§ 3. GRUPY I GEOMETRIA

1. Grupa afiniczna. Zacznijmy od najprostszego przykładu.

Przykład 1. Niech rzeczywista prosta afiniczna $\mathbb{A}$ pokrywa się ze zbiorem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. Inaczej mówiąc, punkt $\dot{x} \in \mathbb{A}$ utożsamiamy z liczbą rzeczywistą $x \in \mathbb{R}$. Geometrię przestrzeni afinicznej opisują automorfizmy afiniczne (§ 1, p. 2). W danym wypadku są to odwzorowania $\Phi_{\alpha,\beta} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ określone wzorem

$$\Phi_{\alpha,\beta} : x \mapsto \alpha x + \beta, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Można przyjąć, że x to współrzędna punktu $\dot{x}$ w pewnym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e})$, tj. $\dot{x} = \dot{o} + x\mathbf{e}$ i $\Phi_{\alpha,\beta}(\dot{x}) = \dot{o} + (\alpha x + \beta)\mathbf{e}$. Oznaczmy przez $\mathrm{A}_1 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ zbiór wszystkich przekształceń afinicznych postaci (1). Ponieważ złożenie

$$\Phi_{\alpha,\beta} \cdot \Phi_{\sigma,\tau} = \Phi_{\alpha\sigma,\alpha\tau+\beta} \tag{2}$$

dowolnych dwóch przekształceń $\Phi_{\alpha,\beta}, \Phi_{\sigma,\tau} \in \mathrm{A}_1$ znów należy do A_1, a przekształceniem odwrotnym do $\Phi_{\alpha,\beta}$ jest $\Phi_{\alpha^{-1},-\alpha^{-1}\beta}$, więc zbiór A_1 z działaniem (2) stanowi grupę (część I, rozdz. 4, § 2), zwaną *jednowymiarową rzeczywistą grupą afiniczną*. Z (2) wynika, że grupa ta jest nieabelowa, a odwzorowanie

$$\pi : \Phi_{\alpha,\beta} \mapsto \alpha$$

jest epimorfizmem $\mathrm{A}_1 \to \mathbb{R}^*$ na grupę multiplikatywną $\mathbb{R}^*$ liczb rzeczywistych różnych od zera. Jądrem tego epimorfizmu jest oczywiście podgrupa $\mathrm{Ker}\,\pi = \{\Phi_{1,\beta}\}$ translacji (przesunięć), izomorficzna z grupą addytywną $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}, +)$ wszystkich liczb rzeczywistych. Otrzymujemy w ten sposób tzw. *krótki ciąg dokładny* (1) grup:

$$0 \to \mathbb{R}^+ \to \mathrm{A}_1 \to \mathbb{R}^* \to 1.$$

Niech teraz $(\mathbb{A}, V)$ będzie n-wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathfrak{K}$, a $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ bijektywnym przekształceniem afinicznym (automorfizmem afinicznym). Zgodnie z definicją (§ 1)

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + \mathcal{F}\mathbf{v},$$

gdzie $\mathcal{F} = Df : V \to V$ jest nieosobliwym przekształceniem liniowym. Przekształcenie odwrotne f^{-1} jest również afiniczne, a jego częścią liniową jest $\mathcal{F}^{-1}$:

$$f^{-1}(\dot{p} + \mathbf{v}) = f^{-1}(\dot{p}) + \mathcal{F}^{-1}\mathbf{v}.$$

(1) *Ciąg dokładny* grup to ciąg (G_i, φ_i) grup G_i i homomorfizmów $\varphi_i : G_i \to G_{i+1}$ o tej własności, że obraz każdego homomorfizmu w tym ciągu jest jądrem następnego: $\mathrm{Im}\,\varphi_i = \mathrm{Ker}\,\varphi_{i+1}$. Wskaźniki i mogą przebiegać zbiór $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ lub skończony odcinek zbioru liczb całkowitych. *Krótki ciąg dokładny* ma 5 elementów, przy czym pierwszy i ostatni element to grupy trywialne (*przyp. tłum.*).

Odwzorowanie tożsamościowe $e : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ jest przekształceniem afinicznym z częścią liniową $\mathcal{E} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$.

