że chodziło o wartości $q(\mathbf{v})$ przy $\|\mathbf{v}\| = 1$ lub, co na jedno wychodzi, o wartości $q(\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\|^2$. Wykazać, że

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} q(\mathbf{v}) = \min_{q(\mathbf{v})=1} \|\mathbf{v}\|^2.$$

Niech np. $n = 2$ i niech $q(\mathbf{v}) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 1$ będzie równaniem elipsy. Jeśli λ_i $(i = 1, 2)$ są pierwiastkami równania charakterystycznego $\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2) = 0$, a (x_i, y_i) są odpowiadającymi im punktami, w których ekstremum zostało osiągnięte, to $x_i^2 + y_i^2 = 1/\lambda_i$, tj. (dla $\lambda_1 \neq \lambda_2$) jeden z pierwiastków odpowiada kwadratowi największej, a drugi najmniejszej odległości od początku układu do punktu na elipsie. Jednocześnie otrzymujemy prostopadłość kierunków głównych elipsy oraz wzór $\pi/\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$ na pole powierzchni elipsy (uzasadnić!).

4. Dla jakich wartości parametru t kwadryka

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3 + 2tx_2x_3 - 4t = 0$$

jest elipsoidą?

5. Znaleźć typ afiniczny krzywej otrzymanej w przekroju kwadryki

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

hiperpłaszczyzną $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

6. Kiedy dwie hiperboloidy mają wspólny stożek asymptotyczny?

7. Jaką kwadrykę przypomina dach dworca kolejowego Warszawa-Ochota?

§ 3. PRZESTRZENIE RZUTOWE

Rozwój geometrii rzutowej, szczególnie w pierwszej połowie XIX wieku, wywarł istotny wpływ na całą matematykę. Poruszymy zaledwie kilka kwestii związanych z tą dziedziną, odsyłając Czytelnika do podręcznika [2] i bardziej specjalistycznej literatury.

1. Modele płaszczyzny rzutowej. Na płaszczyźnie afinicznej nad ciałem $\mathfrak{K}$ dowolne dwa różne punkty leżą na dokładnie jednej prostej, a dwie proste nierównoległe przecinają się w jednym punkcie.

Opiszemy teraz konstrukcję *płaszczyzny rzutowej* $\mathbb{P}^2 = \mathfrak{K}\mathbb{P}^2$ nad ciałem $\mathfrak{K}$; jest to pewien zbiór „punktów" wraz z pewnym zbiorem „prostych", pomiędzy którymi zachodzą *relacje incydencji* („punkt leży na prostej"), przy czym spełnione są następujące *aksjomaty incydencji*:

(i) dowolne dwa różne punkty leżą na dokładnie jednej prostej;
(ii) dowolne dwie różne proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

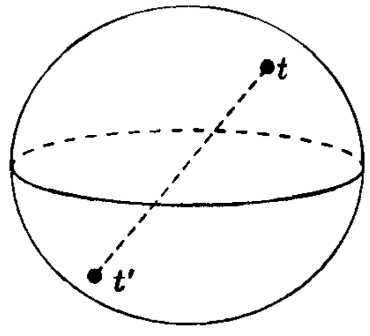
Wychodzimy od dowolnej trójwymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathfrak{K}$. Definiujemy $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ jako zbiór wszystkich jednowymiarowych podprzestrzeni liniowych w V, czyli każdy punkt $p \in \mathbb{P}(V)$ jest prostą w V (przechodzącą przez początek układu); *prostą rzutową* L definiujemy jako dowolną dwuwymiarową podprzestrzeń liniową w V. Wtedy (z definicji) punkt p „leży na prostej rzutowej" L (jest z nią incydentny), jeśli prosta p zawiera się w płaszczyźnie L.

Warunek (i) jest oczywiście spełniony: jeśli $p, q \in \mathfrak{K}\mathbb{P}^2$ i $p \neq q$, tj. p i q są różnymi prostymi w V, to suma algebraiczna $L = p + q$ jest dwuwymiarową podprzestrzenią liniową w V, czyli prostą rzutową, i jest to jedyna prosta rzutowa incydentna z p i q. Dwie różne proste rzutowe L i M są różnymi podprzestrzeniami dwuwymiarowymi w V, a więc $L + M = V$. Wobec tego (rozdz. 1, § 2, (7))

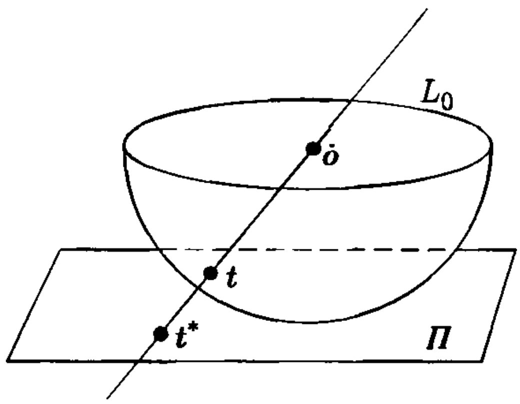
$$\dim(L \cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L + M) = 2 + 2 - 3 = 1,$$

co oznacza, że podprzestrzeń liniowa $L \cap M$ jest prostą; jest to właśnie jedyny punkt $p \in \mathbb{P}(V)$, w którym przecinają się proste rzutowe L i M. Warunek (ii) jest więc również spełniony.

Przedstawiona wyżej realizacja płaszczyzny rzutowej jest bliska pojęciu pęku prostych w przestrzeni afinicznej. Aby lepiej wyobrażać sobie płaszczyznę rzutową, przedstawimy jeszcze jeden jej model.



Rys. 18



Rys. 19

Niech $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$ będzie ciałem liczb rzeczywistych. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ rozpatrujemy sferę jednostkową

$$S^2 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Każda prosta przechodząca przez początek układu $\dot{o}$ w $\mathbb{R}^3$ przecina sferę S^2 w dwóch przeciwległych punktach, tzw. *punktach antypodycznych*, a każda płaszczyzna zawierająca $\dot{o}$ przecina ją wzdłuż pewnego okręgu (koła wielkiego). Przyjmijmy za „punkt" przestrzeni $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ parę $\{t, t'\}$ punktów antypodycznych na sferze, a za „prostą" — okrąg koła wielkiego; przyjmujemy przy tym, że punkt $p = \{t, t'\}$ leży na prostej L, gdy punkty antypodyczne t i t' leżą na okręgu L. Część wspólna okręgów dwóch różnych kół wielkich to oczywiście (dokładnie jedna) para punktów antypodycznych. Aksjomaty incydencji (i), (ii) są więc spełnione.

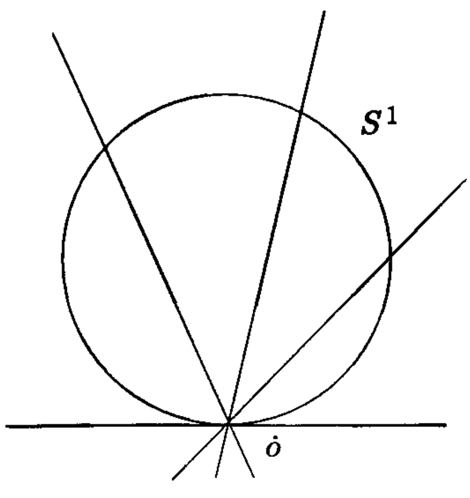
Moglibyśmy również ograniczyć się do punktów dolnej półsfery S^2_-, złożonej z tych wszystkich punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dla których $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $z \leqslant 0$ (rys. 19); jej brzegiem jest równik $S^1 \subset S^2$, opisany równaniami $x^2 + y^2 = 1$ i $z = 0$. Co najmniej jeden punkt z każdej pary punktów antypodycznych sfery S^2 należy do S^2_-, a oba — tylko wtedy, gdy leżą na równiku. Możemy więc przyjąć, że punkty płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$ to punkty półsfery S^2_-, w której utożsamiono („sklejono") każdy punkt równika z jego punktem antypodycznym. Prostymi są teraz półokręgi kół wielkich oraz sklejony równik S^1 z oczywistą relacją incydencji.

