należy do M na mocy wypukłości tego zbioru (rys. 9). Mamy wówczas $\dot{r} \in \dot{p}\dot{q}$, co mieliśmy wykazać. Jeśli punkty $\dot{p}$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ leżą na jednej prostej, to jako $\dot{q}$ można wziąć po prostu jeden z punktów $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$. ∎

TWIERDZENIE 13. *Niech $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją afiniczną, a S sympleksem domkniętym $\operatorname{conv}(\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m\})$ w przestrzeni $\mathbb{A}$. Wtedy funkcja f przyjmuje swoją największą wartość na S w jednym z wierzchołków:*

$$\max_{\dot{p}\in S} f(\dot{p}) = \max_i f(\dot{p}_i).$$

Dowód. Dla $m = 0$ teza jest oczywista. Dalej rozumujemy przez indukcję względem m. Załóżmy, że największa wartość funkcji f na zbiorze wypukłym $M = \operatorname{conv}(\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_{m-1}\})$ jest równa $\max_{i<m} f(\dot{p}_i)$. Na mocy stwierdzenia 1 każdy punkt $\dot{s} \in S$ należy do pewnego odcinka $\dot{p}_m q$, gdzie $\dot{q} \in M$, czyli

$$\dot{s} = (1-\lambda)\dot{p}_m + \lambda\dot{q}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Ponieważ funkcja f jest afiniczna, więc

$$f(\dot{s}) = (1-\lambda)f(\dot{p}_m) + \lambda f(\dot{q}) \leqslant \max(f(\dot{p}_m), f(\dot{q})) \leqslant \max_{i\leqslant m} f(\dot{p}_i). \;\blacksquare$$

Nieskomplikowane twierdzenie 13 zalicza się do programowania liniowego, dziedziny ważnej z punktu widzenia zastosowań.

ĆWICZENIA

1. Wykazać, że grupa $\mathrm{A}_1(\mathbb{F}_p)$ automorfizmów prostej afinicznej nad ciałem o p elementach (gdzie p jest liczbą pierwszą) ma rząd $p(p-1)$. Z jaką grupą jest izomorficzna grupa $\mathrm{A}_1(\mathbb{F}_3)$?
2. Podać opis geometryczny izometrii właściwej f płaszczyzny euklidesowej, jeśli
$$Df = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad f(\dot{o}) = (1,1).$$
3. Przedstawić klasyfikację izometrii właściwych czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej (afinicznej).

§ 4. PRZESTRZENIE Z METRYKĄ NIEOKREŚLONĄ

1. Metryka nieokreślona. Przyjęliśmy rozumieć przez przestrzeń z iloczynem skalarnym przestrzeń liniową V wraz z ustaloną niezdegenerowaną formą $(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$ (symetryczną dwuliniową w przypadku rzeczywistym, hermitowską w przypadku zespolonym) o tej własności, że odpowiadająca jej forma kwadratowa

$$q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$$

jest dodatnio określona. Przestrzenie V z taką formą nazwaliśmy euklidesowymi w przypadku $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$, a unitarnymi dla $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$; omówiliśmy je szczegółowo w rozdziale 3.

Ważną rolę odgrywają też przestrzenie z tzw. metryką nieokreśloną, odpowiadającą niezdegenerowanej nieokreślonej formie kwadratowej q. Jak wiemy (rozdz. 1, § 4), w odpowiedniej bazie $(\mathbf{e}_i)$ przestrzeni (rzeczywistej) V każda niezdegenerowana forma kwadratowa przyjmuje postać normalną

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_n^2. \tag{1}$$

Odpowiada jej (poprzez polaryzację) symetryczna forma dwuliniowa

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) := x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \ldots - x_n y_n.$$

Aby pozostawać w dziedzinie rzeczywistej, będziemy mówić tylko o „kwadracie normy” $\|\mathbf{x}\|^2 := q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$ wektora $\mathbf{x}$, który to kwadrat może mieć teraz jednak wartość zarówno dodatnią, jak i ujemną. Wektor $\mathbf{x}$ nazywamy *izotropowym*, jeśli $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$.

