Rozdział 5

KWADRYKI

Figury geometrii afinicznej i euklidesowej, które będziemy badać w tym rozdziale, znane są Czytelnikowi z geometrii analitycznej. Nie zmieniamy też terminologii — mówimy o krzywych, powierzchniach itd. Widzieliśmy już jednak w końcu poprzedniego rozdziału, że zachodzi konieczność wyjścia poza ramy przestrzeni trójwymiarowej. Czysto algebraiczna klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia w przestrzeni wielowymiarowej nie jest skomplikowana – dysponujemy już całym niezbędnym aparatem; aspekt poglądowy, geometryczny, odejdzie przy tym na drugi plan. Z drugiej strony, ważne miejsce zajmie zbadanie rozpatrywanych obiektów z punktu widzenia geometrii rzutowej.

§ 1. FUNKCJE KWADRATOWE

1. Funkcje kwadratowe na przestrzeni afinicznej. Niech $\mathbb{A}$ będzie przestrzenią afiniczną stowarzyszoną z przestrzenią liniową V wymiaru n nad ciałem $\mathfrak{K}$. Na samo ciało $\mathfrak{K}$ będziemy niekiedy patrzeć jak na jednowymiarową przestrzeń afiniczną $\mathfrak{K}_{\text{afin}}$. Na przykład ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych to jednocześnie rzeczywista prosta afiniczna $\mathbb{R}_{\text{afin}}$ (rozdz. 4, § 1, przykład 1).

Przez analogię do form dwuliniowych $f : V \times V \to \mathfrak{K}$ określimy teraz funkcje dwuafiniczne. Wszędzie zakładamy, że ciało $\mathfrak{K}$ jest nieskończone i $\operatorname{char} \mathfrak{K} \neq 2$.

DEFINICJA 1. Funkcję $\Phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathfrak{K}$ nazywamy *dwuafiniczną*, jeśli odwzorowania $\dot{p} \mapsto \Phi(\dot{p}, \dot{q})$ przy ustalonym $\dot{q} \in \mathbb{A}$ oraz $\dot{q} \mapsto \Phi(\dot{p}, \dot{q})$ przy ustalonym $\dot{p} \in \mathbb{A}$ są funkcjami afinicznymi, tzn. przekształceniami afinicznymi $\mathbb{A} \to \mathfrak{K}_{\text{afin}}$. Funkcję dwuafiniczną Φ nazywamy *symetryczną*, jeśli

$$\Phi(\dot{p}, \dot{q}) = \Phi(\dot{q}, \dot{p}) \qquad \forall \dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}.$$

Będziemy się posługiwać następującą charakteryzacją funkcji dwuafinicznych (której dowód pominiemy): istnieje punkt $\dot{o} \in \mathbb{A}$, forma dwuliniowa $f : V \times V \to \mathfrak{K}$

oraz formy liniowe $l, l' : V \to \mathfrak{K}$ takie, że jeśli $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ i $\dot{q} = \dot{o} + \mathbf{y}$, to

$$\Phi(\dot{o} + \mathbf{x}, \dot{o} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{x}) + l'(\mathbf{y}) + \varphi_0, \tag{1}$$

gdzie $\varphi_0 = \Phi(\dot{o}, \dot{o}) \in \mathfrak{K}$. Wykażemy tylko, że jeśli funkcja Φ spełnia warunek (1), to jest dwuafiniczna. Istotnie, ustalmy np. $\dot{q} = \dot{o} + \mathbf{a}$. Wtedy ze wzoru (1) wynika, że funkcja $h(\dot{p}) = \Phi(\dot{p}, \dot{q})$ spełnia warunek

$$h(\dot{o} + \mathbf{x}) = (l'(\mathbf{a}) + \varphi_0) + (f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{x})) = h(\dot{o}) + Dh(\mathbf{x}),$$

gdzie $Dh(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{x})$, czyli h jest funkcją afiniczną z częścią liniową Dh.

Łatwo sprawdzić, że symetryczna funkcja dwuafiniczna jest postaci

$$\Phi(\dot{o} + \mathbf{x}, \dot{o} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{y}) + \varphi_0, \tag{2}$$

gdzie $f : V \times V \to \mathfrak{K}$ jest symetryczną formą dwuliniową, $l : V \to \mathfrak{K}$ jest formą liniową (czyli $l = l'$), a $\varphi_0 = \Phi(\dot{o}, \dot{o}) \in \mathfrak{K}$ jest skalarem.

DEFINICJA 2. Funkcję $Q : \mathbb{A} \to \mathfrak{K}$ na przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nazywamy *funkcją kwadratową*, jeśli $Q(\dot{p}) = \Phi(\dot{p}, \dot{p})$, gdzie Φ jest pewną funkcją postaci (2).

Jeśli q jest formą kwadratową odpowiadającą symetrycznej formie dwuliniowej f, czyli $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, to z (2) wynika, że

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + 2l(\mathbf{x}) + \varphi_0. \tag{3}$$

Zauważmy, że jeśli funkcja Q jest postaci (3) dla pewnego punktu $\dot{o}$, to jest analogicznej postaci dla dowolnego innego punktu $\dot{o}' = \dot{o} + \mathbf{a}$, z tą samą formą kwadratową q (choć z innymi l i φ_0) ([1]):

$$\begin{aligned} Q(\dot{o}' + \mathbf{x}) &= Q(\dot{o} + \mathbf{x} + \mathbf{a}) = q(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + 2l(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + \varphi_0 \\ &= f(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{x} + \mathbf{a}) + 2l(\mathbf{x}) + 2l(\mathbf{a}) + \varphi_0 \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + [2f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + 2l(\mathbf{x})] + [\varphi_0 + f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2l(\mathbf{a})] \\ &= q(\mathbf{x}) + 2l'(\mathbf{x}) + \varphi_0'. \end{aligned} \tag{3'}$$

W dowolnym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w $\mathbb{A}$ o początku w $\dot{o}$ funkcję kwadratową Q można zapisać w postaci

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i + \varphi_0, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n$, a współczynniki φ_{ij} tworzą macierz symetryczną $F = (\varphi_{ij})$. Jest to macierz formy kwadratowej q w bazie $(\mathbf{e}_i)$. Ponieważ forma kwadratowa q jest wyznaczona jednoznacznie przez Q, możemy zdefiniować *rząd* funkcji kwadratowej Q jako

$$\operatorname{rank} Q := \operatorname{rank} q = \operatorname{rank} F.$$

([1]) Uzasadnienie zostało dodane w tłumaczeniu (*przyp tłum.*).

2. Punkty środkowe funkcji kwadratowej. Zanim wprowadzimy jeszcze jedno ważne pojęcie, przepiszemy w nieco innej postaci obliczenia (3'), wykonane w poprzednim punkcie. Podstawiając w nich $\mathbf{a} = \mathbf{y}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} Q(\dot{o} + \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + 2l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \varphi_0 \\ &= [q(\mathbf{x}) + 2l(\mathbf{x}) + \varphi_0] + q(\mathbf{y}) + 2[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{y})]. \end{aligned}$$

Jeśli więc $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$, to

$$Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) + 2[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{y})]. \tag{5}$$

DEFINICJA 3. Punkt $\dot{p} \in \mathbb{A}$ nazywamy *punktem środkowym* dla funkcji kwadratowej Q, jeśli

$$Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in V. \tag{6}$$

Zbiór wszystkich punktów środkowych funkcji Q oznaczamy przez $C(Q)$.