Rozważmy płaszczyznę afiniczną Π styczną do półsfery S^2_- w jej biegunie południowym $(0, 0, -1)$ i wykonajmy *rzut stereograficzny* półsfery (bez równika) na płaszczyznę Π z punktu $\dot{o}$. Oznacza to, że punktowi $t \in S^2_- \setminus S^1$ przyporządkowujemy punkt $t^* \in \Pi$ leżący na prostej przechodzącej przez $\dot{o}$ i t. Otrzymane w ten sposób odwzorowanie

$$\sigma : S^2_- \setminus S^1 \to \Pi$$

jest oczywiście wzajemnie jednoznaczne. Obrazem każdej prostej rzutowej, czyli półokręgu koła wielkiego na S^2, jest prosta na płaszczyźnie Π i oczywiście odwzorowanie σ zachowuje relację incydencji. Jedynie prosta rzutowa L_0 odpowiadająca równikowi S^1 nie ma swojego obrazu na płaszczyźnie Π.

Możemy więc przyjąć, że płaszczyzna rzutowa to płaszczyzna afiniczna ze zwykłymi prostymi i z dodaną jeszcze jedną prostą rzutową, zwaną *prostą w nieskończoności*. Odwzorowanie σ^{-1} przekształca dowolną rodzinę prostych równoległych na płaszczyźnie Π na rodzinę półokręgów przechodzących przez końce ustalonej średnicy równika S^1; każda taka rodzina prostych równoległych odpowiada więc dokładnie jednej parze punktów antypodycznych na równiku, czyli dokładnie jednemu punktowi prostej rzutowej L_0. Możemy więc uważać, że dodanie do płaszczyzny afinicznej prostej w nieskończoności oznacza dodanie do zwykłej płaszczyzny, dla każdego kierunku prostych równoległych, jednego „punktu w nieskończoności", w którym proste o tym kierunku się przecinają.



Rys. 20

Jednowymiarową przestrzeń rzutową $\mathbb{RP}^1$ (którą też nazywamy prostą rzutową) definiujemy jako pęk prostych na płaszczyźnie afinicznej, przechodzących przez ustalony punkt $\dot{o}$ (rys. 20). Zbiór ten można utożsamić z okręgiem S^1 (tym razem bez sklejania punktów antypodycznych). Istotnie, na dowolnym okręgu przechodzącym przez $\dot{o}$ każda prosta pęku wyznacza dokładnie jeden punkt (drugi punkt przecięcia z okręgiem lub punkt $\dot{o}$ w wypadku prostej stycznej do okręgu). Tak więc modelem prostej rzutowej jest okrąg.

2. Przestrzenie rzutowe wyższych wymiarów. Z chwilą gdy uzyskaliśmy pewne wyobrażenie na temat prostej rzutowej i płaszczyzny rzutowej, zdefiniowanie ogólnego pojęcia przestrzeni rzutowej wyższego wymiaru nad dowolnym ciałem nie przedstawia trudności. Można myśleć o takiej przestrzeni jako o pewnym zbiorze punktów wraz z pewnym zbiorem *podprzestrzeni rzutowych* oraz relacjami incydencji, dla których spełnione są odpowiednie aksjomaty. Droga aksjomatyczna, mająca pewne zalety, wydaje się jednak właściwa dla specjalistycznego wykładu; dla nas byłaby drogą zbyt okrężną, dlatego wybieramy podejście bezpośrednie, równoważne w gruncie rzeczy z rozpatrywaniem pęków prostych w przestrzeni afinicznej.

DEFINICJA 1. Niech V będzie $(n+1)$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathfrak{K}$. *Przestrzenią rzutową* $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich prostych wektorowych (jednowymiarowych podprzestrzeni liniowych) w V. Jeśli $V = \mathfrak{K}^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = \mathfrak{K}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathfrak{K}^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy *n-wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem $\mathfrak{K}$*. Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru $m+1$, to zbiór $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ nazywamy *podprzestrzenią rzutową* wymiaru m w $\mathbb{P}(V)$; składa się ona z tych prostych w przestrzeni V, które leżą w podprzestrzeni liniowej U. Dla $m = n-1$ mówimy o *hiperpłaszczyźnie rzutowej.* Przyjmujemy z definicji, że $\mathbb{P}(\{\mathbf{0}\}) = \emptyset$.

Tę samą definicję można wyrazić nieco inaczej: przestrzeń rzutowa wyznaczona przez V jest zbiorem ilorazowym zbioru $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ względem relacji równoważności

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\},\; \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}.$$

Punktem przestrzeni $\mathbb{P}(V)$ jest więc klasa równoważności $\widetilde{\mathbf{x}}$ niezerowego wektora $\mathbf{x} \in V$. Z definicji mamy

$$\widetilde{\lambda \mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{x}} \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Odwzorowanie ilorazowe $\pi : \mathbf{x} \mapsto \widetilde{\mathbf{x}}$ zbioru $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ na zbiór $\mathbb{P}(V)$ nazywamy *odwzorowaniem kanonicznym.* Należy podkreślić, że zbiór $\mathbb{P}(V)$ nie ma żadnej struktury liniowej i nie możemy np. przyjąć, że $\widetilde{\mathbf{x}} \oplus \widetilde{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{y}}$.

Dwuwymiarowa podprzestrzeń liniowa $U \subset V$ wyznacza prostą rzutową $\mathbb{P}(U)$, a podprzestrzeń trójwymiarowa — płaszczyznę rzutową. Jeśli mamy dwie podprzestrzenie liniowe U i W oraz $U \subset W$, to oczywiście $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$ (prosta zawarta w U jest też zawarta w W); mówimy wtedy, że podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}(U)$ jest incydentna z $\mathbb{P}(W)$. Dla dowolnych podprzestrzeni liniowych $U, U' \subset V$ mamy też równość

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(U') = \mathbb{P}(U \cap U').$$

Wynika stąd, że dla każdego podzbioru $S \subset \mathbb{P}(V)$ istnieje najmniejsza podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}(U)$ zawierająca S; mówimy wtedy, że podprzestrzeń $\mathbb{P}(U)$ jest *generowana* przez zbiór S. Jeśli np. $S = \{\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots\}$, to $U = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \rangle$. Podprzestrzenią rzutową generowaną przez $\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(U')$ jest $\mathbb{P}(U + U')$.

3. Współrzędne jednorodne. Niech $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V. Jeśli

$$\mathbf{x} = \xi_0 \mathbf{e}_0 + \xi_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_n \mathbf{e}_n \in V \setminus \{\mathbf{0}\},$$

to liczby $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ nazywamy *współrzędnymi jednorodnymi* punktu $\tilde{\mathbf{x}}$ względem bazy $(\mathbf{e}_i)$. Każdy układ (ξ_i) złożony z $n+1$ elementów ciała $\mathfrak{K}$, nie równych jednocześnie zeru, to współrzędne jednorodne pewnego punktu przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$. Dwa układy (ξ_i) i (μ_i) są współrzędnymi jednorodnymi tego samego punktu $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}(V)$ (przy ustalonej bazie $(\mathbf{e}_i)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy skalar $\lambda \in \mathfrak{K}$ taki, że $\mu_i = \lambda \xi_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Piszemy wówczas

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n),$$

co ma wyrażać wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}(V)$ i klasami proporcjonalnych układów $n+1$ współrzędnych.

Jeśli $(\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ jest inną bazą w V, przy czym

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

to skalary $\xi'_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_n$ są współrzędnymi jednorodnymi punktu $\tilde{\mathbf{x}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}$ spełniające warunek

$$\lambda \xi_i = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \xi'_j, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Istotnie, mamy

$$(\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n) = \tilde{\mathbf{x}} = (\xi'_0 : \xi'_1 : \ldots : \xi'_n),$$

i wystarczy przypomnieć przejście od nowych współrzędnych wektora do starych (rozdz. 1).