Niech f i g będą dwoma przekształceniami afinicznymi przestrzeni $\mathbb{A}$ o częściach liniowych (odpowiednio) $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Wtedy ich złożenie

$$h = f \circ g : \dot{p} \mapsto f(g(\dot{p}))$$

jest przekształceniem afinicznym z częścią liniową $\mathcal{H} = \mathcal{F}\mathcal{G}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} h(\dot{p} + \mathbf{v}) &= f(g(\dot{p} + \mathbf{v})) = f(g(\dot{p}) + \mathcal{G}\mathbf{v}) = f(g(\dot{p})) + \mathcal{F}(\mathcal{G}\mathbf{v}) \\ &= (f \circ g)(\dot{p}) + \mathcal{F}\mathcal{G}\mathbf{v} = h(\dot{p}) + \mathcal{H}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Łączność działania w zbiorze $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ wszystkich automorfizmów afinicznych przestrzeni $\mathbb{A}$ wynika z łączności składania przekształceń (część 1). Zbiór ten jest więc grupą, zwaną *grupą afiniczną* przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$. W ten sposób otrzymaliśmy część następującego twierdzenia ([1]):

TWIERDZENIE 1. *Zbiór* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ *wszystkich automorfizmów afinicznych n-wymiarowej przestrzeni afinicznej* $(\mathbb{A}, V)$ *nad ciałem* $\mathfrak{K}$ *stanowi grupę. Dla każdego punktu* $\dot{o} \in \mathbb{A}$ *automorfizmy afiniczne* f, *dla których* $\dot{o}$ *jest punktem stałym, tj.* $f(\dot{o}) = \dot{o}$, *tworzą podgrupę* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})_{\dot{o}} \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, *izomorficzną z* $\mathrm{GL}(V)$. *Grupa* $T = \{t_{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \in V\}$ *przesunięć przestrzeni* $\mathbb{A}$ *jest podgrupą w* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, *przy czym istnieje ciąg dokładny*

$$\{e\} \to T \xrightarrow{i} \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \xrightarrow{D} \mathrm{GL}(V) \to \{\overline{e}\}. \tag{3}$$

gdzie i jest zanurzeniem, a D odwzorowaniem przyporządkowującym automorfizmowi afinicznemu jego część liniową. (Dokładność ciągu oznacza, że i jest injekcją, $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, D$ *i D jest surjekcją).*

Dowód. Fakt, że $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})_{\dot{o}}$ jest podgrupą, jest oczywisty. Jeśli $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})_{\dot{o}}$, to $f(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{F}\mathbf{x}$, gdzie $\mathcal{F} \in \mathrm{GL}(V)$. Odwzorowanie $D : f \mapsto Df = \mathcal{F}$ ustala izomorfizm grupy $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})_{\dot{o}}$ na $\mathrm{GL}(V)$.

Wiemy już, że przesunięcia przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ tworzą podgrupę $T \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, izomorficzną z grupą addytywną przestrzeni liniowej V. Sprawdzimy teraz dokładność ciągu (3). Zanurzenie $i : T \to \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ jest oczywiście monomorfizmem. Ponadto część liniowa translacji $t_{\mathbf{v}}$ to przekształcenie tożsamościowe: $t_{\mathbf{v}}(\dot{p} + \mathbf{x}) = \dot{p} + \mathbf{x} + \mathbf{v} = t_{\mathbf{v}}(\dot{p}) + \mathcal{E}\mathbf{x}$, czyli $\mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}\, D = \{f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \mid Df = \mathcal{E}\}$.

Udowodnimy teraz zawieranie odwrotne. Istotnie, niech $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ i $Df = \mathcal{E}$, czyli

$$f(\dot{o} + \mathbf{x}) = f(\dot{o}) + \mathbf{x}.$$

Ustalmy na chwilę punkt $\dot{o} \in \mathbb{A}$. Wtedy $f(\dot{o}) = \dot{o} + \mathbf{u}$ dla pewnego wektora $\mathbf{u}$.

([1]) Sformułowanie i dowód twierdzenia 1 zostały zmodyfikowane w tłumaczeniu, by uniknąć odwoływania się do pojęcia podgrupy normalnej (*przyp. tłum.*).