Jeśli $\mathbb{E}$ jest przestrzenią afiniczną stowarzyszoną z przestrzenią liniową V, to na $\mathbb{E}$ można określić „kwadrat odległości” wzorem

$$\varrho^2(\dot{p}, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{s} (y_i - x_i)^2 - \sum_{i=s+1}^{n} (y_i - x_i)^2$$

dla $\dot{p}(x_1, \ldots, x_n), \dot{q}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}$.

Formę kwadratową $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ nazywamy też *formą metryczną* przestrzeni liniowej V, a $\varrho^2(\dot{p}, \dot{q})$ - *formą metryczną* przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}$. Jeśli $1 \leqslant s \leqslant n-1$, to przestrzeń afiniczną $\mathbb{E}$ nazywamy *przestrzenią pseudoeuklidesową*, a dla $s = 1$ mówimy o *przestrzeni Minkowskiego* (niekiedy termin ten używany jest dla $s = n-1$, ale to nieistotna różnica, polegająca na zamianie formy q na $-q$). Dla $n = 4$ przestrzeń Minkowskiego odpowiada fizycznej czasoprzestrzeni i odgrywa ważną rolę we wszystkich kwestiach związanych ze szczególną teorią względności.

2. Izometrie pseudoeuklidesowe. Zgodnie z ogólną filozofią, przedstawioną w § 3 (p. 4), geometria przestrzeni pseudoeuklidesowej jest wyznaczona przez grupę G *izometrii pseudoeuklidesowych*, czyli przekształceń $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ zachowujących wielkość $\varrho^2(\dot{p}, \dot{q})$; podobnie jak w przypadku euklidesowym, każda taka izometria jest przekształceniem afinicznym, a także złożeniem translacji i izometrii należącej do *podgrupy stacjonarnej* ustalonego punktu $\dot{o} \in \mathbb{E}$, czyli izometrii, dla której $\dot{o}$ jest punktem stałym. Ta ostatnia podgrupa jest izomorficzna z *grupą pseudoortogonalną* $\mathrm{O}(V)$ przestrzeni liniowej V, złożoną z tych operatorów liniowych $\mathcal{F} : V \to V$, które zachowują formę dwuliniową $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$; mówimy też, że $\mathrm{O}(V)$ jest *grupą automorfizmów formy kwadratowej* q.

Jeśli $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jest bazą przestrzeni V, w której forma q ma postać normalną (1), to macierzą formy q w tej bazie jest

$$I_s = \begin{Vmatrix} E_s & 0 \\ 0 & -E_{n-s} \end{Vmatrix},$$

a macierz F operatora $\mathcal{F} \in \mathrm{O}(V)$ spełnia warunek

$${}^tFI_sF = I_s$$

(wystarczy przypomnieć regułę transformacji macierzy formy kwadratowej przy przejściu od jednej bazy do drugiej, w tym wypadku do bazy $(\mathcal{F}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{F}\mathbf{e}_n)$). Zbiór wszystkich takich macierzy oznaczamy przez $\mathrm{O}(s, n-s)$ i nazywamy *grupą pseudoortogonalną*. Dla $s = n$ otrzymujemy grupę ortogonalną $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, 0)$. Widać, że podobnie jak w przypadku ortogonalnym mamy $\det \mathcal{F} = \det F = \pm 1$. Jeśli $\det \mathcal{F} = 1$, to $\mathcal{F}$ nazywamy *automorfizmem właściwym* formy q, a przekształcenie afiniczne f, dla którego $Df = \mathcal{F}$ - *właściwą izometrią pseudoeuklidesową*. Zauważmy, że automorfizm $\mathcal{F}$ formy q przeprowadza wektory izotropowe na izotropowe, ponieważ jeśli $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, to $q(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

3. Grupa Lorentza. Jak już zauważyliśmy, szczególną rolę odgrywa czterowymiarowa przestrzeń rzeczywista z niezdegenerowaną formą kwadratową o sygnaturze $(1, 3)$.

DEFINICJA 1. Grupę $\mathrm{O}(1, 3)$ nazywamy *grupą Lorentza*; oznaczamy ją też przez $\mathbf{L}$.