Zauważmy jeszcze, że ponieważ każda podprzestrzeń liniowa jest zbiorem rozwiązań pewnego układu liniowego jednorodnego (rozdz. 1, § 3, twierdzenie 4), więc dla ustalonej bazy $(\mathbf{e}_i)$ w V każda podprzestrzeń rzutowa jest we współrzędnych jednorodnych opisana przez pewien układ równań liniowych jednorodnych

$$a_{10}\xi_0 + a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3}$$
$$a_{r0}\xi_0 + a_{r1}\xi_1 + \ldots + a_{rn}\xi_n = 0.$$

4. Mapy afiniczne. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ podprzestrzeń liniową
$$V_0 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle,$$
a w przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A} = V, V)$ — hiperpłaszczyznę
$$\mathbb{A}_0 = \mathbf{e}_0 + V_0 = \{\mathbf{e}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V_0\}.$$

Jak wiemy, para $(\mathbb{A}_0, V_0)$ jest przestrzenią afiniczną: jeśli $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_0$ i $\mathbf{v} \in V_0$, to $\mathbf{a}+\mathbf{v} \in \mathbb{A}_0$. Prosta wektorowa $\langle \mathbf{x} \rangle \subset V$, niezawarta w V_0, przecina $\mathbb{A}_0$ w dokładnie jednym punkcie. Istotnie, jeśli $\mathbf{x} \notin V_0$, to
$$\mathbf{x} = \xi_0\mathbf{e}_0 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n, \qquad \xi_0 \neq 0.$$

Stąd równość $\lambda\mathbf{x} = \lambda\xi_0\mathbf{e}_0 + \lambda\xi_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda\xi_n\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_0 + \mathbf{y}$, gdzie $\mathbf{y} \in V_0$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda\xi_0 = 1$.

Przyporządkowując prostej $\langle \mathbf{x} \rangle$ jej punkt przecięcia $\langle \mathbf{x} \rangle \cap \mathbb{A}_0$ z $\mathbb{A}_0$, otrzymujemy odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną
$$\Phi : \langle \mathbf{x} \rangle \mapsto \langle \mathbf{x} \rangle \cap \mathbb{A}_0$$
między prostymi $\langle \mathbf{x} \rangle \not\subset V_0$ i punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_0$. Inaczej mówiąc, Φ indukuje bijekcję
$$\Phi_0 : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0) \to \mathbb{A}_0. \tag{4}$$

Definicja 2. Przestrzeń afiniczną $\mathbb{A}_0$ wraz z odwzorowaniem Φ_0 (a niekiedy samo odwzorowanie Φ_0, utożsamiające podzbiór $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$ z $\mathbb{A}_0$) nazywamy *mapą afiniczną* przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$. Hiperpłaszczyznę rzutową $\mathbb{P}(V_0)$ nazywamy *hiperpłaszczyzną w nieskończoności* (lub *hiperpłaszczyzną niewłaściwą*) względem mapy $\mathbb{A}_0$. Ta sama terminologia odnosi się do wszystkich podprzestrzeni rzutowych zawartych w $\mathbb{P}(V_0)$. W szczególności zbiór $\mathbb{P}(V_0)$ składa się ze wszystkich *punktów w nieskończoności* (lub *punktów niewłaściwych*) względem mapy $\mathbb{A}_0$.

Wyrazimy to samo we współrzędnych. Zbiór $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$ składa się z tych punktów $\widetilde{\mathbf{x}} = (\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n)$, dla których $\xi_0 \neq 0$. Wybierzmy w $\mathbb{A}_0$ układ współrzędnych $(\dot{e}_0; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, gdzie $\dot{e}_0 = \mathbf{e}_0 \in \mathbb{A}_0$. Jak stwierdziliśmy, punktem wspólnym prostej $\langle \mathbf{x} \rangle = \langle \xi_0\mathbf{e}_0 + \xi_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n \rangle$ z $\mathbb{A}_0$ jest
$$\mathbf{e}_0 + \frac{\xi_1}{\xi_0}\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\xi_n}{\xi_0}\mathbf{e}_n,$$
czyli punkt ten ma współrzędne afiniczne $\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_n/\xi_0$.

Jeśli więc przypiszemy punktowi $\widetilde{\mathrm{x}} \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$ współrzędne punktu $\Phi_0(\widetilde{\mathrm{x}}) \in \mathbb{A}_0$, otrzymamy afiniczny (niejednorodny) układ współrzędnych na $\mathbb{P}(V)$, określony co prawda tylko na podzbiorze $\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(V_0)$; inaczej mówiąc, przy ustalonej bazie w V, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między punktami tego podzbioru i ich współrzędnymi niejednorodnymi, określonymi w powyższy sposób.

Jeśli U jest podprzestrzenią liniową w V wymiaru $m+1$, to m-wymiarowa podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}(U)$ jest albo podprzestrzenią w nieskończoności względem $\mathbb{A}_0$, gdy $U \subset V_0$, albo też jej obrazem na mapie $\mathbb{A}_0$ jest m-wymiarowa podprzestrzeń afiniczna

$$\Phi_0(\mathbb{P}(U)) = U \cap \mathbb{A}_0 = \mathbf{e}_0 + U_0.$$

Na odwrót, każdej m-wymiarowej podprzestrzeni afinicznej $\mathbf{e}_0 + U_0 \subset \mathbb{A}_0$ odpowiada m-wymiarowa podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}(U)$, gdzie $U = \langle \mathbf{e}_0, U_0 \rangle$. Oznacza to, że Φ_0 jest nie tylko bijekcją zbiorów punktowych, ale wyznacza też odpowiedniość podprzestrzeni jednakowych wymiarów. W tym sensie można uważać, że $\mathbb{P}(V)$ otrzymuje się z $\mathbb{A}_0$ przez dodanie hiperpłaszczyzny w nieskończoności.

Jeśli zamiast $\mathbf{e}_0$ weźmiemy wektor $\mathbf{e}_i$, a zamiast V_0 podprzestrzeń

$$V_i = \langle \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

otrzymamy inną mapę afiniczną $(\mathbb{A}_i, \Phi_i)$. Mapa ta obejmuje obszar przestrzeni rzutowej złożony z punktów o współrzędnych jednorodnych $(\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n)$, dla których $\xi_i \neq 0$, i przyporządkowuje takiemu punktowi współrzędne afiniczne

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi_i}, \ldots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i}, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_i}\right).$$

Biorąc kolejne wektory $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, otrzymujemy $n+1$ map

$$(\mathbb{A}_i, \Phi_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

pokrywających całą przestrzeń rzutową $\mathbb{P}(V)$. Istotnie, każdy punkt $\widetilde{\mathrm{x}} = (\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n) \in \mathbb{P}(V)$ ma co najmniej jedną współrzędną jednorodną ξ_i różną od zera, co oznacza, że $\Phi_i(\widetilde{\mathrm{x}}) \in \mathbb{A}_i$. Tak więc n-wymiarowa przestrzeń rzutowa jest sumą $n+1$ zbiorów, z których każdy można utożsamić z n-wymiarową przestrzenią afiniczną — mówimy, że można ją pokryć $n+1$ mapami afinicznymi. W skrócie piszemy

$$\mathbb{P}(V) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}_i.$$

Oczywiście żaden układ mniej niż $n+1$ spośród powyższych map nie pokrywa $\mathbb{P}(V)$.

5. Pojęcie rzutowego zbioru algebraicznego. Powiemy, że wielomian

$$f(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{K}[t_0, t_1, \ldots, t_n]$$

zeruje się w punkcie $\widetilde{\mathrm{x}} = (\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n) \in \mathbb{P}(V)$, jeśli $f(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ dla dowolnych współrzędnych jednorodnych punktu $\widetilde{\mathrm{x}}$. Oznacza to, że wtedy $f(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_n) = 0$ dla każdego $\lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}$. Jeśli

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_m,$$

gdzie f_i jest sumą wszystkich jednomianów stopnia i w f, to (w przypadku nieskończonego ciała $\mathfrak{K}$) z warunku

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) \\ &= f_0 + \lambda f_1(\xi_0, \ldots, \xi_n) + \ldots + \lambda^m f_m(\xi_0, \ldots, \xi_n) \end{aligned}$$

dla każdego $\lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}$ wynika, że $f_i(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, m$. Jeśli więc wielomian f zeruje się w pewnym punkcie $\widetilde{\mathrm{b}} \in \mathbb{P}(V)$, to w tym punkcie zeruje się też każda składowa jednorodna tego wielomianu. Naturalne jest wobec tego przyjęcie następującej definicji:

DEFINICJA 3. Zbiór $S \subset \mathbb{P}^n$ punktów $(\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n)$ spełniających układ równań

$$\begin{gathered} g_1(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = 0, \end{gathered}$$

gdzie $g_1, \ldots, g_k$ są wielomianami jednorodnymi, nazywamy *zbiorem algebraicznym* (*rzutowym*).

