2. Niech $\Pi = \mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ będzie płaszczyzną rzutową nad ciałem $\mathbb{F}_2$ (złożoną z siedmiu punktów); niech $\tilde{\mathbf{p}}$ i $\tilde{\mathbf{q}}$ będą dwoma różnymi jej punktami. Ile istnieje automorfizmów płaszczyzny Π, przeprowadzających $\tilde{\mathbf{p}}$ na $\tilde{\mathbf{q}}$?

3. Udowodnić, że każde przekształcenie rzutowe przestrzeni rzutowej zespolonej ma co najmniej jeden punkt stały.

§ 4. KWADRYKI W PRZESTRZENI RZUTOWEJ

1. Klasyfikacja. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru $n+1 \geqslant 2$, q — formą kwadratową na V, a f — odpowiadającą jej symetryczną formą dwuliniową. Zbiór C tych wektorów $\mathbf{x} \in V$, dla których $q(\mathbf{x}) = 0$, nazywamy *stożkiem izotropowym* formy q. Jeśli zbiór ten nie składa się tylko z $\mathbf{0}$, to obraz $\tilde{C}$ zbioru $C \setminus \{\mathbf{0}\}$ przy odwzorowaniu kanonicznym $\pi : V \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}(V)$ (§ 3) nazywamy *kwadryką rzutową* (*stożkową rzutową* dla $n = 2$). Definicja ta jest zgodna z wcześniejszą ogólną definicją zbioru algebraicznego w przestrzeni rzutowej — wystarczy zapisać formę q w (dowolnych) współrzędnych jednorodnych.

Jeśli forma q jest niezdegenerowana, to i kwadrykę $\tilde{C}$ nazywamy *niezdegenerowaną*. Jeśli $\tilde{C}$ jest podprzestrzenią rzutową wymiaru $n-r$, gdzie $r < n$ (czyli ma równanie $x_0^2 + \ldots + x_r^2 = 0$ w odpowiednim układzie współrzędnych), to podobnie jak w przypadku afinicznym mówimy, że $\tilde{C}$ jest *podprzestrzenią podwójną*.

Wybierzmy w V dowolną bazę $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Wtedy w odpowiednim układzie współrzędnych o początku w $\mathbf{0}$ stożek C jest określony przez równanie

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} \varphi_{ij} x_i x_j = 0. \tag{1}$$

Jest to także równanie kwadryki $\tilde{C}$ we współrzędnych jednorodnych. Jak wiadomo, bazę $(\mathbf{e}_i)$ można wybrać tak, by forma q przybrała postać normalną. Ponieważ obie strony równania (1) można pomnożyć przez -1, mamy prawo zakładać, że w tej postaci normalnej co najmniej połowa kwadratów współrzędnych występuje ze znakiem plus.

Powołując się teraz na prawo bezwładności form kwadratowych oraz na fakt, że przejście od jednej bazy w V do drugiej odbywa się za pomocą przekształcenia $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$, któremu odpowiada przekształcenie rzutowe $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{PGL}(V)$ (§ 3), otrzymujemy

TWIERDZENIE 1. *Każda kwadryka w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$, niebędąca podprzestrzenią podwójną, jest rzutowo równoważna dokładnie jednej kwadryce o równaniu*

$$x_0^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \quad [r/2] \leqslant s < r. \;\blacksquare \tag{2}$$

2. Przykłady i przedstawienia afiniczne kwadryk rzutowych. Widzimy, że klasyfikacja kwadryk rzutowych jest znacznie prostsza niż w przypadku afinicznym, a tym bardziej euklidesowym. Dobrą ilustracją jest tu przykład 1 z § 3: różniące się afinicznie elipsa, hiperbola i parabola odpowiadają tej samej krzywej rzutowej w różnych mapach afinicznych. W przypadku wielowymiarowym sytuacja jest analogiczna. Na przykład w $\mathbb{P}^3$ istnieją tylko dwie różne kwadryki niezdegenerowane, określone przez równania