Następujące oznaczenia są standardowe w tym przypadku:

$$V = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle,$$
$$\mathbf{x} = t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,$$
$$\|\mathbf{x}\|^2 = q(\mathbf{x}) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Dostatecznie interesujący jest już przypadek „jednowymiarowej grupy Lorentza” $\mathbf{L}_1$ automorfizmów dwuwymiarowej przestrzeni liniowej zachowujących formę

$$(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}) = t^2 - x^2.$$

Grupa $\mathbf{L}_1$ opisuje ruch fizyczny po prostej (zauważmy, że teraz $\mathbf{u} = t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1$). Każdy wektor izotropowy jest proporcjonalny albo do $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$, albo do $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1$. Ponieważ każdy operator pseudoortogonalny $\mathcal{F}$ zachowuje wektory izotropowe, mamy dwie możliwości:

1) $\mathcal{F}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = \alpha(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1), \quad \mathcal{F}(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = \beta(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1),$

2) $\mathcal{F}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = \alpha(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1), \quad \mathcal{F}(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = \beta(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1).$

Rozpatrzmy jedną z tych możliwości, np. pierwszą. Mamy

$$\mathcal{F}e_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}e_0 + \frac{\alpha-\beta}{2}e_1,$$
$$\mathcal{F}e_1 = \frac{\alpha-\beta}{2}e_0 + \frac{\alpha+\beta}{2}e_1.$$

Macierz

$$F = \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{Vmatrix}$$

operatora $\mathcal{F}$ ma wyznacznik $\det F = \alpha\beta$. Ograniczymy się do właściwych przekształceń Lorentza, tzn. przyjmiemy, że $\alpha\beta = 1$. Dla transformacji współrzędnych wektora przy przejściu od bazy (e_0, e_1) do $(\mathcal{F}e_0, \mathcal{F}e_1)$ otrzymujemy wzór

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha^{-1}+\alpha}{2} & \dfrac{\alpha^{-1}-\alpha}{2} \\ \dfrac{\alpha^{-1}-\alpha}{2} & \dfrac{\alpha^{-1}+\alpha}{2} \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

(z macierzą odwrotną do F; rozdz. 1, § 2, twierdzenie 4), skąd

$$t' = \frac{\alpha^{-1}+\alpha}{2}\left(t + \frac{\alpha^{-1}-\alpha}{\alpha^{-1}+\alpha}x\right),$$

$$x' = \frac{\alpha^{-1}+\alpha}{2}\left(\frac{\alpha^{-1}-\alpha}{\alpha^{-1}+\alpha}t + x\right).$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{\alpha+\alpha^{-1}} = v = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}. \tag{2}$$

Wielkość ta odpowiada fizycznej prędkości. Zauważmy, że zawsze $|v| < 1$, a więc mają sens następujące wzory, wynikające z (2):

$$\alpha^2 = \frac{1-v}{1+v}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}},$$
$$\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$t' = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}. \qquad ($$

Ta elegancka postać odpowiada przyjęciu, że prędkość światła wynosi 1. Pr zwykłym skalowaniu prędkości mielibyśmy

$$t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad ($$

co odpowiada formie kwadratowej $c^2t^2 - x^2$. Dla prostoty będziemy się posługiwać wzorami (3). Okazuje się, że równania elektrodynamiki Maxwella nie zmieniają swej postaci po dokonaniu przekształcenia Lorentza. Nawiązując do idei wypowiedzianej po raz pierwszy przez matematyka Henri Poincarégo, Albert Einstein przyjął, że wszystkie prawa fizyczne powinny być niezmiennicze względem przekształceń Lorentza (dla $n = 4$). Stanowiło to początek szczególnej teorii względności. Nie będziemy się zajmować interpretacją fizyczną ani konsekwencjami wzorów (3). Zauważmy jedynie, że jeśli prędkość światła c dąży do ∞, to dla prędkości v małych w stosunku do prędkości światła w tym sensie, że $v/c \to 0$, przekształcenia (3′) dążą do przekształceń Galileusza

$$t' = t, \qquad x' = x - vt.$$

W ogólnym przypadku każdy punkt czasoprzestrzeni ma dwie współrzędne czasową i przestrzenną. Przypuśćmy, że w danym układzie współrzędnych w chwili $t = t_1$ mamy dwa punkty (t_1, x_1) i (t_1, x_2). W nowym (poruszającym się) układzie współrzędnych będą one miały już inne czasy t_1', t_2'. Zbadajmy, jak zmieni się ich (przestrzenna) odległość:

$$x_1' - x_2' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{x_2 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Na odwrót, biorąc $x_1 = x_2$, otrzymamy transformację czasu.