Zbiory algebraiczne (w szczególności zespolone, gdy $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$) to przedmiot zainteresowania wielkiej osobnej gałęzi matematyki – geometrii algebraicznej.

Ograniczymy się dla prostoty do przypadku jednego równania

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Znajdziemy równanie zbioru S w mapie $\mathbb{A}_0$, tzn. równanie zbioru $S_0 = S \cap \mathbb{A}_0$ w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_0$. Jeśli $\widetilde{\mathrm{x}} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n) \in \mathbb{A}_0$, to $\alpha_0 \neq 0$. Wobec tego warunek $g(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ jest równoważny warunkowi

$$g\left(1, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right) = 0.$$

Ponieważ liczby $\alpha_1/\alpha_0, \ldots, \alpha_n/\alpha_0$ to współrzędne punktu $\widetilde{\mathrm{x}}$ w mapie $\mathbb{A}_0$, więc powyższa równość to właśnie szukane równanie. Analogicznie, dzieląc przez α_i, otrzymamy równanie zbioru S w mapie $\mathbb{A}_i$.

Na odwrót, jeśli oznaczymy współrzędne w $\mathbb{A}_0$ przez $x_1, \ldots, x_n$ i zbiór S_0 jest opisany przez równanie

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

gdzie f jest dowolnym (niekoniecznie jednorodnym) wielomianem stopnia m, to wielomian

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_0)^m f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)$$

jest jednorodny. Istotnie, z każdego jednomianu

$$(x_1)^{k_1} \ldots (x_n)^{k_n}, \qquad k_1 + \ldots + k_n \leqslant m,$$

w f otrzymujemy w g jednomian $(\alpha_0)^{m-k_1-\ldots-k_n}(\alpha_1)^{k_1} \ldots (\alpha_n)^{k_n}$ stopnia m. Ponadto

$$g(1, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Jeśli więc zbiór S w $\mathbb{P}^n$ jest opisany przez równanie $g = 0$, to $S \cap \mathbb{A}_0 = S_0$.

Przykład 1 (krzywe stożkowe). Poniżej zakładamy, że $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$.

1) Okręgowi S_0 mającemu w mapie $\mathbb{A}_0$ równanie $x_1^2+x_2^2 = 1$ odpowiada na płaszczyźnie rzutowej $\mathbb{P}^2$ zbiór S, który ma we współrzędnych jednorodnych równanie $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_0^2$. Zbiór ten leży całkowicie w mapie $\mathbb{A}_0$: gdyby istniał punkt $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in S$, dla którego $\alpha_0 = 0$, to mielibyśmy $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$, a stąd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 = 0$, co jest niemożliwe. Tak więc zbiór S nie ma punktów wspólnych z prostą niewłaściwą $\mathbb{P}(V_0)$ względem mapy $\mathbb{A}_0$.

2) Hiperboli S_0 o równaniu $x_1^2 - x_2^2 = 1$ w mapie $\mathbb{A}_0$ odpowiada we współrzędnych jednorodnych zbiór S o równaniu $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_0^2$. Zbiór $S \cap \mathbb{P}(V_0)$ jest opisany przez równanie $\alpha_0 = 0$, tj. $\alpha_2 = \pm\alpha_1$. Przy tym $\alpha_1 \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie wszystkie współrzędne byłyby zerami. Dzieląc przez α_1, otrzymujemy dwa punkty wspólne z $\mathbb{P}(V_0)$, o współrzędnych $(0 : 1 : 1)$ oraz $(0 : 1 : -1)$. Z drugiej strony, w mapie $\mathbb{A}_1$ mamy $\alpha_1 \neq 0$ i równanie zbioru S w tej mapie przybiera postać $x_0^2 + x_2^2 = 1$ ($x_0 = \alpha_0/\alpha_1$, $x_2 = \alpha_2/\alpha_1$), tj. zbiór $S \cap \mathbb{A}_1$ jest okręgiem oraz $S \cap \mathbb{P}(V_1) = \emptyset$.

3) Parabola $x_1 = x_2^2$ (w $\mathbb{A}_0$) po podstawieniu $x_1 = \alpha_1/\alpha_0$, $x_2 = \alpha_2/\alpha_0$ wyznacza zbiór S o równaniu $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_2^2$. Część wspólna tego zbioru z $\mathbb{P}(V_0)$ ($\alpha_0 = 0$) to jeden punkt (podwójny) $(0 : 1 : 0)$. Po zamianie zmiennych $\alpha_0 = \beta_0 - \beta_1$, $\alpha_1 = \beta_0 + \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ równanie zbioru S przyjmuje postać $\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta_0^2$, co w nowej mapie $\mathbb{A}_0'$ daje okrąg. Tak więc okrąg (lub elipsa), hiperbola i parabola — to na płaszczyźnie rzutowej jedna i ta sama krzywa, rozpatrywana jedynie w różnych mapach afinicznych.

6. Pełna grupa rzutowa. Niech $\mathbb{P}(V)$ będzie przestrzenią rzutową wyznaczoną przez przestrzeń liniową V nad ciałem $\mathfrak{K}$, czyli punkt $\tilde{\mathrm{x}} \in \mathbb{P}(V)$ to prosta wektorowa $\langle \mathrm{x} \rangle \subset V$. Niech $\mathcal{A} : V \to V$ będzie nieosobliwym przekształceniem liniowym. Operator $\mathcal{A}$ przeprowadza proste wektorowe na proste wektorowe; w szczególności obrazem żadnej prostej $\langle \mathrm{x} \rangle$ nie jest podprzestrzeń zerowa. Ma więc sens następująca

DEFINICJA 4. Każdy nieosobliwy operator liniowy $\mathcal{A}$ na przestrzeni liniowej V wyznacza odwzorowanie $\widetilde{\mathcal{A}} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, zwane *przekształceniem rzutowym* i określone wzorem

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{x}}. \tag{5}$$

Definicja ta jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentanta klasy $\widetilde{\mathbf{x}}$:

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\lambda \mathbf{x}}) = \widetilde{\lambda \mathcal{A}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\mathbf{x}}). \tag{6}$$

Z równości (6) wynika również, że $\widetilde{\lambda\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{A}}$. W rzeczywistości zachodzi mocniejsze

TWIERDZENIE 1. *Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{GL}(V)$, to równość $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{A}}$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$ dla pewnego $\lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}$.*

Dowód. Istotnie, przyjmijmy, że $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{A}}$. Wtedy dla każdego wektora $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ mamy $\widetilde{\mathcal{B}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{x}}$, a więc $\mathcal{B}\mathbf{x} = \lambda_{\mathbf{x}}\mathcal{A}\mathbf{x}$ dla pewnego skalara $\lambda_{\mathbf{x}} \neq 0$, a priori zależnego od $\mathbf{x}$. Jeśli $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$, to

$$\lambda_{\mathbf{y}}\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{B}\mathbf{y} = \alpha\mathcal{B}\mathbf{x} = \alpha\lambda_{\mathbf{x}}\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda_{\mathbf{x}}\mathcal{A}\mathbf{y},$$

czyli $\lambda_{\mathbf{y}} = \lambda_{\mathbf{x}}$. Jeśli natomiast wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ są liniowo niezależne, to wektory $\mathcal{A}\mathbf{x}$ i $\mathcal{A}\mathbf{y}$ — również, a więc z równości

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbf{x}}\mathcal{A}\mathbf{x} + \lambda_{\mathbf{y}}\mathcal{A}\mathbf{y} &= \mathcal{B}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{y} = \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\mathcal{A}\mathbf{x} + \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\mathcal{A}\mathbf{y}\end{aligned}$$

wynika, że $\lambda_{\mathbf{x}} = \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = \lambda_{\mathbf{y}}$. Oznacza to, że skalar $\lambda = \lambda_{\mathbf{x}}$ nie zależy od $\mathbf{x}$, a zatem $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$. ■

Aby zapisać przekształcenie rzutowe $\mathcal{A}$ we współrzędnych, wybierzmy bazę $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w przestrzeni liniowej V i oznaczmy przez $A = (a_{ij})$ macierz operatora liniowego $\mathcal{A}$ w tej bazie:

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

Jeśli $\widetilde{\mathbf{x}} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n)$, to $\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} = (\beta_0 : \beta_1 : \ldots : \beta_n)$, gdzie

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\alpha_j, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Widać to natychmiast z definicji (5) i z reguł transformacji współrzędnych wektorów przy działaniu operatora liniowego (rozdz. 2):

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\mathcal{A}\mathbf{e}_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \alpha_j a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

Niech teraz $\mathbb{A}_0$ będzie mapą afiniczną w $\mathbb{P}(V)$. Składa się ona z punktów $\widetilde{\mathbf{x}} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n)$, dla których $\alpha_0 \neq 0$. Jeśli okaże się, że $\beta_0 \neq 0$ w (7), to również $\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{A}_0$. Punkt $\widetilde{\mathbf{x}}$ ma w tej mapie współrzędne $x_j = \alpha_j/\alpha_0$, a punkt $\widetilde{\mathcal{A}}\mathbf{x}$ — współrzędne $y_j = \beta_j/\beta_0$, $j = 1, \ldots, n$. Jeśli podzielimy równości (7) o numerach $i = 1, \ldots, n$ przez β_0, a następnie, w ułamkach otrzymanych po prawej stronie, podzielimy licznik i mianownik przez α_0, otrzymamy zapis przekształcenia rzutowego $\widetilde{\mathcal{A}}$ w mapie $\mathbb{A}_0$:

$$y_i = \frac{a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + a_{i0}}{a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n + a_{00}}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Zwróćmy uwagę na to, że wszystkie te ułamki mają ten sam mianownik.

Uwaga. Należy pamiętać, że przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{A}}$ może przeprowadzać punkt z $\mathbb{A}_0$ (ściślej, z $\Phi_0^{-1}(\mathbb{A}_0)$) w punkt spoza tej mapy, tj. w punkt w nieskończoności (czyli należący do $\mathbb{P}(V_0)$). Wtedy wzór (8) traci sens. Nie nastąpi to nigdy, jeśli np. macierz operatora $\mathcal{A}$ ma własność $a_{0j} = 0$ dla $j = 1, \ldots, n$ oraz $a_{00} = 1$ — wtedy jako (8) otrzymujemy znane wzory na afiniczną zamianę współrzędnych w $\mathbb{A}_0$. Tak więc przekształcenie afiniczne to szczególny przypadek przekształcenia rzutowego.

Ponieważ operator $\mathcal{A}$ jest nieosobliwy, więc dla dowolnego wektora $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ w V istnieje wektor $\mathbf{x}$ taki, że $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Wtedy również $\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{y}}$, czyli odwzorowanie $\widetilde{\mathcal{A}}$ jest surjekcją. Jest ono również injekcją: $\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{z}} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{z}} \Rightarrow \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathcal{A}\mathbf{z} \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{z}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{z} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{z}}$.

Udowodniliśmy, że każde przekształcenie rzutowe jest bijekcją.

Ponadto, jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{GL}(V)$, to

$$\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{B}}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{B}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{\mathbf{x}}) = (\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{B}})\widetilde{\mathbf{x}},$$

skąd wynika, że zbiór wszystkich przekształceń rzutowych tworzy grupę.

Definicja 5. Zbiór wszystkich przekształceń rzutowych przestrzeni $\mathbb{P}(V)$, oznaczany przez $\mathrm{PGL}(V)$, jest podgrupą grupy wszystkich bijekcji $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$; podgrupę tę nazywamy *pełną grupą rzutową*.

Oznaczenie $\mathrm{PGL}(V)$ wiąże się z tym, że grupa $\mathrm{PGL}(V)$ jest obrazem homomorficznym pełnej grupy liniowej $\mathrm{GL}(V)$. Istotnie, przed chwilą wykazaliśmy, że odwzorowanie $\pi : \mathcal{A} \mapsto \widetilde{\mathcal{A}}$ spełnia warunek $\pi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \pi(\mathcal{A})\pi(\mathcal{B})$. Z twierdzenia 1 wynika, że jądro $\operatorname{Ker}\pi$ składa się z podobieństw $\lambda\mathcal{E}$: $\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$ dla pewnego $\lambda \in \mathfrak{K} \setminus \{0\}$. Ponieważ odwzorowanie $\Psi : \lambda \mapsto \lambda\mathcal{E}$ jest oczywiście izomorfizmem grup $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} \setminus \{0\}$ i $\operatorname{Ker}\pi = \{\lambda\mathcal{E} \mid \lambda \in \mathfrak{K}^*\}$, więc otrzymujemy

TWIERDZENIE 2. *Pełna grupa rzutowa* $\mathrm{PGL}(V)$ *jest obrazem homomorficznym pełnej grupy liniowej* $\mathrm{GL}(V)$ *przy homomorfizmie* π, *którego jądro jest izomorficzne z grupą multiplikatywną* $\mathfrak{K}^*$ *ciała* $\mathfrak{K}$. *Mamy zatem krótki ciąg dokładny*

$$1 \to \mathfrak{K}^* \xrightarrow{\Psi} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{PGL}(V) \to 1. \ \blacksquare \tag{9}$$

Moglibyśmy się w tym przypadku obejść bez ciągu dokładnego (9), który oznacza po prostu, że Ψ jest monomorfizmem, $\operatorname{Im}\Psi = \operatorname{Ker}\pi$ i π jest epimorfizmem. Skorzystaliśmy jednak z okazji, by jeszcze raz użyć tego pojęcia, ważnego w wielu działach współczesnej matematyki.

7. Geometria rzutowa. Wiemy, że pełna grupa rzutowa $\mathrm{PGL}(V)$ działa na przestrzeni $\mathbb{P}(V)$ w sposób przechodni, tj. każdy punkt można przeprowadzić na każdy inny. Zgodnie z ogólną filozofią (rozdz. 4, § 3, p. 4) grupie $\mathrm{PGL}(V)$ odpowiada pewna geometria, zwana *geometrią rzutową*. Rozpatruje ona te własności figur w $\mathbb{P}(V)$, które nie ulegają zmianie przy działaniu przekształceń należących do $\mathrm{PGL}(V)$. Własności takie nazywamy *rzutowymi*. Nie należy do nich wiele własności znanych z geometriii afinicznej i euklidesowej, jak równoległość prostych lub płaszczyzn czy twierdzenie Pitagorasa, ponieważ własności te nie mają sensu w geometrii rzutowej. Mimo to geometria rzutowa okazuje się dziedziną obfitującą w głębokie twierdzenia. Nieco później poznamy przykład pewnej rzutowej własności układu czterech punktów współliniowych; na razie odnotujmy kilka własności pełnej grupy rzutowej $\mathrm{PGL}(V)$.

I. Zgodnie z uwagą, którą uczyniliśmy po wyprowadzeniu wzoru (8), *grupa* $\mathrm{PGL}(V)$ *zawiera jako podgrupę grupę afiniczną* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}_0)$ *działającą w mapie* $\mathbb{A}_0$ (*a także grupy* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}_i)$ *dla* $i = 1, \ldots, n$).

II. Powiemy, że punkty $\widetilde{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{x}}_{n+1}$ w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$ są *w położeniu ogólnym*, jeśli żadne $n+1$ z nich nie leżą w jednej hiperpłaszczyźnie rzutowej. Inaczej mówiąc, dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n+1$ wektory

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}$$

są liniowo niezależne (jak zwykle daszek oznacza, że dany element został opuszczony).

TWIERDZENIE 3. *Jeśli* $\widetilde{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{x}}_{n+1}$ *oraz* $\widetilde{\mathbf{y}}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{y}}_{n+1}$ *są dwoma układami punktów w położeniu ogólnym w* $\mathbb{P}(V)$, *to istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe* $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{PGL}(V)$, *dla którego* $\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}}_i = \widetilde{\mathbf{y}}_i$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

Dowód. Zgodnie z definicją mamy

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \rangle = V = \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n+1} \rangle,$$

a więc istnieje nieosobliwy operator liniowy $\mathcal{A}'$ taki, że

$$\mathcal{A}'\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \ldots, n+1. \tag{10}$$

Szukamy jednak operatora liniowego $\mathcal{A}$, który spełnia warunek $\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}}_i = \widetilde{\mathbf{y}}_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n+1$, czyli

$$\mathcal{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n+1,$$

dla pewnych skalarów $\lambda_i \neq 0$. Ponieważ $\widetilde{\lambda\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{A}}$, możemy przyjąć, że $\lambda_0 = 1$.