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0, \qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0. \tag{3}$$

Kwadryka $\widetilde{C} : \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0$ obejmuje elipsoidę, hiperboloidę dwupowłokową i paraboloidę eliptyczną: pierwsza odpowiada mapie $\mathbb{A}_3 = \mathbf{e}_3 + V_3$, druga — mapom $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$ lub $\mathbb{A}_2$, a trzecia — mapie, otrzymanej w wyniku zamiany współrzędnych

$$\beta_0 = \alpha_0, \qquad \beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \qquad \beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Wtedy równanie kwadryki $\widetilde{C}$ przybiera postać

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2\beta_3 = 0,$$

co odpowiada paraboloidzie eliptycznej w mapie $\mathbb{A}' = \mathbf{e}_3' + V_3'$. Te trzy przypadki różnią się częścią wspólną kwadryki afinicznej C_{afin} z płaszczyzną niewłaściwą $\mathbb{P}(V_i)$:

- $C_{\text{afin}} \cap \mathbb{P}(V_3) = \emptyset$, gdy C_{afin} jest elipsoidą;
- $C_{\text{afin}} \cap \mathbb{P}(V_2)$ jest okręgiem, gdy C_{afin} jest hiperboloidą dwupowłokową;
- $C_{\text{afin}} \cap \mathbb{P}(V_3')$ jest punktem podwójnym $(0:0:1:0)$, gdy C_{afin} jest paraboloidą eliptyczną.

Analogicznie można pokazać, że kwadryka odpowiadająca drugiemu z równań (3) obejmuje hiperboloidę jednopowłokową i paraboloidę hiperboliczną.

Nietrudno też znaleźć przedstawienie ogólnej kwadryki rzutowej (1) (niepustej i niebędącej podprzestrzenią podwójną) w mapie afinicznej $(\mathbb{A}, \Phi)$. Wybieramy bazę $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w V taką, że hiperplaszczyzna $\mathbb{A}$ równa się $\mathbb{A}_0 = \mathbf{e}_0 + V_0$. Wtedy $\Phi = \Phi_0$ i w układzie współrzędnych $(\mathbf{e}_0; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ kwadryka $S = \widetilde{C} \cap \mathbb{A} = \Phi_0(\widetilde{C})$ ma równanie

$$Q(\mathbf{e}_0 + \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} y_i y_j + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i0} y_i + \varphi_{00}. \tag{4}$$

Jeśli macierz $(\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ nie jest zerowa, to kwadryka afiniczna S o równaniu (4) nie jest zbiorem pustym ani podprzestrzenią podwójną. Istotnie, w przeciwnym razie funkcja kwadratowa Q przyjęłaby w pewnym układzie współrzędnych $(\mathbf{f}_0; \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ postać

$$\pm\Big(\sum_{i=1}^{r} z_i^2 + \varepsilon\Big),$$

gdzie $\varepsilon = 0$ lub $\varepsilon = 1$. Wtedy równaniem kwadryki rzutowej we współrzędnych jednorodnych odpowiadających bazie $(\mathbf{f}_i)$ byłoby $\sum_{i=1}^{r} z_i^2 = 0$ lub $\sum_{i=0}^{r} z_i^2 = 0$, co nie może mieć miejsca.