Jeśli oznaczymy przekształcenie (3) przez g_v, to

$$g_{v_1} \circ g_{v_2} = g_v$$

dla pewnego v. Znajdziemy parametr (prędkość) v. Przyjmując

$$t' = \frac{t - v_1 x}{\sqrt{1 - v_1^2}}, \qquad x' = \frac{x - v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2}},$$

$$t'' = \frac{t' - v_2 x'}{\sqrt{1 - v_2^2}}, \qquad x'' = \frac{x' - v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2}},$$

otrzymamy

$$t'' = \frac{t - v_1 x - v_2(x - v_1 t)}{\sqrt{1 - v_1^2} \cdot \sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{t - (v_1 + v_2)x/(1 + v_1 v_2)}{\sqrt{1 - ((v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2))^2}}.$$

Stąd

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2};$$

wzór ten nosi nazwę prawa składania prędkości.

4. Właściwa grupa Lorentza. W przypadku jednowymiarowym otrzymaliśmy jawny wzór (3) na przekształcenia Lorentza. Wzór ogólny dla przekształcenia zachowującego formę

$$q(\mathbf{x}) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{4}$$

byłby bardzo skomplikowany. Dlatego opiszemy grupę $\mathbf{L}$ w nieco inny sposób. Każdemu wektorowi $\mathbf{x} = (t, x_1, x_2, x_3)$ rzeczywistej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ przypisujemy mianowicie macierz hermitowską

$$P_{\mathbf{x}} = \begin{Vmatrix} t - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & t + x_3 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

stopnia 2. Odpowiedniość $\mathbf{x} \mapsto P_{\mathbf{x}}$ między wektorami i macierzami hermitowskimi jest wzajemnie jednoznaczna i liniowa (nad $\mathbb{R}$):

$$P_{\mu\mathbf{x}+\nu\mathbf{y}} = \mu P_{\mathbf{x}} + \nu P_{\mathbf{y}}, \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Każdej macierzy zespolonej o wyznaczniku 1:

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

tj. każdemu elementowi grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, przypiszemy teraz odwzorowanie Γ_A przestrzeni macierzy hermitowskich w tę samą przestrzeń, przyjmując

$$\Gamma_A(P_{\mathbf{x}}) = AP_{\mathbf{x}}A^*,$$

gdzie A^* jest macierzą hermitowsko sprzężoną do A, $A^* = {}^t\bar{A}$. Widać, że

$$\{\Gamma_A(P_{\mathbf{x}})\}^* = A^{**}P_{\mathbf{x}}^*A^* = \Gamma_A(P_{\mathbf{x}}).$$

czyli istotnie macierz $\Gamma_A(P_{\mathbf{x}})$ jest hermitowska. Ponieważ

$$\Gamma_A(\Gamma_B(P_{\mathbf{x}})) = ABP_{\mathbf{x}}B^*A^* = ABP_{\mathbf{x}}(AB)^* = \Gamma_{AB}(P_{\mathbf{x}}),$$

więc

$$\Gamma_A\Gamma_B = \Gamma_{AB}.$$

Ponadto odwzorowanie Γ_A jest liniowe:

$$\Gamma_A(\mu P_{\mathbf{x}} + \nu P_{\mathbf{y}}) = \mu\Gamma_A(P_{\mathbf{x}}) + \nu\Gamma_A(P_{\mathbf{y}}), \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że

$$\det A \cdot \det P_{\mathbf{x}} \cdot \det A^* = \det P_{\mathbf{x}},$$

ponieważ $\det A = \det A^* = 1$ z założenia. Ale

$$\det P_{\mathbf{x}} = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Tak więc operator liniowy Γ_A zachowuje formę kwadratową (4). Wynika stą w szczególności, że $\det \Gamma_A = \pm 1$. Proste argumenty topologiczne (ciągłość funkc det i spójność grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$) prowadzą do wniosku, że w rzeczywistości $\det I$ $= 1$. Przy pewnym wysiłku można to również udowodnić bezpośrednio (ćwicz nie 2).