Rozważmy operator liniowy $\mathcal{B}$ taki, że

$$\mathcal{B}\mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i, \qquad i = 1, \ldots, n+1. \tag{11}$$

Skalary λ_i dobierzemy tak, by spełniony był warunek

$$\mathcal{B}\mathcal{A}'\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0. \tag{12}$$

Z definicji układu punktów w położeniu ogólnym wynika, że

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i, \qquad \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \mathbf{y}_i, \tag{13}$$

przy czym wszystkie współczynniki α_i oraz β_i są różne od zera. Na mocy (10) mamy

$$\mathcal{B}\mathcal{A}'\mathbf{x}_0 = \mathcal{B}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathcal{A}'\mathbf{x}_i\Big) = \mathcal{B}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{y}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathcal{B}\mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i \mathbf{y}_i.$$

Jeśli więc przyjmiemy $\lambda_i = \beta_i/\alpha_i$ dla $i = 1, \ldots, n+1$, to warunek (12) będzie spełniony. Przekształcenie liniowe $\mathcal{B}$ jest w ten sposób określone jednoznacznie. Definiując

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}',$$

otrzymamy operator liniowy, któremu odpowiada przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{A}}$ spełniające żądane warunki.

Aby udowodnić jedyność $\widetilde{\mathcal{A}}$ ([1]), przypuśćmy, że $\mathcal{C}\mathbf{x}_i = \mu_i \mathbf{y}_i$ dla $i = 0, 1, \ldots \ldots, n+1$. Zatem $\mathcal{C}\mathbf{x}_0 = \mu_0 \mathbf{y}_0$. Ponieważ, na podstawie (13), $\mathcal{C}\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mu_i \mathbf{y}_i$, więc

$$\mu_0 \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mu_i \mathbf{y}_i.$$

Z drugiej strony, $\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i \mathbf{y}_i$ (na mocy drugiego wzoru (13) i definicji λ_i), więc

$$\mu_0 \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_0 \lambda_i \alpha_i \mathbf{y}_i.$$

Stąd (ponieważ $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n+1}$ tworzą bazę) mamy $\alpha_i \mu_i = \mu_0 \lambda_i \alpha_i$, czyli $\mu_i = \mu_0 \lambda$ dla $i = 1, \ldots, n+1$. Zatem $\mathcal{C} = \mu_0 \mathcal{A}$, czyli $\widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{A}}$. ∎

([1]) Tę część dowodu dodano w tłumaczeniu (*przyp. tłum.*).

Twierdzenie 3 jest oczywiście odpowiednikiem analogicznego twierdzenia w geometrii afinicznej (rozdz. 4, § 3, twierdzenie 8).

Wniosek. *Dla dowolnych dwóch trójek $\widetilde{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbf{x}}_1, \widetilde{\mathbf{x}}_2$ oraz $\widetilde{\mathbf{y}}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_1, \widetilde{\mathbf{y}}_2$ różnych punktów na prostej rzutowej istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ przeprowadzające $\widetilde{\mathbf{x}}_i$ na $\widetilde{\mathbf{y}}_i$ dla $i = 0, 1, 2$.* ∎

Oznacza to między innymi, że własność „leżenia między” nie jest własnością rzutową. Z twierdzenia 3 wynika też (na mocy jedyności $\widetilde{\mathcal{A}}$), że nie każdą czwórkę punktów na prostej można przeprowadzić na każdą przez przekształcenie rzutowe.

III. *Dowolne dwie m-wymiarowe podprzestrzenie rzutowe $\mathbb{P}(U)$, $\mathbb{P}(W)$ w $\mathbb{P}(V)$ są* PGL(V)*-przystające, tj. jedną można przeprowadzić na drugą za pomocą przekształcenia rzutowego.*

Istotnie, niech

$$U = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle, \qquad W = \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle.$$

Uzupełnijmy $(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_m)$ i $(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_m)$ do baz $(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n)$ i $(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_n)$ w V, a następnie rozważmy operator $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$ taki, że $\mathcal{A}\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Wtedy $\mathcal{A}(U) = W$, a więc $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(W)$.

IV. *Każde przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{D}}$ podprzestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ można przedłużyć do przekształcenia rzutowego całej przestrzeni $\mathbb{P}(V)$.*

Istotnie, jeśli $\mathcal{D} \in \mathrm{GL}(U)$ i wektory $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ stanowią bazę w U, to $\mathcal{D}\mathbf{u}_0, \ldots, \mathcal{D}\mathbf{u}_m$ również. Uzupełnijmy obie te bazy do baz

$$(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n), \qquad (\mathcal{D}\mathbf{u}_0, \ldots, \mathcal{D}\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n)$$

w V. Przyjmując

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_i = \begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{u}_i, & i = 0, \ldots, m, \\ \mathbf{w}_i, & i = m+1, \ldots, n, \end{cases}$$

otrzymamy operator $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$, któremu odpowiada przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{A}} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ pokrywające się z $\widetilde{\mathcal{D}}$ na podprzestrzeni $\mathbb{P}(U)$.

8. Dwustosunek. Niech $\widetilde{\mathbf{a}}_1$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2$, $\widetilde{\mathbf{a}}_3$, $\widetilde{\mathbf{a}}_4$ będą czterema punktami w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, leżącymi na prostej rzutowej $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$, przy czym

$$\widetilde{\mathbf{a}}_1 \neq \widetilde{\mathbf{a}}_3, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_1 \neq \widetilde{\mathbf{a}}_4, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_2 \neq \widetilde{\mathbf{a}}_3, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_2 \neq \widetilde{\mathbf{a}}_4.$$

Oznacza to, że

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4 \rangle = U = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \rangle.$$

Oznaczmy przez

$$\left(\frac{\mathbf{a}, \mathbf{b}}{\mathbf{c}, \mathbf{d}} \right) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \tag{14}$$

wyznacznik macierzy przejścia od bazy $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ do bazy $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ w przestrzeni dwuwymiarowej:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}, \qquad \mathbf{b} = \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}.$$

Na mocy warunków nałożonych na punkty $\tilde{a}_i$ możemy rozpatrzyć wyrażenie

$$[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4] := \left(\frac{a_1, a_3}{a_1, a_4}\right)\left(\frac{a_2, a_3}{a_2, a_4}\right)^{-1}. \tag{15}$$

DEFINICJA 6. Liczbę (15) nazywamy *dwustosunkiem* czwórki punktów $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_3$, $\tilde{a}_4$.

Należy oczywiście sprawdzić, że $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4]$ zależy tylko od punktów $\tilde{a}_i$, a nie od wyboru wektorów a_i, tj. nie ulega zmianie, jeśli zamienimy a_i na $\lambda_i a_i$.

Istotnie, zamieńmy a_1 na $b_1 = \lambda a_1$. Jeśli przejście od bazy (a_1, a_4) do (a_1, a_3) odbywa się za pomocą wzorów $a_1 = a_1$, $a_3 = \gamma a_1 + \delta a_4$, to przejście od bazy (b_1, a_4) do (b_1, a_3) określają wzory $b_1 = b_1$, $a_3 = \gamma\lambda^{-1} b_1 + \delta a_4$, a więc

$$\left(\frac{a_1, a_3}{a_1, a_4}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\lambda^{-1} & \delta \end{vmatrix} = \left(\frac{b_1, a_3}{b_1, a_4}\right).$$

Czynnik

$$\left(\frac{a_2, a_3}{a_2, a_4}\right)^{-1}$$

oczywiście nie ulega przy tym zmianie. Podobnie ma się rzecz przy zamianie a_2 na λa_2.