Z porównania równości (5) i (6) wynika, że warunek $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x} \in C(Q)$ można zapisać w postaci

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in V. \tag{7}$$

W szczególności punkt $\dot{o}$ jest środkowy dla Q dokładnie wtedy, gdy część liniowa l we wzorze (2) jest zerowa. Inaczej mówiąc, jeśli początek układu $\dot{o}$ jest punktem środkowym, to wyrażenie $Q(\dot{o}+\mathbf{x})$ nie zawiera wyrazów pierwszego stopnia względem $x_1, \dots, x_n$. Jeśli założymy, że $\dot{o} \in C(Q)$, to na podstawie (7) punkt $\dot{o}' = \dot{o} + \mathbf{b}$ jest również środkowy wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ dla każdego $\mathbf{y} \in V$. Zatem wówczas $q(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$. Pamiętając, że $\varphi_0 = Q(\dot{o})$, otrzymujemy wobec tego z (3) równość $Q(\dot{o}') = Q(\dot{o})$. Wykazaliśmy, że

$$\dot{o}, \dot{o}' \in C(Q) \implies Q(\dot{o}) = Q(\dot{o}'). \tag{8}$$

Jak sprawdzić, czy dana funkcja kwadratowa ma punkty środkowe? I jak znaleźć zbiór $C(Q)$ wszystkich tych punktów?

Aby odpowiedzieć na te pytania, wychodzimy od warunku (7), który, jak łatwo zauważyć, można zapisać w postaci układu równań

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) + l(\mathbf{e}_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Współrzędne $x_1, \dots, x_n$ punktu środkowego $\dot{p}$ spełniają zatem układ równań

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} x_j = -\varphi_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Warunek istnienia rozwiązań tego układu podaje twierdzenie Kroneckera-Capellego (rząd macierzy układu musi być równy rzędowi macierzy rozszerzonej). Jeśli $\det F \neq 0$, to układ ten ma jedno rozwiązanie, czyli zbiór $C(Q)$ składa się z jednego punktu. Ogólnie, jeśli $\operatorname{rank} F = r$ i układ (9) jest niesprzeczny, to zbiór jego rozwiązań jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-r$. Odpowiadająca jej podprzestrzeń kierunkowa U składa się z wektorów, których współrzędne spełniają układ jednorodny

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} x_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

czyli

$$U = \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} f$$

(przypominamy, że $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dla każdego $\mathbf{y} \in V\}$).

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 1. *Zbiór $C(Q)$ punktów środkowych funkcji kwadratowej Q określonej w układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ wzorem (4) składa się z punktów $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$, których współrzędne spełniają układ liniowy (9). Jeśli $\dot{o}' \in C(Q)$, to*

$$C(Q) = \dot{o}' + U$$

jest podprzestrzenią afiniczną o kierunku $U = \operatorname{Ker} q$. Zbiór $C(Q)$ może być pusty tylko wtedy, gdy forma q jest zdegenerowana ($\operatorname{rank} q < n$). ∎

3. Sprowadzanie funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej. Mówimy, że dwie funkcje kwadratowe Q i Q' na przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ są *afinicznie równoważne*, jeśli istnieje automorfizm afiniczny $g \in \operatorname{Aff}(\mathbb{A})$ taki, że $Q' = Q \circ g$. Inaczej mówiąc, Q i Q' mają tę samą postać (4) w pewnych dwóch układach współrzędnych.

Następujące twierdzenie podaje najprostszą postać funkcji kwadratowej:

TWIERDZENIE 2. *Niech Q będzie funkcją kwadratową rzędu $r \geqslant 0$ na n-wymiarowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nad ciałem $\mathfrak{K}$. Jeśli funkcja Q nie ma punktów środkowych ($C(Q) = \emptyset$) (wtedy w szczególności $r < n$), to istnieje układ współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, w którym funkcja Q zapisuje się w postaci*

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + 2x_{r+1}, \tag{10}$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ są niezerowymi skalarami; wtedy $\operatorname{Ker} q = \{\mathbf{x} \in V \mid x_1 = \ldots = x_r = 0\}$ (q jest formą kwadratową wyznaczoną przez Q).

Jeśli funkcja Q ma punkty środkowe i $\dot{o}$ jest jednym z nich, to istnieje układ współrzędnych o początku w $\dot{o}$, w którym funkcja Q ma postać

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \varphi_0; \tag{11}$$

wtedy $Q(\dot{o}') = \varphi_0$ dla każdego $\dot{o}' \in C(Q)$. Funkcje kwadratowe postaci (10) *i* (11) *nie są afinicznie równoważne.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest prostszy niż jego sformułowanie. Wybieramy najpierw w V bazę kanoniczną $(\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n')$ dla formy kwadratowej q (rozdz. 1,

§ 4). Wtedy w układzie współrzędnych $(\dot{o}'; \mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n')$ (dla dowolnego $\dot{o}'$) funkcja Q przyjmuje postać

$$Q(\dot{o}' + \mathbf{x}') = \alpha_1(x_1')^2 + \ldots + \alpha_r(x_r')^2 + 2\beta_1' x_1' + \ldots + 2\beta_n' x_n' + \gamma',$$

gdzie $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_r \neq 0$. Przesuwając początek układu do odpowiedniego punktu $\dot{o}''$, wyzerowujemy współczynniki przy $x_1', \ldots, x_r'$:

$$x_i'' = \begin{cases} x_i' + \beta_i'/\alpha_i, & i = 1, \ldots, r, \\ x_i', & i = r+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Zatem

$$Q(\dot{o}'' + \mathbf{x}'') = \alpha_1(x_1'')^2 + \ldots + \alpha_r(x_r'')^2 + 2\beta_{r+1}'' x_{r+1}'' + \ldots + 2\beta_n'' x_n'' + \gamma''.$$

Jeśli wszystkie β_j'' są zerami, to mamy postać (11).

Załóżmy teraz, że np. β_{r+k} jest pierwszym współczynnikiem β_j różnym od zera. Wtedy jeszcze jedna afiniczna zamiana zmiennych

$$\begin{aligned} x_i &= x_i'', \qquad i = 1, \ldots, r, \\ x_{r+1} &= \beta_{r+k}'' x_{r+k}'' + \ldots + \beta_n'' x_n'' + \gamma''/2, \\ x_{r+2} &= x_{r+1}'', \ \ldots, \ x_{r+k} = x_{r+k-1}'', \\ x_{r+k+i} &= x_{r+k+i}'', \qquad i \geqslant 1, \end{aligned}$$

sprowadza funkcję Q do postaci (10).

Możemy zatem uważać, że funkcja Q ma postać (10) lub (11). Ponieważ $q(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2$, więc $\operatorname{Ker} q$ jest $(n-r)$-wymiarową podprzestrzenią liniową w V, określoną przez warunki $x_1 = \ldots = x_r = 0$.

Korzystając z twierdzenia Kroneckera–Capellego dla odpowiedniego układu (9), łatwo udowodnić, że funkcja kwadratowa postaci (10) nie ma punktów środkowych, a dla funkcji (11) mamy $C(Q) = \dot{o} + \operatorname{Ker} q$. Wykażemy to samo, korzystając bezpośrednio z definicji (6). Jeśli $\mathbf{y} \in V$ jest dowolnym wektorem i $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$, to dla funkcji (10) mamy

$$\begin{aligned} Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{o} + \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \sum_i \alpha_i (x_i + y_i)^2 + 2(x_{r+1} + y_{r+1}) \\ &= Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) + 2\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i y_i + 2y_{r+1}, \end{aligned}$$

a w przypadku (11) otrzymujemy

$$Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) + 2\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i y_i.$$

Na mocy (6) punkt $\dot{p}$ jest środkowy dla Q wtedy i tylko wtedy, gdy

$$2\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i y_i + 2y_{r+1} = 0 \qquad \forall \mathbf{y} \in V$$

w przypadku (10), co nie może mieć miejsca dla żadnego $\mathbf{x}$ z powodu członu $2y_{r+1}$, oraz

$$2\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i y_i = 0 \qquad \forall \mathbf{y} \in V$$

w przypadku (11), co sprowadza się do układu $x_1 = \ldots = x_r = 0$. ■

Wniosek. *Każda funkcja kwadratowa Q na rzeczywistej przestrzeni afinicznej może być w odpowiednim układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ przedstawiona w (dokładnie) jednej z poniższych postaci kanonicznych:*

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 2x_{r+1}, \tag{12}$$

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + \varphi_0, \tag{13}$$

gdzie $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant n$ ($r < n$ w przypadku (12)).

