestrzeni V.

Czy istnieje związek między tymi dwiema definicjami orientacji?