Równanie

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad ($$

określa w $\mathbb{R}^4$ pewien stożek — specjalną powierzchnię drugiego stopnia (czyli kwadrykę, jak powiemy w następnym rozdziale) o tej własności, że prosta przechodząca przez początek układu i dowolny punkt tej powierzchni zawiera się całkowicie w tej powierzchni. Warunek $t > 0$ wydziela tzw. *górną powłokę* stożka (6).

Łatwo obliczyć, że jeśli λ_1 i λ_2 są (rzeczywistymi) wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $P_{\mathbf{x}}$, to

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} P_{\mathbf{x}} = 2t, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \det P_{\mathbf{x}} = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

W szczególności macierz $P_{\mathbf{x}}$ jest dodatnio określona (rozdz. 3, § 3, p. 8) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$t > 0, \qquad t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0.$$

Z drugiej strony, z definicji dodatniej określoności wynika natychmiast, że jeśli macierz $P_{\mathbf{x}}$ jest dodatnio określona, to macierz $\Gamma(P_{\mathbf{x}}) = AP_{\mathbf{x}}A^*$ również. Wobec tego powyższe nierówności zachowują się przy działaniu operatora Γ_A, który zatem zachowuje nie tylko stożek (6), ale i jego górną powłokę.

Podsumujmy własności Γ_A:

(i) Γ_A jest automorfizmem formy kwadratowej (4);

(ii) $\det \Gamma_A = 1$;

(iii) Γ_A zachowuje górną powłokę stożka (6).

DEFINICJA 2. Każdy operator liniowy $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ spełniający warunki (i) (iii) nazywamy *właściwym przekształceniem Lorentza*, a grupę $\mathbf{L}^+$ tych przekształceń — *właściwą grupą Lorentza*.

W rzeczywistości homomorfizm $\Gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbf{L}^+$ przeprowadzający A na Γ_A jest epimorfizmem (ćwiczenie 3). Znajdziemy jego jądro. Załóżmy, że $\Gamma_A = \mathcal{E}$, tj.

$$P_{\mathbf{x}} = AP_{\mathbf{x}}A^*$$

dla dowolnej macierzy hermitowskiej $P_{\mathbf{x}}$. W szczególności dla $\mathbf{e} = (1, 0, 0, 0)$ mamy $P_{\mathbf{e}} = E$ i $AA^* = E$, czyli $A^* = A^{-1}$, a więc

$$AP_{\mathbf{x}} = P_{\mathbf{x}}A.$$

Dobierając odpowiednie macierze $P_{\mathbf{x}}$, dojdziemy do wniosku, że $A = \alpha E$, a ponieważ $\det A = 1$, więc $\alpha = \pm 1$. Wobec tego $\operatorname{Ker} \Gamma = \{\pm E\}$.

W ten sposób otrzymujemy

TWIERDZENIE 1. *Odwzorowanie $\Gamma : A \mapsto \Gamma_A$ grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ macierzy zespolonych stopnia 2 o wyznaczniku 1 w grupę $\mathbf{L}^+$ właściwych przekształceń Lorentza jest epimorfizmem. Każde właściwe przekształcenie Lorentza jest przy tym odwzorowaniu obrazem dokładnie dwóch macierzy zespolonych różniących się tylko znakiem.* ∎

W świetle tego twierdzenia niekiedy samą grupę $SL_2(\mathbb{C})$ nazywa się grupą Lorentza; przy naszej definicji jest to grupa ilorazowa $SL_2(\mathbb{C})/\{\pm E\}$ ([1]).

Ponieważ z definicji forma kwadratowa $q(\mathbf{x})$ jest niezmiennicza względem przekształceń Lorentza, więc przekształcenia te zachowują również powierzchnie S_c określone przez równania

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $c > 0$, to S_c jest hiperboloidą dwupowłokową; dla $c < 0$ mamy hiperboloidę jednopowłokową; wreszcie S_0 to stożek (z terminologią tą będziemy mieć stale do czynienia w następnym rozdziale). Na każdej z tych powierzchni (i osobno na każdej powłoce hiperboloidy lub stożka) przekształcenie Γ_A jest izometrią, tzn. zachowuje „kwadrat odległości".