Na odwrót, każda kwadryka afiniczna S (niepusta i niebędąca podprzestrzenią podwójną) jest przedstawieniem w mapie dokładnie jednej kwadryki rzutowej w $\mathbb{P}(V)$. Istotnie, równaniu (4) kwadryki S w układzie współrzędnych $(\mathbf{e}_0; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ odpowiada forma kwadratowa q postaci (1) i stożek C. Ponieważ macierz $(\varphi_{ij})_{i,j=1}^{n}$ jest niezerowa, więc tym bardziej $(\varphi_{ij})_{i,j=0}^{n} \neq 0$. Gdyby w pewnym układzie współrzędnych forma q miała postać $q(\mathbf{z}) = \pm\sum_{i=0}^{r} z_i^2$, to stożek C byłby podprzestrzenią rzutową, wbrew założeniu o $S = C \cap \mathbb{A}$. Zatem $q(\mathbf{x}) = 0$ jest równaniem pewnej kwadryki rzutowej $\widetilde{C}$, niebędącej podprzestrzenią rzutową, a S jest jej przedstawieniem w mapie afinicznej $\mathbb{A}$. Jeśli S jest jednocześnie przedstawieniem innej kwadryki $\widetilde{C}' \subset \mathbb{P}(V)$ o równaniu $q_1(\mathbf{x}) = 0$, to odpowiednie funkcje kwadratowe Q i Q_1 są proporcjonalne (§ 2, twierdzenie 1). Wtedy formy kwadratowe q i q_1 są też proporcjonalne, a stąd $\widetilde{C} = \widetilde{C}'$.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w przestrzeni rzutowej zanika różnica między walcami i stożkami: prostoliniowe tworzące walca, równoległe z afinicznego punktu widzenia, przecinają się w punkcie w nieskończoności. Na przykład stożek $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, walec eliptyczny, walec paraboliczny i walec hiperboliczny w trójwymiarowej przestrzeni afinicznej są przedstawieniami w różnych mapach afinicznych jednego i tego samego „walca" $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$ w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej.

3. Przecięcie kwadryki rzutowej z prostą. Jak należało się spodziewać, w odróżnieniu od przypadku afinicznego w przestrzeni rzutowej każda (niepusta) kwadryka przecina każdą prostą (być może w punkcie urojonym).

Istotnie, załóżmy, że kwadryka $\widetilde{C}$ ma równanie (1), a prosta — równanie

$$x_i = \mu a_i + \nu b_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{5}$$

Tutaj $\widetilde{\mathbf{a}} = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ i $\widetilde{\mathbf{b}} = (b_0 : b_1 : \dots : b_n)$ są dwoma punktami na prostej. Po podstawieniu (5) do (1) otrzymamy

$$q(\mathbf{a})\mu^2 + 2f(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mu\nu + q(\mathbf{b})\nu^2 = 0. \tag{6}$$

Interesują nas rozwiązania $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, ponieważ współrzędne $x_0, \dots, x_n$ nie mogą wszystkie być zerami.

Jeśli

$$D = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - q(\mathbf{a})q(\mathbf{b}) \neq 0,$$

otrzymujemy dwa rozwiązania (μ, ν) (być może zespolone sprzężone), odpowiadające dwóm punktom wspólnym prostej i kwadryki.

Jeśli $D = 0$, ale nie wszystkie liczby $q(\mathbf{a})$, $q(\mathbf{b})$, $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ są zerami, to prosta i kwadryka mają jeden punkt wspólny $\widetilde{\mathbf{p}}$. Jeśli punkt ten nie jest osobliwy, tzn. $\frac{\partial q}{\partial x_i}\big|_{\widetilde{\mathbf{p}}} \neq 0$ dla pewnego i, to prosta (5) jest styczna do kwadryki.

Jeśli wreszcie

$$q(\mathbf{a}) = q(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

to równanie (6) staje się tożsamością i prosta (5) w całości leży na kwadryce $\widetilde{C}$, jest więc jej tworzącą prostoliniową.

Widzimy, że dla kwadryk rzutowych pojęcie kierunku asymptotycznego nie ma sensu.

4. Ogólne uwagi o kwadrykach rzutowych. 1) Rozważmy punkt $\widetilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{P}(V)$ i równanie

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} \varphi_{ij} a_i x_j = 0, \tag{7}$$

gdzie f jest formą dwuliniową, biegunową dla formy kwadratowej q. Jeśli wszystkie współczynniki przy x_j są zerami, to

$$\begin{aligned} \varphi_{00}a_0 + \varphi_{10}a_1 + \ldots + \varphi_{n0}a_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi_{0n}a_0 + \varphi_{1n}a_1 + \ldots + \varphi_{nn}a_n &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

a ponieważ nie wszystkie współrzędne jednorodne a_i są równe zeru, więc $\det(\varphi_{ij})_{i,j=0}^{n} = 0$. Inaczej mówiąc, jeśli równanie (7) jest tożsamością, to kwadryka $\widetilde{C}$ (o równaniu $q(\mathbf{x}) = 0$) jest zdegenerowana, punkt $\widetilde{\mathbf{a}}$ leży na tej kwadryce i jest jej punktem osobliwym.