Jeśli teraz punkt $\dot{p} \in \mathbb{A}$ jest dowolny, to $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ dla pewnego wektora $\mathbf{x}$ oraz

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o} + \mathbf{x}) = f(\dot{o}) + \mathbf{x} = \dot{o} + \mathbf{u} + \mathbf{x} = \dot{p} + \mathbf{u},$$

czyli f jest translacją $t_{\mathbf{u}}$. Zatem istotnie $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} D$.

Aby wykazać, że D jest epimorfizmem, weźmy dowolny automorfizm liniowy $\mathcal{F} \in \mathrm{GL}(V)$ i wybierzmy dowolny punkt $\dot{o} \in \mathbb{A}$. Wtedy odwzorowanie $f : \dot{o} + \mathbf{v} \mapsto \dot{o} + \mathcal{F}\mathbf{v}$ jest przekształceniem afinicznym przestrzeni $\mathbb{A}$, przy czym $Df = \mathcal{F}$. ∎

Udowodnimy jeszcze następujące

TWIERDZENIE 2. *Niech $\dot{o}$ będzie ustalonym punktem przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$. Każde przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ można przedstawić w postaci $f = t_{\mathbf{a}}g$, gdzie $\mathbf{a} = \overrightarrow{\dot{o}f(\dot{o})}$ oraz g jest przekształceniem afinicznym mającym punkt stały $\dot{o}$. Rozkład ten zależy oczywiście od wyboru punktu $\dot{o}$.*

Dowód. Przyjmijmy $g = t_{\mathbf{a}}^{-1}f$. Wiemy już, że g jest przekształceniem afinicznym. Ponadto ponieważ $f(\dot{o}) = \dot{o} + \mathbf{a}$, więc $g(\dot{o}) = t_{\mathbf{a}}^{-1}f(\dot{o}) = t_{-\mathbf{a}}(\dot{o} + \mathbf{a}) = \dot{o}$. ∎

Ustalmy punkt $\dot{o} \in \mathbb{A}$. Wtedy grupę $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ można utożsamić z iloczynem kartezjańskim $\mathrm{GL}(V) \times V$, w którym określono działanie wzorem

$$(\mathcal{F}_1, \mathbf{v}_1) \cdot (\mathcal{F}_2, \mathbf{v}_2) = (\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2, \mathbf{v}_1 + \mathcal{F}_1\mathbf{v}_2) \tag{4}$$

(w szczególności ten iloczyn kartezjański z działaniem (4) stanowi grupę). Jeśli mianowicie $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, to przypisujemy mu parę $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$, gdzie $\mathcal{F} = Df$ i $\mathbf{v} = \overrightarrow{\dot{o}f(\dot{o})}$. Na odwrót, parze $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ przyporządkowujemy odwzorowanie

$$f(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{F}\mathbf{x} + \mathbf{v}. \tag{5}$$

Istotnie, jeśli $f_i \leftrightarrow (\mathcal{F}_i, \mathbf{v}_i)$ dla $i = 1, 2$, to

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(\dot{o} + \mathbf{x}) &= f_1(f_2(\dot{o} + \mathbf{x})) \\ &= f_1(\dot{o} + \mathcal{F}_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2) = \dot{o} + \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_1,\end{aligned}$$

co odpowiada wzorowi (4).

Wybierzmy teraz w $\mathbb{A}$ układ współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Wówczas współrzędnymi punktu $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ będą z definicji współrzędne $x_1, \ldots, x_n$ wektora $\overrightarrow{\dot{o}\dot{p}} = \mathbf{x} = \sum x_i\mathbf{e}_i$. Jeśli $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ jest przekształceniem afinicznym z częścią liniową $Df = \mathcal{F}$, to

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o}) + \mathcal{F}\mathbf{x} = \dot{o} + \overrightarrow{\dot{o}f(\dot{o})} + \mathcal{F}\mathbf{x}.$$