Dowód. Ponieważ dodatni indeks bezwładności s formy kwadratowej q związanej z Q oraz jej rząd r zależą tylko od formy q (rozdz. 1, § 4, twierdzenie 5), więc wystarczy zastosować twierdzenie 2 i dokonać odpowiedniej zamiany zmiennych (rozdz. 1, § 4, p. 7). ■

Powyższy wniosek można też sformułować inaczej:

Dwie funkcje kwadratowe Q i Q' na rzeczywistej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ są afinicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im formy kwadratowe mają te same rzędy i sygnatury oraz albo obie funkcje nie mają punktów środkowych, albo obie mają takie punkty i przyjmują w nich te same wartości.

4. Funkcje kwadratowe na przestrzeni euklidesowej. W przypadku przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{E}, V)$ naturalne jest badanie równoważności funkcji kwadratowych względem działania grupy izometrii $\mathrm{Iso}(\mathbb{E})$.

Definicja 4. Funkcje kwadratowe Q i Q' na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$ nazywamy $\mathrm{Iso}(\mathbb{E})$-*równoważnymi*, jeśli istnieje izometria $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{E})$, dla której $Q' = Q \circ g$. Inaczej mówiąc, Q i Q' mają tę samą postać w pewnych dwóch prostokątnych układach współrzędnych.

Twierdzenie 3. *Każda funkcja kwadratowa Q na n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej może być w odpowiednim prostokątnym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ przedstawiona w jednej z poniższych postaci:*

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + \varphi_0, \qquad \dot{o} \in C(Q), \tag{14}$$

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + 2\mu x_{r+1}, \qquad \mu > 0, \tag{15}$$

gdzie $0 \leqslant r \leqslant n$ $(r < n$ *w przypadku* (15)) *i liczby rzeczywiste* λ_i *są różne od zera. Przedstawienia tej postaci są jednoznaczne z dokładnością do porządku zmiennych* x_i.

Dowód. Niech $Q(\dot{o}' + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + 2l'(\mathbf{x}) + Q(\dot{o}')$. Wybieramy najpierw taką bazę ortonormalną $(\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n')$ w euklidesowej przestrzeni liniowej V, w której forma kwadratowa q przyjmuje postać kanoniczną

$$q(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2, \qquad \lambda_i \neq 0, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i'$$

(rozdz. 3, § 3, twierdzenie 7). Jeśli funkcja Q ma punkty środkowe, to zamieniając w razie potrzeby $\dot{o}'$ na jeden z takich punktów $\dot{o}$ (punkty środkowe znajdujemy tak samo jak w przypadku afinicznym), otrzymujemy postać (14).

Jeśli Q nie ma punktów środkowych, to mamy postać

$$Q(\dot{o}' + \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_i' y_i + \varphi_0'.$$

Zamiana zmiennych (przesunięcie początku układu)

$$z_i = \begin{cases} y_i + \varphi_i'/\lambda_i, & i = 1, \ldots, r, \\ y_i, & i = r+1, \ldots, n, \end{cases}$$

prowadzi do postaci

$$Q(\dot{o} + \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} \mu_i z_i + 2\mu_0,$$

gdzie nie wszystkie μ_i dla $i > r$ są równe zeru (w przeciwnym razie funkcja miałaby punkt środkowy). Wprowadźmy „normę"

$$\mu = \sqrt{\mu_{r+1}^2 + \ldots + \mu_n^2} > 0$$

formy liniowej $\sum_{i=r+1}^{n} \mu_i z_i$ i dokonajmy zamiany zmiennych

$$x_i = z_i, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

$$x_{r+1} = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\mu_k}{\mu} z_k + \frac{\mu_0}{\mu},$$

$$x_i = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_{ij} z_j, \qquad i = r+2, \ldots, n,$$

gdzie α_{ij} są tak dobrane, by macierz

$$A = \begin{Vmatrix} \mu_{r+1}/\mu & \mu_{r+2}/\mu & \ldots & \mu_n/\mu \\ \alpha_{r+2,r+1} & \alpha_{r+2,r+2} & \ldots & \alpha_{r+2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,r+1} & \alpha_{n,r+2} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{Vmatrix}$$

wymiarów $(n-r)\times(n-r)$ była ortogonalna; można to zrobić, ponieważ pierwszy wiersz macierzy jest wektorem o długości 1. Po podstawieniu otrzymamy

$$Q(\dot{o}+\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i^2+2\mu x_{r+1},\qquad \mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i,$$

zgodnie z (15).

Jednoznaczność postaci (14) i (15) wykażemy następująco. Na mocy twierdzenia o sprowadzaniu formy kwadratowej do osi głównych rząd r i liczby λ_i są wyznaczone jednoznacznie (rozdz. 3, § 3, p. 4). Liczba $\varphi_0=Q(\dot{o})$ nie zależy od wyboru punktu środkowego $\dot{o}$ (zob. (8)).

Pozostała do udowodnienia jednoznaczność współczynnika $\mu>0$ w równości (15). Przypuśćmy, że w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych $(\dot{o}';\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')$ mamy

$$Q(\dot{o}'+\mathbf{x}')=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x_i')^2+2\mu' x_{r+1}',\qquad \mu'>0.$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie symetrycznym operatorem liniowym na V, odpowiadającym symetrycznej formie dwuliniowej $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, biegunowej dla q (rozdz. 3, § 3, p. 1):

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathcal{F}\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}).$$

Jego macierz

$$F=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r,0,\ldots,0)$$

jest taka sama w bazie $(\mathbf{e}_i)$ i w bazie $(\mathbf{e}_i')$. Wynika stąd, że obrazem operatora $\mathcal{F}$ jest

$$\operatorname{Im}\mathcal{F}=\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r\rangle=\langle\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_r'\rangle,$$

a zatem macierz przejścia od bazy $(\mathbf{e}_i)$ do $(\mathbf{e}_i')$ jest postaci

$$B=\begin{Vmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{Vmatrix}$$

dla pewnych macierzy ortogonalnych B_1 wymiarów $r\times r$ oraz B_2 wymiarów $(n-r)\times(n-r)$. Przesuwając początek układu i wykorzystując fakt, że w obu wyrażeniach na Q brak wyrazów o wskaźnikach $>r+1$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i^2=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x_i')^2+2\nu,$$

$$2\mu x_{r+1}=2\mu' x_{r+1}'-2\nu$$

dla pewnego $\nu\in\mathbb{R}$. Wobec tego

$$x_{r+1}=\frac{\mu'}{\mu}\cdot x_{r+1}'-\frac{\nu}{\mu}.$$

Ponieważ macierz B jest ortogonalna, więc dla wyrażenia $x_{r+1} = \sum \alpha_j x'_j + \nu_0$ powinna zachodzić równość $\sum \alpha_j^2 = 1$, co w naszym przypadku daje

$$(\mu'/\mu)^2 = 1.$$

Stąd już wynika równość $\mu = \mu'$, ponieważ obie liczby μ' i μ są dodatnie. ■

ĆWICZENIA

1. Zakładając, że $2s \geqslant r > 0$, znaleźć liczbę klas równoważności afinicznej funkcji kwadratowych bez punktów środkowych na n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni afinicznej.

2. Wyznaczyć zbiór $C(Q)$ dla rzeczywistej funkcji kwadratowej

$$x_1^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1$$

na n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni afinicznej.

§ 2. KWADRYKI W PRZESTRZENI AFINICZNEJ I EUKLIDESOWEJ

1. Ogólne pojęcie kwadryki. Każdej funkcji kwadratowej na przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ odpowiada zbiór

$$S_Q = \{\dot{p} \in \mathbb{A} \mid Q(\dot{p}) = 0\}$$

zwany *kwadryką* lub *hiperpowierzchnią drugiego stopnia*. Dla $n = 2$ kwadryki nazywa się też *stożkowymi* lub *krzywymi drugiego stopnia*. Kwadryki można rozpatrywać nad dowolnym ciałem $\mathfrak{K}$ charakterystyki $\neq 2$ (i takie obiekty się rzeczywiście pojawiają w wielu zagadnieniach), przy czym najbardziej naturalny jest przypadek ciała algebraicznie domkniętego, np. $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$. Ograniczymy się jednak do skalarów rzeczywistych ze względu na bardziej poglądowy charakter tego przypadku (co zresztą jest sprawą dość umowną).