Jeśli wykluczymy powyższy przypadek, to równanie (7) określa hiperpłaszczyznę rzutową $\Pi \subset \mathbb{P}(V)$, zwaną *hiperpłaszczyzną biegunową* punktu $\widetilde{\mathbf{a}}$ względem kwadryki $\widetilde{C}$. Punkt $\widetilde{\mathbf{a}}$ nazywamy wtedy *biegunem* hiperpłaszczyzny Π względem kwadryki $\widetilde{C}$. Hiperpłaszczyzna biegunowa Π punktu $\widetilde{\mathbf{a}}$ przechodzi przez $\widetilde{\mathbf{a}}$ dokładnie wtedy, gdy $\widetilde{\mathbf{a}} \in \widetilde{C}$.

Każda hiperpłaszczyzna rzutowa Π o równaniu

$$p_0x_0 + p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = 0$$

ma dokładnie jeden biegun względem każdej niezdegenerowanej kwadryki $\widetilde{C} \subset \mathbb{P}(V)$. Istotnie, jeśli $\det(\varphi_{ij})_{i,j=0}^{n} \neq 0$, to układ równań

$$\varphi_{0j}a_0 + \varphi_{1j}a_1 + \ldots + \varphi_{nj}a_n = p_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

2) Naturalne jest rozpatrywanie kwadryk, jak też i innych zbiorów algebraicznych, z zespolonego punktu widzenia. Zbiory algebraiczne w $\mathbb{CP}^n$ dają możliwość wniknięcia w wiele subtelnych kwestii, nierozstrzygalnych w przypadku rzeczywistym. Przypomina to zagadnienie poszukiwania pierwiastków wielomianów o współczynnikach rzeczywistych — wiemy z części I, że tylko w dziedzinie zespolonej możliwe jest jego pełne rozwiązanie. W części 3 podręcznika [2] dokonujemy porównania przestrzeni rzutowych $\mathbb{RP}^n$ i $\mathbb{CP}^n$; ważną rolę odgrywa tu kompleksy-

fikacja $\mathbb{P}(V^{\mathbb{C}})$ rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$ w duchu rozdziału 3 (§ 4). Kanoniczne zanurzenie $V \subset V^{\mathbb{C}}$ pozwala przyporządkować każdej prostej rzeczywistej w V jej kompleksyfikację, będącą prostą zespoloną w $V^{\mathbb{C}}$; daje to zanurzenie $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(V^{\mathbb{C}})$. Wtedy punkty z $\mathbb{P}(V^{\mathbb{C}}) \setminus \mathbb{P}(V)$ stają się „punktami zespolonymi" rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$.

ĆWICZENIA

1. Udowodnić, że w przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^3$ istnieje dokładnie 8 klas rzutowo nierównoważnych kwadryk (włączając kwadryki puste, zdegenerowane oraz podprzestrzenie podwójne). Kwadryki te (w odpowiednim układzie współrzędnych jednorodnych) są określone równaniami:

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ \xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0; & (5)\ \xi_0^2+\xi_1^2-\xi_2^2=0; \\
(2)\ \xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2=0; & (6)\ \xi_0^2+\xi_1^2=0; \\
(3)\ \xi_0^2+\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2=0; & (7)\ \xi_0^2-\xi_1^2=0; \\
(4)\ \xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2=0; & (8)\ \xi_0^2=0.
\end{array}
$$

2. Wykorzystując ćwiczenie 1 oraz ćwiczenie 5.2.1, opisać przedstawienia afiniczne kwadryk typów (1)–(3).