Oznaczmy współrzędne punktu $f(\dot{p})$ przez $y_1, \ldots, y_n$; przyjmijmy też, że $\overrightarrow{\dot{o}f(\dot{o})} = \sum b_i\mathbf{e}_i$ oraz że $F = (f_{ij})$ jest macierzą operatora liniowego $\mathcal{F}$ w bazie $(\mathbf{e}_i)$, tj. i-ta współrzędna wektora $\mathcal{F}\mathbf{x}$ jest równa $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j$. Wtedy

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

lub, w oznaczeniach macierzowych,

$$Y = FX + B, \tag{6'}$$

gdzie Y, X, B to kolumny odpowiednich współrzędnych (por. § 1. (3), a także rozdz. 2. § 1. (3)). W szczególności dla każdego wyboru punktu $\dot{o} \in \mathbb{A}$ i bazy $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w V otrzymujemy izomorfizm grupy afinicznej $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ z grupą przekształceń przestrzeni kartezjańskiej $\mathfrak{K}^n$ postaci (6'), gdzie $\det F \neq 0$; tę ostatnią grupę oznaczamy przez $A_n(\mathfrak{K})$ i nazywamy *n-tą grupą afiniczną nad ciałem $\mathfrak{K}$*.

2. Izometrie przestrzeni euklidesowej. Niech $(\mathbb{E}, V, \varrho)$ będzie przestrzenią euklidesową wymiaru n. W szczególności pamiętamy, że $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$.

DEFINICJA 1. *Izometrią* (lub *ruchem*) przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$ nazywamy każde odwzorowanie $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ zachowujące odległość, tzn.

$$\varrho(f(\dot{p}), f(\dot{q})) = \varrho(\dot{p}, \dot{q}) \tag{7}$$

dla dowolnych $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{E}$.

W definicji tej nie zakładamy, że f jest przekształceniem afinicznym, ale tak jest w istocie:

TWIERDZENIE 3. *Odwzorowanie $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy f jest przekształceniem afinicznym, którego część liniowa $\mathcal{F}$ jest operatorem ortogonalnym na V.*

Dowód. Implikacja w jedną stronę jest niemal oczywista. Istotnie, każde przekształcenie afiniczne f z ortogonalną częścią liniową $\mathcal{F}$ spełnia (7): jeśli $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{v}$, to

$$\begin{aligned}\varrho(f(\dot{p}), f(\dot{q})) &= \varrho(f(\dot{p}), f(\dot{p} + \mathbf{v})) = \|\overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{p} + \mathbf{v})}\| \\ &= \|\mathcal{F}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{\dot{p}(\dot{p} + \mathbf{v})}\| = \|\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}\| = \varrho(\dot{p}, \dot{q}).\end{aligned}$$

Odnotujmy w szczególności, że każde przesunięcie równoległe jest izometrią.

Sedno twierdzenia tkwi w implikacji odwrotnej, której dowód podzielimy na kilka etapów.

I. Łatwo sprawdzić, że złożenie izometrii jest też izometrią. Niech f będzie dowolną izometrią, a $\dot{o}$ — ustalonym punktem: przyjmijmy $\dot{o}' = f(\dot{o})$ i $\mathbf{a} = \overrightarrow{\dot{o}\dot{o}'}$. Wtedy $g := t_{\mathbf{a}}^{-1} f$ jest też izometrią, przy czym

$$g(\dot{o}) = t_{\mathbf{a}}^{-1}(f(\dot{o})) = t_{\mathbf{a}}^{-1}(\dot{o}') = \dot{o}.$$

W ten sposób wykazaliśmy, że każda izometria f jest postaci $t_{\mathbf{a}} g$, gdzie $t_{\mathbf{a}}$ jest translacją, a g — izometrią mającą punkt stały. Wystarczy teraz udowodnić, że g jest przekształceniem afinicznym z ortogonalną częścią liniową.