Od początku wygodne będzie wykluczenie z rozważań kwadryk niezawierających żadnego punktu. Na przykład funkcja $x_1^2 + x_2^2 + 1$ określa zbiór pusty. Ściślej w dalszym ciągu zakładamy, że kwadryka S_Q o równaniu $Q(\dot{p}) = 0$ jest zbiorem niepustym oraz

$$\operatorname{rank} S_Q := r = \operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} q > 0.$$

Wykluczamy zatem również kwadryki, dla których forma kwadratowa q jest zerowa (każda taka kwadryka jest określona przez równanie liniowe, jest więc hiperpłaszczyzną afiniczną, całą przestrzenią $\mathbb{A}$ (gdy $Q \equiv 0$) lub zbiorem pustym). Przyjmujemy także, że $n \geqslant 2$.

Pamiętając o powyższych założeniach, przyjmujemy następującą definicję:

DEFINICJA 1. Kwadrykę w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nazywamy *podprzestrzenią podwójną*, jeśli jest ona podprzestrzenią afiniczną w $\mathbb{A}$.

Na przykład równanie $x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0$ w n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ jest równoważne układowi $x_1 = 0, \ldots, x_r = 0$, przedstawia zatem $(n-r)$-wymiarową podprzestrzeń afiniczną. Definicja podprzestrzeni podwójnej nie zależy od układu współrzędnych, jeśli więc wziąć funkcję Q, określającą kwadrykę S_Q, w postaci kanonicznej, to z wniosku z twierdzenia 2 wynika, że każda podprzestrzeń podwójna ma właśnie równanie postaci $x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0$.

Zauważmy, że np. podprzestrzenie podwójne $x_1^2 + x_2^2 = 0$ i $2x_1^2 + 3x_2^2 = 0$ w przestrzeni trójwymiarowej to jedna i ta sama prosta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. W przypadku kwadryk, które nie są podprzestrzeniami podwójnymi, jednoznaczność równania kwadryki przedstawia się bardziej zadowalająco:

TWIERDZENIE 1. *Jeśli kwadryka S nie jest podprzestrzenią podwójną, to dowolne dwa jej równania (w tym samym układzie współrzędnych) są proporcjonalne, tzn.*

$$S_{Q_1} = S = S_{Q_2} \;\Rightarrow\; Q_2 = \lambda Q_1 \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dowód. Z założenia kwadryka S ma dwa równania $Q_1(\dot{p}) = 0$ i $Q_2(\dot{p}) = 0$. Rzut oka na wzory (12) i (13) prowadzi do wniosku, że zbiór S (o którym założyliśmy, że jest niepusty) zawiera co najmniej dwa punkty; co więcej, istnieją (różne) punkty $\dot{p}, \dot{q} \in S$ o tej własności, że prosta $\Pi_{\dot{p},\dot{q}}$ nie jest całkowicie zawarta w S. Istotnie, w przeciwnym razie kwadryka byłaby podprzestrzenią afiniczną (rozdz. 4, § 1, twierdzenie 4), wbrew założeniu. Łatwo zauważyć, że $\Pi_{\dot{p},\dot{q}} \cap S = \{\dot{p}, \dot{q}\}$.

Ustalmy punkty $\dot{p}, \dot{q} \in S$ o powyższej własności i przyjmijmy punkt $\dot{p}$ za początek układu, a wektor $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} \neq \mathbf{0}$ za ostatni wektor bazy $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w przestrzeni liniowej V. Wtedy prosta $\Pi_{\dot{p},\dot{q}}$ składa się z punktów o współrzędnych $(0, \ldots, 0, \beta)$. Punkt $\dot{p}$ ma współrzędne $(0, \ldots, 0)$, a $\dot{q}$ — współrzędne $(0, \ldots, 0, 1)$.

Rozwińmy Q_1 według potęg zmiennej x_n:

$$Q_1(\dot{p} + \mathbf{x}) = \delta x_n^2 + g(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n + h(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Tutaj g jest wielomianem stopnia $\leqslant 1$, a h — wielomianem stopnia $\leqslant 2$ względem $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Fakt, że prosta $\Pi_{\dot{p},\dot{q}}$ przecina S w dwóch różnych punktach, oznacza, że $\delta \neq 0$ i trójmian kwadratowy

$$\delta x_n^2 + g(0)x_n + h(0)$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, tj. $g(0)^2 - 4\delta h(0) > 0$. Dzieląc funkcję Q_1 przez δ, możemy zakładać, że od początku $\delta = 1$. To samo jest prawdą dla Q_2. Tak więc

$$Q_i(\dot{p} + \mathbf{x}) = x_n^2 + g_i(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n + h_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad i = 1, 2,$$

przy czym $\Delta_i(0) > 0$, gdzie

$$\Delta_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g_i(x_1, \ldots, x_{n-1})^2 - 4h_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad i = 1, 2,$$

jest wyróżnikiem Q_i jako trójmianu kwadratowego względem zmiennej x_n.

Wobec dokonanej przez nas normalizacji mamy udowodnić, że $Q_1 = Q_2$. Weźmy dowolne skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ i rozważmy w $\mathbb{A}$ podprzestrzeń afiniczną

$$x_1 = t\lambda_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = t\lambda_{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Wtedy dla wektora

$$\mathbf{x} = t\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + t\lambda_{n-1}\mathbf{e}_{n-1} + x_n\mathbf{e}_n$$

mamy

$$Q_i(p + \mathbf{x}) = x_n^2 + \widetilde{g}_i(t)x_n + \widetilde{h}_i(t), \tag{2}$$

gdzie

$$\widetilde{g}_i(t) = g_i(t\lambda_1, \ldots, t\lambda_{n-1}), \quad \widetilde{h}_i(t) = h_i(t\lambda_1, \ldots, t\lambda_{n-1}). \tag{3}$$

Określmy też

$$\widetilde{\Delta}_i(t) = \widetilde{g}_i(t)^2 - 4\widetilde{h}_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Wiemy, że $\widetilde{\Delta}_i(0) > 0$ dla $i = 1, 2$. Wobec tego istnieje takie $\varepsilon > 0$, że jeśli $|t| < \varepsilon$, to $\widetilde{\Delta}_i(t) > 0$, a więc oba wielomiany (2) mają dwa różne pierwiastki. Ale na mocy założenia zbiory pierwiastków tych dwóch wielomianów przy ustalonym t się pokrywają — jest to po prostu część wspólna kwadryki S i podprzestrzeni (1). Skoro dwa unormowane wielomiany stopnia 2 mają wspólne pierwiastki, to mają jednakowe współczynniki:

$$\widetilde{g}_1(t) = \widetilde{g}_2(t), \quad \widetilde{h}_1(t) = \widetilde{h}_2(t), \quad |t| < \varepsilon. \tag{4}$$

Wartości t spełniających warunek $|t| < \varepsilon$ jest jednak nieskończenie wiele, więc równości (4) są spełnione dla każdego t, w szczególności dla $t = 1$. Przyjmując $t = 1$ w (3), możemy przepisać (4) jako równość funkcji wielomianowych

$$\begin{aligned} g_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) &= g_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \\ h_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) &= h_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Wiemy, że jeśli dwa wielomiany stopnia m zmiennej λ przyjmują te same wartości dla $m+1$ różnych wartości λ, to są równe jako wielomiany (część I, rozdz. 6, § 1, wniosek z twierdzenia 2). Uogólnieniem tego faktu dla wielomianów wielu zmiennych jest następujące stwierdzenie: jeśli wielomiany $f_1(X_1, \ldots, X_{n-1})$ i $f_2(X_1, \ldots, X_{n-1})$ wyznaczają tę samą funkcję wielomianową $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, to są równe, tj. mają te same współczynniki (część I, rozdz. 6, § 1, ćwiczenie 2).