Górna powłoka hiperboloidy

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \qquad t > 0,$$

wraz z działającą na niej grupą izometrii $\mathbf{L}^+$ (lub $SL_2(\mathbb{C})$) jest jednym z modeli przestrzeni Łobaczewskiego Λ^3. Nie będziemy się na razie zatrzymywać na samym pojęciu przestrzeni Łobaczewskiego, zwrócimy jednak uwagę na pewien fakt. Jak już stwierdziliśmy, grupa przekształceń G pewnej przestrzeni S jest najbardziej interesująca w przypadku, gdy każdy punkt $\dot{p} \in S$ można przeprowadzić na każdy inny punkt $\dot{q} \in S$ za pomocą pewnego przekształcenia $g \in G$, lub, co na jedno wychodzi, każdy punkt $\dot{q} \in S$ jest obrazem przy pewnym $g \in G$ ustalonego punktu $\dot{p}_0 \in S$. Mówimy wtedy, że działanie grupy G na przestrzeni S jest przechodnie. Zauważyliśmy już w § 3, że grupa $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ działa w sposób przechodni na przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$, a grupa $\mathrm{Iso}(\mathbb{E})$ — na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$. Grupa $O(n)$ działa oczywiście w sposób przechodni na sferze $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (jak to najprościej uzasadnić?).

Wykażemy teraz, że działanie właściwej grupy Lorentza $\mathbf{L}^+$ na Λ^3 jest przechodnie. Podobnie jak poprzednio, punktowi $\mathbf{x} = (t, x_1, x_2, x_3) \in \Lambda^3$ przyporządkujemy macierz hermitowską $P_{\mathbf{x}}$ (zob. (5)). Macierz ta jest zatem dodatnio określona i ma wyznacznik 1. Wiemy, że każdą taką macierz można przedstawić w postaci

$$P_{\mathbf{x}} = AA^* = A \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} A^*,$$

gdzie $A = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ jest pewną macierzą zespoloną o wyznaczniku 1. Oznacza to, że $P_{\mathbf{x}}$ otrzymuje się z ustalonej macierzy $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ w wyniku izometrii Γ_A.

([1]) Pojęcie grupy ilorazowej pojawi się dopiero w części III, choć można je zdefiniować teraz: mówimy, że grupa L jest *grupą ilorazową* grupy G względem podgrupy H, jeśli L obrazem pewnego homomorfizmu określonego na G z jądrem H; okazuje się, że grupa taka (istnieje) jest wyznaczona jednoznacznie przez G i H z dokładnością do izomorfizmu (*przy tłum.*).

Podgrupą stacjonarną $\mathbf{L}^+_{\mathbf{x}_0}$ punktu $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 0)$ jest zbiór tych wszystkich izometrii Γ_A, dla których

$$A \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} A^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Inaczej mówiąc, $AA^* = E$. Ponieważ również $\det A = 1$, więc ostatecznie

$$\mathbf{L}^+_{\mathbf{x}_0} \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm E\} \cong \mathrm{SO}(3)$$

(ten ostatni izomorfizm udowodnimy w części III; nie będziemy go na razie wykorzystywać). Izometrie przestrzeni Λ^3 nazywa się niekiedy *ruchami hiperbolicznymi*.

ĆWICZENIA

1. Rozpatrzyć szczegółowo drugi wariant działania operatora $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_1$ (p. 3).
2. Udowodnić, że operator liniowy Γ_A na przestrzeni $\mathbb{R}^4$, określony w punkcie 4, spełnia warunek $\det \Gamma_A = 1$.
3. Udowodnić, że homomorfizm $\Gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbf{L}^+$ jest epimorfizmem, czyli odwzorowaniem na całą grupę $\mathbf{L}^+$.
4. Aby głębiej wniknąć w aspekty fizyczne przestrzeni Minkowskiego i grupy Lorentza, zapoznać się z § 12 w części 2 podręcznika [2].