II. Niech więc g będzie izometrią taką, że $g(\dot{o}) = \dot{o}$. Określamy odwzorowanie $\mathcal{G} : V \to V$, przyjmując $\mathcal{G}\mathbf{x} = \overrightarrow{\dot{o}g(\dot{o}+\mathbf{x})}$, tj.

$$g(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{x}. \tag{8}$$

Odwzorowanie $\mathcal{G}$ ma własności

$$\mathcal{G}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad \|\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{9}$$

Istotnie, ponieważ $g(\dot{o}) = \dot{o}$, więc $\mathcal{G}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Niech teraz $\dot{p} = \dot{o}+\mathbf{x}$ i $\dot{q} = \dot{o}+\mathbf{y}$. Wtedy $\varrho(\dot{p},\dot{q}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \varrho(g(\dot{p}), g(\dot{q}))$, ponieważ g jest izometrią. Z drugiej strony, z (8) wynika, że $g(\dot{p}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{x}$ i $g(\dot{q}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{y}$, a zatem $\varrho(g(\dot{p}), g(\dot{q})) = \|\mathcal{G}\mathbf{y} - \mathcal{G}\mathbf{x}\|$ i otrzymujemy (9).

Przyjmując w (9) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, otrzymujemy w szczególności

$$\|\mathcal{G}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|. \tag{10}$$

III. Każde odwzorowanie $\mathcal{G} : V \to V$ spełniające (9) zachowuje iloczyn skalarny, tzn.

$$(\mathcal{G}\mathbf{x} \,|\, \mathcal{G}\mathbf{y}) = (\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}). \tag{11}$$

Istotnie, z (9) wynika, że

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\,|\,\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}) = \|\mathcal{G}\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathcal{G}\mathbf{x}\,|\,\mathcal{G}\mathbf{y}) + \|\mathcal{G}\mathbf{y}\|^2,\end{aligned}$$

skąd, na podstawie (10), otrzymujemy równość (11).

IV. Odwzorowanie $\mathcal{G}$ jest liniowe. Istotnie, aby wykazać jego addytywność, przyjmijmy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Wtedy $\|\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 0$, czyli

$$\|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{x}) - 2(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{y}) + 2(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = 0.$$

Stąd na podstawie (10) i (11) wynika, że

$$\|\mathcal{G}\mathbf{z}\|^2 + \|\mathcal{G}\mathbf{x}\|^2 + \|\mathcal{G}\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathcal{G}\mathbf{z}\,|\,\mathcal{G}\mathbf{x}) - 2(\mathcal{G}\mathbf{z}\,|\,\mathcal{G}\mathbf{y}) + 2(\mathcal{G}\mathbf{x}\,|\,\mathcal{G}\mathbf{y}) = 0,$$

czyli $\|\mathcal{G}\mathbf{z} - \mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\|^2 = 0$, a więc $\mathcal{G}\mathbf{z} - \mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, tj.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{G}\mathbf{x} + \mathcal{G}\mathbf{y}.$$

Dowód równości $\mathcal{G}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{G}\mathbf{x}$ jest analogiczny.

V. Teraz możemy już zakończyć dowód: z (8) i z punktów III i IV wynika, że g jest przekształceniem afinicznym, którego część liniowa $\mathcal{G}$ jest operatorem ortogonalnym. ■

Sprecyzujemy teraz rezultat uzyskany w części I dowodu twierdzenia 2:

TWIERDZENIE 4. *Niech f będzie izometrią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$, a operator ortogonalny $\mathcal{F}$ — częścią liniową tej izometrii. Wtedy istnieje rozkład*

$$V = L \oplus L^{\perp} \tag{12}$$

przestrzeni liniowej V na sumę prostą podprzestrzeni $\mathcal{F}$-niezmienniczych o... punkt $\dot{o} \in \mathbb{E}$ o tej własności, że $\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ dla każdego $\mathbf{x} \in L$ oraz $f = t_{\mathbf{a}}g$, gdzie $\mathbf{a} \in L$ i $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ jest taką izometrią, że $g(\dot{o}) = \dot{o}$.

Dowód. Oznaczmy przez L zbiór wszystkich wektorów z V, które nie ulegają zmianie przy działaniu operatora $\mathcal{F}$. Zbiór L jest oczywiście podprzestrzenią liniową w V, niezmienniczą względem $\mathcal{F}$, przy czym zachodzi rozkład (12) (rozdz. 3, § 1, twierdzenie 5). Ponieważ operator $\mathcal{F}$ jest ortogonalny, więc podprzestrzeń $L^{\perp}$ jest również $\mathcal{F}$-niezmiennicza (rozdz. 3, § 3, lemat 5).