Korzystając z tego stwierdzenia, otrzymujemy z (5) równości

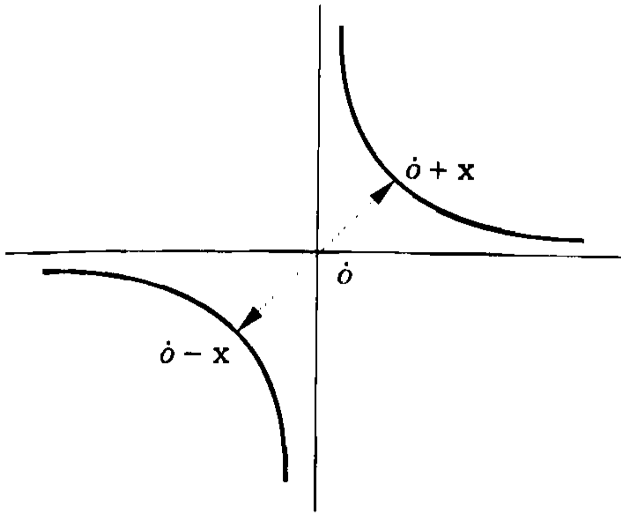
$$g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g_2(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

które pokazują, że $Q_1 = Q_2$. ■

2. Środek kwadryki. Widać od razu, że kwadryka na rys. 10 jest symetryczna względem początku układu współrzędnych. Ogólniejszej sytuacji geometrycznej odpowiada

DEFINICJA 2. Punkt $\dot{o}$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nazywamy *środkiem* kwadryki S_Q, jeśli jest jej środkiem symetrii, tzn. $\dot{o} + \mathbf{x} \in S_Q \Rightarrow \dot{o} - \mathbf{x} \in S_Q$.



Rys. 10

Załóżmy, że punkt $\dot{o}$ jest środkiem kwadryki S, która nie jest podprzestrzenią podwójną. Niech

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + 2l(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 = 0$$

będzie równaniem tej kwadryki. Ze środkowej symetrii kwadryki S wynika, że funkcja $Q_1(\dot{o} + \mathbf{x}) := Q(\dot{o} - \mathbf{x})$ określa tę samą kwadrykę, czyli równaniem S jest również

$$Q_1(\dot{o} + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - 2l(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 = 0.$$

Na mocy twierdzenia 1 istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że

$$Q_1 = \lambda Q,$$

co wobec $q \neq 0$ jest możliwe tylko wtedy, gdy $\lambda = 1$ i $l = 0$. Wiemy już jednak z punktu 2, że $l = 0$ to warunek na to, by punkt $\dot{o}$ był punktem środkowym kwadryki S. Dochodzimy do wniosku, że *jeśli kwadryka S_Q nie jest podprzestrzenią podwójną, to zbiór $C(S_Q)$ jej środków symetrii jest równy zbiorowi $C(Q)$ środków funkcji kwadratowej Q; jeśli zbiór ten jest niepusty, to stanowi podprzestrzeń afiniczną* (§ 1, twierdzenie 1). Opisaliśmy już, jak znaleźć zbiór $C(Q)$ w dowolnym układzie współrzędnych; w ten sposób można efektywnie ustalić, czy dowolna kwadryka S jest figurą środkowosymetryczną.

3. Postacie kanoniczne kwadryk w przestrzeni afinicznej. Sformułujemy podstawowe

TWIERDZENIE 2. *Każda kwadryka w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej ma w odpowiednim układzie współrzędnych dokładnie jedno z poniższych równań:*

- *kwadryka środkowosymetryczna:*

$$\mathrm{I}_{s,r}: \ x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 1, \qquad 0 < s \leqslant r,$$

$$\mathrm{I}'_{s,r}: \ x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \qquad r/2 \leqslant s \leqslant r;$$

- *kwadryka niemająca środka symetrii:*

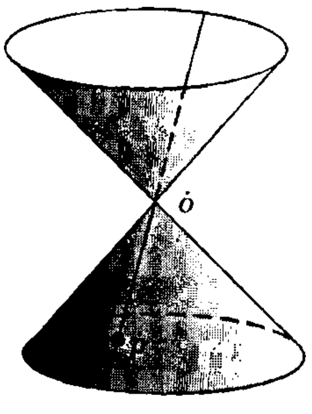
$$\mathrm{II}_{s,r}: \ x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = -2x_{r+1}, \qquad r/2 \leqslant s \leqslant r.$$

Tutaj $1 \leqslant r \leqslant n$ *($r < n$ w ostatnim przypadku).*

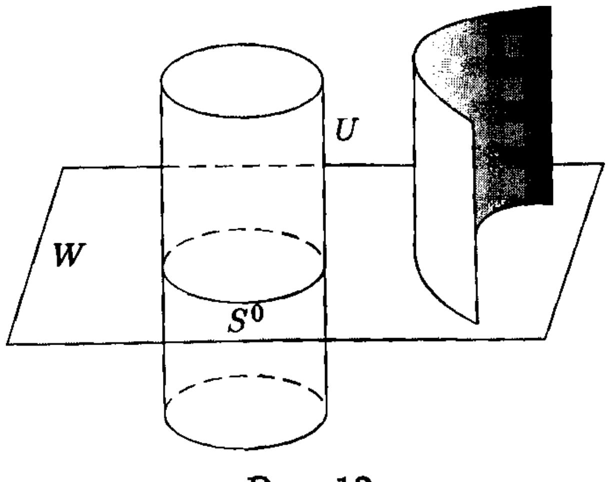
Dowód. Twierdzenie jest niemal oczywiste: wystarczy zastosować wniosek z twierdzenia 2 w § 1 i zauważyć, że $S_{\lambda Q} = S_Q$ dla $\lambda \neq 0$; pozwala to zamienić stałą φ_0 w równości (13) z § 1 na -1 (jeśli stała ta jest różna od zera). Warunek $s > 0$ w $\mathrm{I}_{s,r}$ wyklucza kwadrykę pustą. Równość $s = r$ w $\mathrm{I}'_{s,r}$ odpowiada podprzestrzeni podwójnej. ∎

DEFINICJA 3. Kwadrykę typu $\mathrm{I}_{n,n}$ nazywamy *elipsoidą*, typu $\mathrm{I}_{s,n}$ dla $s < n$ – *hiperboloidą*, typu $\mathrm{II}_{n-1,n-1}$ – ***paraboloidą eliptyczną***, a typu $\mathrm{II}_{s,n-1}$ dla $s < n-1$ — *paraboloidą hiperboliczną*. Wszystkie te kwadryki są *niezdegenerowane*.

Kwadryki typów $\mathrm{I}_{s,r}$ i $\mathrm{I}'_{s,r}$ dla $r < n$ oraz typu $\mathrm{II}_{s,r}$ dla $r < n-1$ nazywamy *walcami*, a typu $\mathrm{I}'_{s,n}$ – *stożkami*. Stożki i walce noszą wspólną nazwę kwadryk *zdegenerowanych* [1].



Rys. 11



Rys. 12

Dla każdego stożka S (rys. 11) istnieje punkt $\dot{o}$ o własności

$$\dot{o} + \mathrm{x} \in S \ \Rightarrow \ \dot{o} + \lambda\mathrm{x} \in S \ \forall\lambda \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Punkt $\dot{o}$ nazywamy wówczas *wierzchołkiem* stożka (jest on automatycznie jego

[1] Warto zwrócić uwagę na dwa przypadki szczególne: $\mathrm{I}_{1,1}$ to suma dwóch hiperpłaszczyzn równoległych, a $\mathrm{I}'_{1,2}$ — suma hiperpłaszczyzn przecinających się (*przyp. tłum.*).

środkiem symetrii). Proste $\dot{o} + \lambda\mathbf{x}$ to *tworzące* stożka. Jeśli równanie stożka ma postać $\mathrm{I}'_{s,n}$, to wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych. Poza stożkami własność (6) mają wszystkie kwadryki typu $\mathrm{I}'_{s,r}$ (i tylko one).