Zamieńmy teraz a_4 na $b_4 = \lambda a_4$. Jeśli

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1, & a_2 &= a_2, \\ a_3 &= \gamma a_1 + \delta a_4, & a_3 &= \gamma' a_2 + \delta' a_4, \end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1, & a_2 &= a_2, \\ a_3 &= \gamma a_1 + \delta\lambda^{-1} b_4, & a_3 &= \gamma' a_2 + \delta'\lambda^{-1} b_4, \end{aligned}$$

i wobec tego

$$\left(\frac{a_1, a_3}{a_1, a_4}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta\lambda^{-1} \end{vmatrix} = \lambda\left(\frac{a_1, a_3}{a_1, b_4}\right),$$

$$\left(\frac{a_2, a_3}{a_2, a_4}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma' & \delta'\lambda^{-1} \end{vmatrix} = \lambda\left(\frac{a_2, a_3}{a_2, b_4}\right).$$

Prawa strona wzoru (15) nie ulega więc zmianie; podobnie przy zamianie a_3 na λa_3. Jednoczesną zamianę wszystkich a_i na $\lambda_i a_i$ można zastąpić ciągiem kolejnych zamian po jednym wektorze; wynika stąd, że definicja (15) jest poprawna.

TWIERDZENIE 4. *Dwustosunek jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych, tj.*

$$[\tilde{\mathcal{A}}\tilde{a}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{a}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{a}_3, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{a}_4] = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4] \tag{16}$$

dla każdego $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{PGL}(V)$.

Dowód. Niech $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$ i niech $U \subset V$ będzie podprzestrzenią dwuwymiarową oraz $U' = \mathcal{A}(U)$. Ponieważ operator $\mathcal{A}$ jest nieosobliwy, więc przeprowadza każdą bazę w U na bazę w U'. Jeśli ponadto

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = U = \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle,$$

to

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{a}. \mathcal{A}\mathbf{b} \rangle = U' = \langle \mathcal{A}\mathbf{c}, \mathcal{A}\mathbf{d} \rangle,$$

przy czym związkom między bazami $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ i $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}, \qquad \mathbf{b} = \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d},$$

odpowiadają takie same związki na płaszczyźnie U':

$$\mathcal{A}\mathbf{a} = \alpha\mathcal{A}\mathbf{c} + \beta\mathcal{A}\mathbf{d}, \qquad \mathcal{A}\mathbf{b} = \gamma\mathcal{A}\mathbf{c} + \delta\mathcal{A}\mathbf{d}.$$

Oznacza to, że

$$\left(\frac{\mathbf{a}, \mathbf{b}}{\mathbf{c}, \mathbf{d}}\right) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{a}, \mathcal{A}\mathbf{b}}{\mathcal{A}\mathbf{c}, \mathcal{A}\mathbf{d}}\right).$$

W szczególności w naszej sytuacji otrzymujemy

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{a}}_4] &= [\widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_1}, \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_2}, \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_3}, \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_4}] \\
&= \left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{a}_1, \mathcal{A}\mathbf{a}_3}{\mathcal{A}\mathbf{a}_1, \mathcal{A}\mathbf{a}_4}\right)\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{a}_2, \mathcal{A}\mathbf{a}_3}{\mathcal{A}\mathbf{a}_2, \mathcal{A}\mathbf{a}_4}\right)^{-1} = \left(\frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4}\right)\left(\frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4}\right)^{-1} \\
&= [\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4]. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

9. Zapis dwustosunku we współrzędnych. Wyrazimy teraz dwustosunek punktów $\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4$ na prostej rzutowej $\mathbb{P}(U)$ we współrzędnych jednorodnych. Niech $U = \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle$ i $\mathbf{a}_i = \alpha_i\mathbf{e} + \beta_i\mathbf{f}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Wtedy, zgodnie z ogólną definicją współrzędnych jednorodnych,

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i = (\alpha_i : \beta_i). \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{17}$$

Jeśli $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = \gamma\mathbf{a}_1 + \delta\mathbf{a}_4$, to

$$\left(\frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4}\right) = \delta. \tag{18}$$

Ponadto ze związku

$$\alpha_3\mathbf{e} + \beta_3\mathbf{f} = \gamma(\alpha_1\mathbf{e} + \beta_1\mathbf{f}) + \delta(\alpha_4\mathbf{e} + \beta_4\mathbf{f})$$

wynika, że $\alpha_3 = \gamma\alpha_1 + \delta\alpha_4$ i $\beta_3 = \gamma\beta_1 + \delta\beta_4$. Stąd

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma\alpha_1 + \delta\alpha_4 & \gamma\beta_1 + \delta\beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta\alpha_4 & \delta\beta_4 \end{vmatrix} = \delta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

co w połączeniu z (18) daje

$$\left(\frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}^{-1}.$$

Analogicznie

$$\left(\frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}^{-1}.$$

W ten sposób na mocy definicji (15) dwustosunku

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}. \tag{19}$$

Jeśli $\alpha_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ oraz $x_i = \beta_i/\alpha_i$, to z (19) wynika, że

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}},$$

tj.

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{20}$$

Wyrażenie (20) lub równoważne mu wyrażenie

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$$

można by przyjąć jako definicję dwustosunku, co jednak nie jest wygodne, ponieważ wyrażenia te zależą formalnie od wyboru mapy afinicznej (warunki $\alpha_i \neq 0$) podczas gdy prawa strona wzoru (19) ma sens również wtedy, gdy jeden z punktów $\widetilde{\mathbf{a}}_i$ jest niewłaściwy.

Jeśli $\widetilde{\mathbf{a}}_4 = (0 : 1)$ (punkt niewłaściwy względem mapy $\mathbb{A}_0$), to z (19) otrzymujemy

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Jeśli ponadto wziąć jako $\widetilde{\mathbf{a}}_3$ początek układu $(1 : 0)$, a jako $\widetilde{\mathbf{a}}_2$ — punkt jednostkowy $(1 : 1)$, to $x_3 = 0$, $x_2 = 1$ oraz

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = x_1. \tag{2}$$

Jest to więc współrzędna punktu $\widetilde{\mathbf{a}}_1$ w układzie współrzędnych, w którym punkt $\widetilde{\mathbf{a}}_4$ jest punktem w nieskończoności, $\widetilde{\mathbf{a}}_3$ — punktem zerowym, a $\widetilde{\mathbf{a}}_2$ — punktem jednostkowym.

Pożyteczne jest również inne podejście. Będziemy teraz wybierać nie punkt ale układ współrzędnych jednorodnych. Niech $\widetilde{\mathbf{a}}_1$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2$, $\widetilde{\mathbf{a}}_3$ będą trzema ustalonymi punktami na prostej rzutowej $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$, przy czym $\widetilde{\mathbf{a}}_1 \neq \widetilde{\mathbf{a}}_2$. Przyjmijmy e

$\nu\mathbf{a}_1$, $\mathbf{f} = \mu\mathbf{a}_2$, gdzie skalary ν i μ są tak dobrane, że $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}+\mathbf{f}$. Wtedy $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = (1:0)$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2 = (0:1)$, $\widetilde{\mathbf{a}}_3 = (1:1)$. Jeśli teraz $\widetilde{\mathbf{a}}_4 = (\alpha : \beta)$ jest dowolnym punktem z $\mathbb{P}^1$, to na mocy wzoru (19), w którym należy przyjąć

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 1;$$
$$\alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = 1; \quad \alpha_4 = \alpha, \quad \beta_4 = \beta,$$

otrzymujemy

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = \alpha/\beta.$$

Widzimy, że stosunek współrzędnych jednorodnych α/β, określający punkt $\widetilde{\mathbf{a}}_4$, jest z kolei określony przez dwustosunek $[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4]$. Zachodzi zatem

TWIERDZENIE 5. *Dla dowolnych trzech różnych punktów $\widetilde{\mathbf{a}}_1$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2$, $\widetilde{\mathbf{a}}_3$ na prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ dowolny czwarty punkt $\widetilde{\mathbf{a}}_4$ tej prostej jest jednoznacznie wyznaczony przez dwustosunek $[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4]$.* ■

Możemy teraz udowodnić twierdzenie, które w istotny sposób uściśla tezę twierdzenia 3:

TWIERDZENIE 6. *Dwie czwórki punktów współliniowych $\widetilde{\mathbf{a}}_1$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2$, $\widetilde{\mathbf{a}}_3$, $\widetilde{\mathbf{a}}_4$ oraz $\widetilde{\mathbf{b}}_1$, $\widetilde{\mathbf{b}}_2$, $\widetilde{\mathbf{b}}_3$, $\widetilde{\mathbf{b}}_4$ w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$ są* PGL(V)*-przystające (rzutowo równoważne) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = [\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2, \widetilde{\mathbf{b}}_3, \widetilde{\mathbf{b}}_4]. \tag{22}$$

Dowód. Konieczność warunku wynika z (16), ponieważ $\widetilde{\mathbf{b}}_i = \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{a}}_i$.