Wiemy z dowodu twierdzenia 2, że $f = t_{\mathbf{a}'}g'$, gdzie $\mathbf{a}' \in V$ i g' jest izometrią mającą punkt stały $\dot{o}'$. Z (12) wynika, że $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a} \in L$ i $\mathbf{b} \in L^{\perp}$. Wtedy

$$f = t_{\mathbf{a}'}g' = (t_{\mathbf{a}}t_{\mathbf{b}})g' = t_{\mathbf{a}}g,$$

gdzie $g := t_{\mathbf{b}}g'$ jest izometrią oraz $g(\dot{o}) = \dot{o}$ dla $\dot{o} := \dot{o}' + \mathbf{b}$. ■

3. Grupa izometrii. Z definicji izometrii łatwo wynika, że zbiór wszystkich izometrii przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$ stanowi grupę. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Iso}(\mathbb{E})$ (ang. *isometry*) i nazywamy *grupą izometrii* przestrzeni $\mathbb{E}$. Ponieważ dowolne dwie przestrzenie euklidesowe tego samego wymiaru są izomorficzne (§ 2, twierdzenie 1), więc ich grupy izometrii są też izomorficzne, czyli dla każdego wymiaru istnieje, z dokładnością do izomorfizmu, tylko jedna grupa izometrii przestrzeni euklidesowej. Grupa $\mathrm{Iso}(\mathbb{E})$ jest oczywiście podgrupą grupy afinicznej $\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$. Z kolei w $\mathrm{Iso}(\mathbb{E})$ zawarta jest podgrupa T translacji, izomorficzna z grupą addytywną przestrzeni liniowej V, a także, dla każdego punktu $\dot{o} \in \mathbb{E}$, podgrupa izometrii mających punkt stały $\dot{o} \in \mathbb{E}$; ta ostatnia podgrupa jest izomorficzna z grupą ortogonalną $\mathrm{O}(n)$, gdzie $n = \dim \mathbb{E}$.

Jeśli $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jest prostokątnym układem współrzędnych w $\mathbb{E}$, to każdą izometrię f można zapisać w postaci

$$Y = FX + A, \tag{13}$$

gdzie $X = [x_1, \ldots, x_n]$ i $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ to kolumny współrzędnych punktów odpowiednio $\dot{p}$ i $f(\dot{p})$, $A = [a_1, \ldots, a_n]$ to kolumna współrzędnych wektora $\mathbf{a} = \overrightarrow{\dot{o}f(\dot{o})} \in V$, a F – macierz ortogonalna części liniowej przekształcenia f.

Jeśli $F \in \mathrm{SO}(n)$, tj. $\det F = 1$, to f nazywamy *izometrią właściwą*. Zbiór tych izometrii oznacza się przez $\mathrm{Iso}_{+}(\mathbb{E})$; nie będziemy jednak używać tego oznaczenia.

Ponieważ elementy grupy izometrii pojawiają się stale w geometrii i w mechanice, omówimy przypadki małych wymiarów.

Przypadek $n = 1$. Zgodnie z ogólnym wzorem (13) każda izometria przestrzeni jednowymiarowej ma postać

$$y = \varepsilon x + a, \tag{14}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ (ortogonalność jednowymiarowego operatora liniowego) oraz a jest stałą, odpowiadającą przesunięciu. Jeśli $\varepsilon = 1$, otrzymujemy przesunięcie na pro-

stej. Jeśli $\varepsilon = -1$, to równość (14), przepisana w postaci
$$y - a/2 = -(x - a/2),$$
sugeruje, by wybrać inny początek układu: $x = x' + a/2$. Wtedy $y = y' + a/2$ i powyższy wzór przyjmuje postać $y' = -x'$, pokazującą, że izometria jest *symetrią środkową* względem pewnego punktu o'.