Walec można scharakteryzować jako kwadrykę S o następującej własności: istnieje wektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ taki, że

$$\dot{p} \in S \;\Rightarrow\; \dot{p} + \lambda\mathbf{u} \in S \;\; \forall\lambda \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Inaczej mówiąc, przesunięcie $t_{\lambda\mathbf{u}}$ przeprowadza S w S. Istotnie, przypuśćmy, że kwadryka S spełnia warunek (7). Ponieważ $t_{\mathbf{u}_1} \circ t_{\mathbf{u}_2} = t_{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}$, więc wszystkie wektory $\mathbf{u}$ o własności (7) (z dodanym wektorem zerowym) tworzą podprzestrzeń liniową $U \subset V$.

Jeśli $S = S_Q$, $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x} \in S$ i $\dot{p} + \alpha\mathbf{u} \in S$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ i każdego $\mathbf{u} \in U$, tj. $Q(\dot{p}) = 0$ oraz $Q(\dot{p} + \alpha\mathbf{u}) = 0$, to z równości (5) w § 1 otrzymujemy

$$q(\alpha\mathbf{u}) + 2[f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{u}) + l(\alpha\mathbf{u})] = 0,$$

czyli

$$\alpha^2 q(\mathbf{u}) + 2\alpha[f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{u})] = 0 \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R},$$

a stąd

$$q(\mathbf{u}) = 0, \qquad f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{u}) = 0 \tag{8}$$

dla każdego $\mathbf{u} \in U$. Niech

$$V = U \oplus W, \qquad W = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle, \qquad U = \langle \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Wtedy z (8) wynika, że w wyrażeniu

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i,j} \varphi_{ij} x_i x_j + 2\sum_j \varphi_j x_j + \varphi_0$$

współczynniki φ_{ij} oraz φ_j dla $j > m$ są równe zeru. Wtedy również w postaci kanonicznej równania kwadryki S_Q nie będzie pewnych zmiennych (odpowiadających niezerowej podprzestrzeni U). Na podstawie twierdzenia 2 własność tę mają tylko kwadryki typu $\mathrm{I}_{s,r}$ i $\mathrm{I}'_{s,r}$ dla $r < n$ oraz $\mathrm{II}_{s,r}$ dla $r < n - 1$, czyli walce.

Podprzestrzenie afiniczne postaci $\dot{p} + U$, gdzie $\dot{p} \in S$, nazywamy *tworzącymi* walca S. Ustalmy punkt $\dot{q} \in S$. Każda tworząca $\dot{p} + U$ przecina podprzestrzeń afiniczną $\dot{q} + W$ w dokładnie jednym punkcie $\dot{r}$ (wektor $\overrightarrow{pq}$ ma jednoznaczny rozkład na sumę $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, gdzie $\mathbf{u} \in U$ i $\mathbf{w} \in W$; wtedy $\dot{p} + \mathbf{u} = \dot{q} - \mathbf{w} = \dot{r}$). Wobec tego walec S jest wyznaczony jednoznacznie przez podanie podprzestrzeni liniowej U oraz kwadryki

$$S^0 = S \cap (\dot{q} + W)$$

w przestrzeni afinicznej $\dot{q} + W$. Kwadrykę S^0 nazywamy *podstawą* walca S. Dla walca typu $\mathrm{I}_{s,r}$, $\mathrm{I}'_{s,r}$ (dla $r < n$) lub $\mathrm{II}_{s,r}$ (dla $r < n - 1$) podstawa ma to samo równanie kanoniczne, ale w przestrzeni wymiaru r (w dwóch pierwszych przypadkach) lub $r + 1$ (w ostatnim przypadku), jest więc kwadryką niezdegenerowaną lub stożkiem.

DEFINICJA 4. Walec S_Q nazywamy *eliptycznym*, *hiperbolicznym* lub *stożkowym* w zależności od rodzaju podstawy S^0. Mówimy też o *walcu nad kwadryką* S^0.

Jak się później przekonamy, walec można uważać za stożek, którego wierzchołkiem jest punkt w nieskończoności.

4. Uwagi ogólne o rodzajach kwadryk. Rzędem funkcji kwadratowej Q i odpowiadającej jej kwadryki S_Q nazwaliśmy liczbę $r = \operatorname{rank} q$, gdzie q jest formą kwadratową związaną z Q. Często wprowadza się jeszcze tzw. *rząd rozszerzony* $\widetilde{r}$. Aby go określić, wychodzimy od równania kwadryki w dowolnym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$:

$$Q(\dot{o} + \mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i + \varphi_0 = 0 \tag{9}$$

i rozpatrujemy dwie macierze: macierz $F = (\varphi_{ij})$ formy kwadratowej q oraz rozszerzoną macierz

$$\widetilde{F} = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} & \varphi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} & \varphi_n \\ \varphi_1 & \cdots & \varphi_n & \varphi_0 \end{Vmatrix}.$$

Wtedy z definicji $r = \operatorname{rank} F$ i $\widetilde{r} = \operatorname{rank} \widetilde{F}$. Dla ujednolicenia oznaczeń przyjmijmy

$$\varphi_{i,n+1} = \varphi_{n+1,i} := \varphi_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad \varphi_{n+1,n+1} := \varphi_0.$$

Tak więc $\widetilde{F} = (\varphi_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$ i $\widetilde{r}$ jest rzędem formy kwadratowej

$$\widetilde{q}(\mathrm{x}) = \widetilde{Q}(\dot{o} + \mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} \varphi_{ij} x_i x_j.$$

Możemy przyjąć, że $x_{n+1} = 1$, i rozpatrywać tylko zamiany zmiennych, zachowujące ten warunek, tzn.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_1' + \dots + a_{1n} x_n' + a_{1,n+1} x_{n+1}', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1} x_1' + \dots + a_{nn} x_n' + a_{n,n+1} x_{n+1}', \\ x_{n+1} &= x_{n+1}', \end{aligned}$$

gdzie macierz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$ jest nieosobliwa. W nowych współrzędnych macierzą formy $\widetilde{q}$ będzie oczywiście

$$\widetilde{F}' = {}^t A \widetilde{F} A.$$

Ponieważ $\det A \neq 0$, więc $\widetilde{r}$ jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych; szczególnie łatwo go obliczyć, gdy równanie kwadryki jest w postaci kanonicznej. Widzimy, że kwadryka S_Q jest zdegenerowana, tzn. jest stożkiem lub walcem, dokładnie wtedy, gdy $\widetilde{r} < N + 1$ lub, co na jedno wychodzi, $\det \widetilde{F} = 0$.

Na niezmienniczość afiniczną rzędu r zwracaliśmy uwagę już poprzednio. Liczba kwadratów ze współczynnikiem ± 1 w równaniu kanonicznym jest wyznaczona przez liczbę niezerowych wartości własnych macierzy F; istnienie jedynego środka symetrii kwadryki wyraża się przez warunek $\det F \neq 0$. Jeśli $\det F = 0$, to albo nie ma środków symetrii ($\operatorname{rank} F < \operatorname{rank} \widetilde{F}$), albo jest ich nieskończenie wiele ($\operatorname{rank} F = \operatorname{rank} \widetilde{F}$); w tym ostatnim przypadku kwadryka jest walcem. Widzimy zatem, że postać kanoniczną równania kwadryki można określić, nie wykonując faktycznych zamian zmiennych, sprowadzających dane równanie do tej postaci.

Wprowadzimy jeszcze kilka pojęć, pojawiających się w naturalny sposób przy badaniu kwadryk. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć część wspólną kwadryki (9) z prostą przechodzącą przez $\dot{p}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ o równaniach

$$x_i = x_i^0 + \alpha_i t, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Podstawienie tych wzorów do (9) prowadzi do równania kwadratowego względem t:

$$Q^{(0)} t^2 + 2Q^{(1)} t + Q^{(2)} = 0 \tag{11}$$

o współczynnikach

$$Q^{(0)} = q(\alpha),$$

$$Q^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\dot{p}_0)\alpha_i, \qquad Q_i(\dot{p}) = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} x_j + \varphi_i,$$

$$Q^{(2)} = Q(\dot{p}_0).$$

Tutaj $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest wektorem kierunkowym prostej (10), a $x_1, \ldots, x_n$ to współrzędne dowolnego punktu $\dot{p}$ na prostej.