Załóżmy teraz, że warunek (22) jest spełniony. Na podstawie własności III grupy rzutowej istnieje przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, przeprowadzające prostą rzutową $\mathbb{P}(U)$, na której leżą punkty $\widetilde{\mathbf{a}}_i$, na prostą $\mathbb{P}(W)$, na której leżą punkty $\widetilde{\mathbf{b}}_i$. Zgodnie z wnioskiem z twierdzenia 3 istnieje przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{D}} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W)$, przeprowadzające $\widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{\mathbf{a}}_i$ na $\widetilde{\mathbf{b}}_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Wykorzystując własność IV grupy rzutowej, przedłużamy $\widetilde{\mathcal{D}}$ do przekształcenia rzutowego $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ całej przestrzeni $\mathbb{P}(V)$. Przekształcenie $\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{A}}_1\widetilde{\mathcal{B}}$ przeprowadza punkty $\widetilde{\mathbf{a}}_i$ na $\widetilde{\mathbf{b}}_i$ dla $i = 1, 2, 3$, a punkt $\widetilde{\mathbf{a}}_4$ — na pewien punkt $\widetilde{\mathbf{c}}_4$ prostej $\mathbb{P}(W)$. Z twierdzenia 4 wynika, że

$$[\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2, \widetilde{\mathbf{a}}_3, \widetilde{\mathbf{a}}_4] = [\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2, \widetilde{\mathbf{b}}_3, \widetilde{\mathbf{c}}_4],$$

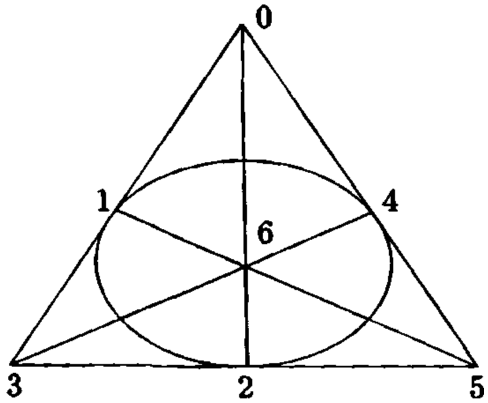
co w połączeniu z (22) daje

$$[\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2, \widetilde{\mathbf{b}}_3, \widetilde{\mathbf{b}}_4] = [\widetilde{\mathbf{b}}_1, \widetilde{\mathbf{b}}_2, \widetilde{\mathbf{b}}_3, \widetilde{\mathbf{c}}_4].$$

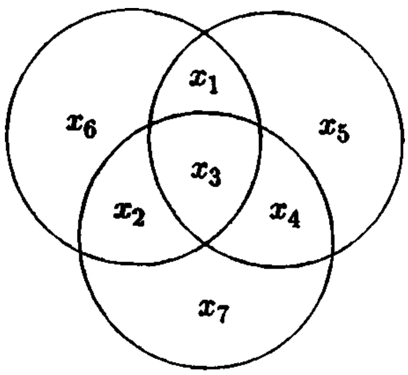
Z twierdzenia 5 wynika teraz, że $\widetilde{\mathbf{c}}_4 = \widetilde{\mathbf{b}}_4$. ■

ĆWICZENIA

1. U podstaw ważnego kodu Hamminga H długości 7 leży pewna konfiguracja siedmiu punktów w przestrzeni rzutowej $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ $(7 = 2^2 + 2 + 1)$, przedstawiona schematycznie na rys. 21.



Rys. 21



Rys. 22

Rozważmy macierze

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \widetilde{J} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Macierz J jest macierzą incydencji figury z rys. 21; w każdym jej wierszu są trzy jedynki, odpowiadające trzem punktom na prostej. Macierz $\widetilde{J}$ powstaje z J przez zamianę zer na jedynki i na odwrót. *Kod Hamminga* H to (16-elementowy) zbiór wierszy macierzy J i $\widetilde{J}$, uzupełniony dwoma wektorami: $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ i $(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$.

(a) Udowodnić, że kod H to czterowymiarowa podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{F}_2^7$, określona przez układ liniowy

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 0$$

(w każdym równaniu uczestniczą zmienne leżące w jednym z czterech kół na rys. 22).

(b) Udowodnić, że $\mathrm{PGL}(\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2)$ jest grupą nieabelową rzędu 168, którą można zrealizować jako pewną grupę permutacji siedmiu punktów na płaszczyźnie rzutowej.

(c) Udowodnić, że

$$\mathrm{PGL}(\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2) = \{\sigma \in S_7 \mid \sigma(H) = H\}.$$

2. Niech $\Pi = \mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ będzie płaszczyzną rzutową nad ciałem $\mathbb{F}_2$ (złożoną z siedmiu punktów); niech $\widetilde{\mathbf{p}}$ i $\widetilde{\mathbf{q}}$ będą dwoma różnymi jej punktami. Ile istnieje automorfizmów płaszczyzny Π, przeprowadzających $\widetilde{\mathbf{p}}$ na $\widetilde{\mathbf{q}}$?

3. Udowodnić, że każde przekształcenie rzutowe przestrzeni rzutowej zespolonej ma co najmniej jeden punkt stały.

§ 4. KWADRYKI W PRZESTRZENI RZUTOWEJ

1. Klasyfikacja. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru $n+1 \geqslant 2$, q — formą kwadratową na V, a f — odpowiadającą jej symetryczną formą dwuliniową. Zbiór C tych wektorów $\mathbf{x} \in V$, dla których $q(\mathbf{x}) = 0$, nazywamy *stożkiem izotropowym* formy q. Jeśli zbiór ten nie składa się tylko z $\mathbf{0}$, to obraz $\widetilde{C}$ zbioru $C \setminus \{\mathbf{0}\}$ przy odwzorowaniu kanonicznym $\pi : V \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}(V)$ (§ 3) nazywamy *kwadryką rzutową* (*stożkową rzutową* dla $n = 2$). Definicja ta jest zgodna z wcześniejszą ogólną definicją zbioru algebraicznego w przestrzeni rzutowej — wystarczy zapisać formę q w (dowolnych) współrzędnych jednorodnych.

Jeśli forma q jest niezdegenerowana, to i kwadrykę $\widetilde{C}$ nazywamy *niezdegenerowaną*. Jeśli $\widetilde{C}$ jest podprzestrzenią rzutową wymiaru $n-r$, gdzie $r < n$ (czyli ma równanie $x_0^2 + \ldots + x_r^2 = 0$ w odpowiednim układzie współrzędnych), to podobnie jak w przypadku afinicznym mówimy, że $\widetilde{C}$ jest *podprzestrzenią podwójną*.

Wybierzmy w V dowolną bazę $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Wtedy w odpowiednim układzie współrzędnych o początku w $\mathbf{0}$ stożek C jest określony przez równanie

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} \varphi_{ij} x_i x_j = 0. \tag{1}$$

Jest to także równanie kwadryki $\widetilde{C}$ we współrzędnych jednorodnych. Jak wiadomo, bazę $(\mathbf{e}_i)$ można wybrać tak, by forma q przybrała postać normalną. Ponieważ obie strony równania (1) można pomnożyć przez -1, mamy prawo zakładać, że w tej postaci normalnej co najmniej połowa kwadratów współrzędnych występuje ze znakiem plus.

Powołując się teraz na prawo bezwładności form kwadratowych oraz na fakt, że przejście od jednej bazy w V do drugiej odbywa się za pomocą przekształcenia $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$, któremu odpowiada przekształcenie rzutowe $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{PGL}(V)$ (§ 3), otrzymujemy

TWIERDZENIE 1. *Każda kwadryka w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$, niebędąca podprzestrzenią podwójną, jest rzutowo równoważna dokładnie jednej kwadryce o równaniu*

$$x_0^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \qquad [r/2] \leqslant s < r. \ \blacksquare \tag{2}$$