DEFINICJA 5. Wektor $\boldsymbol{\alpha}$ nazywamy *wektorem asymptotycznym* dla kwadryki S_Q, jeśli $q(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Równanie

$$q(\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

określa *stożek asymptotyczny* kwadryki S_Q.

Jeśli prosta (10) nie ma kierunku asymptotycznego, tj. $q(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$, to równanie (11) ma dwa (być może zespolone sprzężone) pierwiastki, odpowiadające parze (być może urojonych) punktów wspólnych kwadryki i prostej. Prosta o kierunku asymptotycznym albo nie przecina kwadryki, albo przecina ją w jednym punkcie, albo też zawiera się całkowicie w S_Q (w tym ostatnim przypadku prosta (10) jest tworzącą kwadryki S_Q).

Załóżmy, że punkt $\dot{p}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ należy do kwadryki, tj. $Q^{(2)} = Q(\dot{p}) = 0$. Mówimy, że $\dot{p}_0$ jest *punktem osobliwym* kwadryki S_Q, jeśli $Q_i(\dot{p}_0) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Współrzędne $x_1^0, \ldots, x_n^0$ punktu osobliwego $\dot{p}_0$ znajdujemy z układu równań liniowych

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} x_j + \varphi_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{j=1}^{n} \varphi_j x_j + \varphi_0 = 0.$$

Punkty osobliwe mogą oczywiście istnieć tylko na kwadrykach zdegenerowanych, przy czym dla $\widetilde{r} = n$ istnieje co najwyżej jeden taki punkt. W ogólnym przypadku punkty osobliwe (jeśli istnieją) tworzą podprzestrzeń afiniczną wymiaru $n - \widetilde{r}$. Równanie

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i(\dot{p}_0)(x_i - x_i^0) = 0$$

przedstawia *przestrzeń styczną* do kwadryki S_Q w punkcie osobliwym $\dot{p}_0$.

5. Kwadryki w przestrzeni euklidesowej. Niech $\mathbb{E}$ będzie n-wymiarową przestrzenią euklidesową stowarzyszoną z rzeczywistą przestrzenią liniową V.

Oczywistym przeformułowaniem twierdzenia 3 z § 1 o Iso($\mathbb{E}$)-równoważnych funkcjach kwadratowych jest

TWIERDZENIE 3. *Każda kwadryka w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{E}$ *(niepusta i niebędąca podprzestrzenią afiniczną) ma w odpowiednim prostokątnym układzie współrzędnych dokładnie jedno z poniższych równań:*

- *kwadryka środkowosymetryczna:*

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 1, \qquad 0 < s \leqslant r, \tag{12}$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0, \qquad \frac{r}{2} \leqslant s < r; \tag{13}$$

- *kwadryka niemająca środka symetrii:*

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 2x_{r+1} = 0, \qquad \frac{r}{2} \leqslant s \leqslant r. \ \blacksquare \tag{14}$$

Sformułowanie twierdzenia 3 musimy jeszcze uzupełnić opisem wielkości a_i. Jeśli funkcja kwadratowa Q opisująca kwadrykę ma w pewnym układzie współrzędnych postać

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + \varphi_0,$$

gdzie $\lambda_i \neq 0$ (§ 1, twierdzenie 3, (14)) oraz $\varphi_0 \neq 0$, to zmienne x_i można tal ponumerować, by spełnione były warunki

$$\lambda_1 \varphi_0 < 0, \ \ldots, \ \lambda_s \varphi_0 < 0, \qquad \lambda_i \varphi_0 > 0 \quad \text{dla } i > s.$$

Wtedy podstawiając

$$a_i = \sqrt{\left|\frac{\varphi_0}{\lambda_i}\right|} > 0, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{12}$$

otrzymujemy postać (12).

Jeśli $\varphi_0 = 0$, to należy przyjąć

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} > 0, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{13'}$$

co prowadzi do postaci (13), gdyż warunek $s \geqslant r/2$ można zawsze spełnić, mnożąc ewentualnie obie strony równania przez -1.

Jeśli wreszcie funkcja kwadratowa ma postać

$$Q(\dot{o} + \mathrm{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + 2\mu x_{r+1},$$

gdzie $\lambda_i \neq 0$ i $\mu \neq 0$ (§ 1, twierdzenie 3, (15)), to możemy założyć, że

$$\lambda_1\mu > 0, \; \ldots, \; \lambda_s\mu > 0, \qquad \lambda_i\mu < 0 \quad \text{dla } i > s$$

oraz $s \geqslant r/2$, podobnie jak wyżej (aby móc spełnić ten ostatni warunek, nie zakładaliśmy, że $\mu > 0$). Wtedy przyjmując

$$a_i = \sqrt{\left|\frac{\mu}{\lambda_i}\right|} > 0, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{14'}$$

otrzymujemy postać (14).

Nazwy afiniczne kwadryk niezdegenerowanych:

- *elipsoida* ((12), $s = n$, rys. 13),
- *hiperboloida* ((12), $0 < s < r = n$, rys. 14, 15),
- *paraboloida eliptyczna* ((14), $s = n - 1$, rys. 16),
- *paraboloida hiperboliczna* ((14), $0 \leqslant s < r = n - 1$, rys. 17)

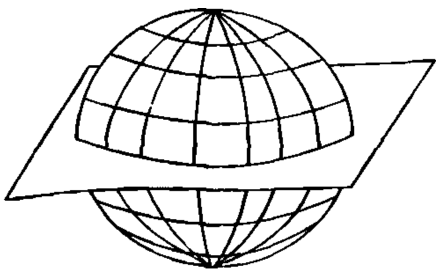
przenoszą się na kwadryki euklidesowe, dla których pojawiają się jednak niezmienniki o dowolnych wartościach rzeczywistych dodatnich, tzw. *półosie* a_i. Ich Iso($\mathbb{E}$)-niezmienniczość wynika z Iso($\mathbb{E}$)-niezmienniczości parametrów λ_i, φ_0, μ, ustalonej w twierdzeniu 3 w § 1. Na przykład, z afinicznego punktu widzenia wszystkie elipsoidy są równoważne sferze jednostkowej, podczas gdy z euklidesowego punktu widzenia nawet sfery mają odróżniający je niezmiennik – promień $R = a_1 = \ldots = a_n$.

Elipsoidę o półosiach $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ można uważać za wpisaną w sferę o promieniu a_1, ponieważ odległość od środka elipsoidy do punktu $(x_1, \ldots, x_n)$ na niej jest równa $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ oraz

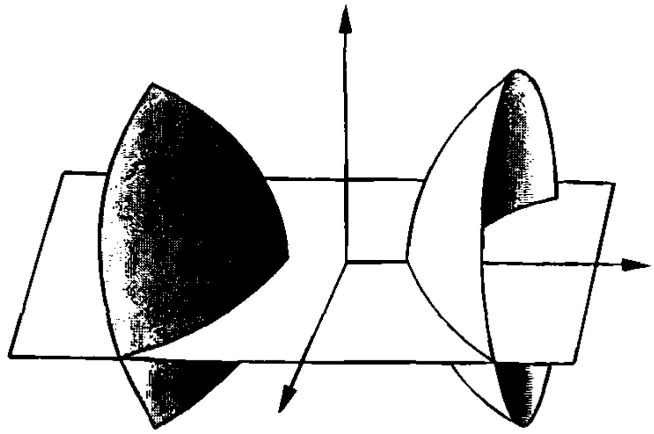
$$1 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \geqslant \frac{1}{a_1^2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

tj. $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant a_1^2$, przy czym równość zachodzi dla punktów $(\pm a_1, 0, \ldots, 0)$. Analogicznie a_n to promień sfery wpisanej w elipsoidę.

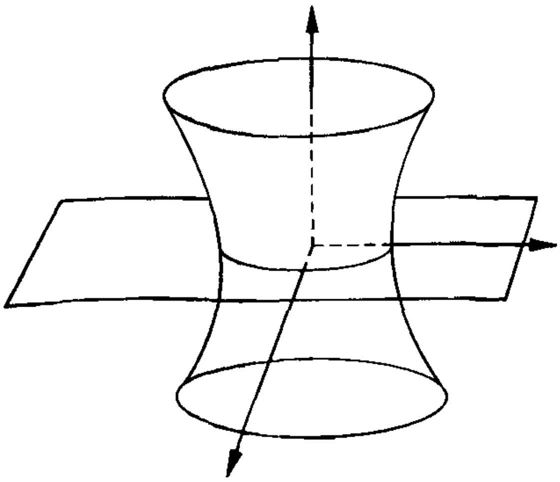
W przypadku hiperboloidy półosie $a_{s+1}, \ldots, a_n$ noszą nazwę *urojonych*, co wiąże się z faktem, że przekrój hiperboloidy podprzestrzenią afiniczną $x_1 = \ldots =$



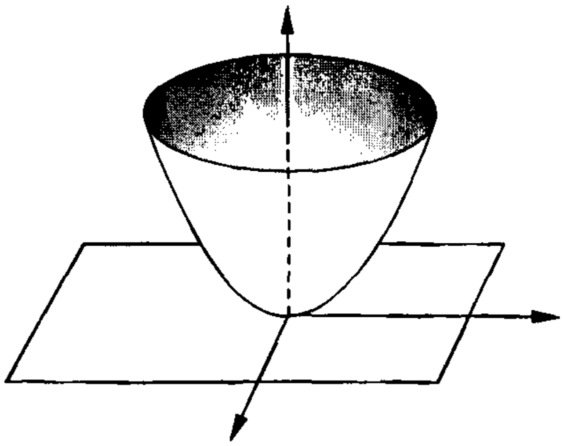
Rys. 13



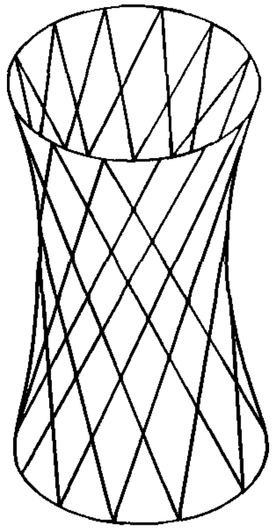
Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17

$x_3 = 0$ jest zbiorem pustym. Ogólnie rzecz biorąc, standardową metodą badania kwadryk jest analiza ich przekrojów, wnosząca w sytuacji wielowymiarowej cenne elementy poglądowe.

Przekroje elipsoidy hiperpłaszczyznami $x_i = \text{const}$, gdzie $|\text{const}| < a_i$, są znów elipsoidami w przestrzeni wymiaru $n-1$. Przekroje hiperboloid są bardziej różnorodne. Hiperbolę $x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 = 1$ dla $n = 2$ oraz hiperboloidę dwupowłokową i jednopowłokową

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

dla $n = 3$ możemy narysować (rys. 14, 15). Poza elipsoidami, są to wszystkie możliwe przekroje hiperboloid trzech różnych typów dla $n = 4$. Na przykład hiperboloida dwupowłokowa

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \frac{x_4^2}{a_4^2} = 1,$$

występująca w teorii względności, ma dwie składowe spójne, położone w półprzestrzeniach $x_1 \geqslant a_1$ i $x_1 \leqslant -a_1$. Jej przekroje hiperpłaszczyznami $x_i = \text{const}$ dla $i > 1$ są zwykłymi hiperboloidami dwupowłokowymi, a przekrój hiperpłaszczyzną $x_1 = \text{const}$, gdzie $|\text{const}| > a_1$, jest elipsoidą. Przekroje paraboloid są także różnorodne; nie będziemy się jednak nad nimi zatrzymywać, podobnie jak nad przekrojami walców i stożków różnych typów.

ĆWICZENIA

1. Sprawdzić, że każda kwadryka w trójwymiarowej przestrzeni afinicznej (włączając kwadryki puste i podprzestrzenie podwójne) ma w odpowiednim układzie współrzędnych jedno z poniższych równań:

(1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$;	(7) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;	(13) $x_1^2 - x_2^2 = 0$;
(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$;	(8) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$;	(14) $x_1^2 - 1 = 0$;
(3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$;	(9) $x_1^2 + x_2^2 = -1$;	(15) $x_1^2 + x_2^2 = 0$;
(4) $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$;	(10) $x_1^2 + x_2^2 = 1$;	(16) $x_1^2 + 1 = 0$;
(5) $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$;	(11) $x_1^2 = 2x_2$;	(17) $x_1^2 = 0$.
(6) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$;	(12) $x_1^2 - x_2^2 = 1$;	

2. Niech S będzie kwadryką w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$. Jeśli w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ równanie kwadryki ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0 = 0,$$

to wektory $\mathbf{e}_i$ nazywamy *kierunkami głównymi* kwadryki S (przypomnijmy „osie główne" formy kwadratowej). Znaleźć kierunki główne kwadryk:

(a) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 12xy + 4xz + 8yz + 18 = 0$;
(b) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 8x - 10y + 14z - 6 = 0$.

3. Ćwiczeniu **3.3.8**, dotyczącemu wartości ekstremalnych rzeczywistej formy kwadratowej, można teraz nadać sens bardziej geometryczny. Przypomnijmy,

że chodziło o wartości $q(\mathbf{v})$ przy $\|\mathbf{v}\| = 1$ lub, co na jedno wychodzi, o wartości $q(\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\|^2$. Wykazać, że

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} q(\mathbf{v}) = \min_{q(\mathbf{v})=1} \|\mathbf{v}\|^2.$$

Niech np. $n = 2$ i niech $q(\mathbf{v}) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 1$ będzie równaniem elipsy. Jeśli λ_i $(i = 1, 2)$ są pierwiastkami równania charakterystycznego $\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2) = 0$, a (x_i, y_i) są odpowiadającymi im punktami, w których ekstremum zostało osiągnięte, to $x_i^2 + y_i^2 = 1/\lambda_i$, tj. (dla $\lambda_1 \neq \lambda_2$) jeden z pierwiastków odpowiada kwadratowi największej, a drugi najmniejszej odległości od początku układu do punktu na elipsie. Jednocześnie otrzymujemy prostopadłość kierunków głównych elipsy oraz wzór $\pi/\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$ na pole powierzchni elipsy (uzasadnić!).

4. Dla jakich wartości parametru t kwadryka

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3 + 2tx_2x_3 - 4t = 0$$

jest elipsoidą?

5. Znaleźć typ afiniczny krzywej otrzymanej w przekroju kwadryki

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

hiperpłaszczyzną $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

6. Kiedy dwie hiperboloidy mają wspólny stożek asymptotyczny?

7. Jaką kwadrykę przypomina dach dworca kolejowego Warszawa-Ochota?

§ 3. PRZESTRZENIE RZUTOWE

Rozwój geometrii rzutowej, szczególnie w pierwszej połowie XIX wieku, wywarł istotny wpływ na całą matematykę. Poruszymy zaledwie kilka kwestii związanych z tą dziedziną, odsyłając Czytelnika do podręcznika [2] i bardziej specjalistycznej literatury.

1. Modele płaszczyzny rzutowej. Na płaszczyźnie afinicznej nad ciałem $\mathfrak{K}$ dowolne dwa różne punkty leżą na dokładnie jednej prostej, a dwie proste nierównoległe przecinają się w jednym punkcie.

Opiszemy teraz konstrukcję *płaszczyzny rzutowej* $\mathbb{P}^2 = \mathfrak{K}\mathbb{P}^2$ nad ciałem $\mathfrak{K}$; jest to pewien zbiór „punktów" wraz z pewnym zbiorem „prostych", pomiędzy którymi zachodzą *relacje incydencji* („punkt leży na prostej"), przy czym spełnione są następujące *aksjomaty incydencji*:

(i) dowolne dwa różne punkty leżą na dokładnie jednej prostej;
(ii) dowolne dwie różne proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.