Przypadek $n = 2$. Wybierając prostokątny układ współrzędnych, w którym część liniowa $\mathcal{F}$ izometrii f przyjmuje postać kanoniczną (rozdz. 3, § 3, twierdzenie 10), widzimy, że w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych izometria f ma jedną z poniższych postaci:
$$(1)\ \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b; \end{aligned} \qquad (2)\ \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= -y + b; \end{aligned} \qquad (3)\ \begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b. \end{aligned}$$

W przypadku (1) mamy przesunięcie o wektor $ae_1 + be_2$.

W przypadku (2) należy przenieść początek układu do punktu $o' = (0, b/2)$, tj. wprowadzić nowe współrzędne (ξ, η) takie, że $x = \xi$, $y = \eta + b/2$. Wtedy również $x' = \xi'$ i $y' = \eta' + b/2$ i wzory (2) przyjmą postać
$$\xi' = \xi + a, \qquad \eta' = -\eta,$$
czyli izometria jest złożeniem symetrii względem prostej $\eta = 0$ (czyli osi ξ) z przesunięciem równoległym wzdłuż tej osi, a więc jest tzw. *symetrią z poślizgiem*.

W przypadku (3) (dla $\varphi \neq 0$) przenosimy początek układu do punktu $o' = (x_0, y_0)$, którego współrzędne spełniają układ równań
$$x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi + a = x_0,$$
$$x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi + b = y_0.$$
Geometrycznie oznacza to, że $f(o') = o'$. Istnienie punktu o' wynika również z twierdzenia 4: część liniowa izometrii f nie ma (nietrywialnych) wektorów stałych ($L = \{\mathbf{0}\}$), więc – przy oznaczeniach tego twierdzenia – $f = g$, czyli f jest „czystym" obrotem. Formalnie rzecz biorąc, wprowadzamy nowe współrzędne ξ, η takie, że
$$x = \xi + x_0 \qquad (x' = \xi' + x_0),$$
$$y = \eta + y_0 \qquad (y' = \eta' + y_0).$$
W tych współrzędnych wzory (3) przyjmują postać
$$\xi' = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$\eta' = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi.$$

W ten sposób udowodniliśmy

TWIERDZENIE 5. *Każda izometria właściwa płaszczyzny euklidesowej jest albo przesunięciem, albo obrotem dookoła pewnego punktu. Jeśli izometria właściwa płaszczyzny ma punkt stały, to jest obrotem dookoła tego punktu.*

Każda izometria niewłaściwa płaszczyzny euklidesowej jest symetrią z poślizgiem, tzn. złożeniem symetrii względem pewnej prostej z translacją o wektor równoległy do tej prostej. Jeśli izometria niewłaściwa płaszczyzny ma punkt stały, to ma całą prostą złożoną z punktów stałych i jest symetrią względem tej prostej.

Przypadek $n = 3$. Korzystając znowu z twierdzenia o postaci kanonicznej operatora ortogonalnego (rozdz. 3, § 3, twierdzenie 10), stwierdzamy, że w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ izometria f ma jedną z poniższych postaci:

$$(1)\quad x' = x + a,\quad y' = y + b,\quad z' = z + c;\qquad (2)\quad x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,\quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,\quad z' = z + c;$$

$$(3)\quad x' = x + a,\quad y' = y + b,\quad z' = -z + c;\qquad (4)\quad x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,\quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,\quad z' = -z + c.$$

W przypadku (1) mamy przesunięcie o wektor $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$.

W przypadku (2) (dla $\varphi \neq 0$), działając analogicznie jak na płaszczyźnie, po przeniesieniu początku układu do odpowiedniego punktu $\dot{o}' = (x_0, y_0, 0)$ otrzymamy wzory

$$\xi' = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$\eta' = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,$$
$$\mu' = \mu + c,$$

oznaczające, że f jest złożeniem obrotu o kąt φ dookoła osi μ z przesunięciem o wektor $(0, 0, c)$ równoległy do tej osi, czyli jest tzw. *ruchem śrubowym*.

W przypadku (3) po przejściu do nowych współrzędnych ξ, η, μ takich, że

$$x = \xi,$$
$$y = \eta,$$
$$z = \mu + c/2,$$

otrzymamy wzory

$$\xi' = \xi + a,\qquad \eta' = \eta + b,\qquad \mu' = -\mu,$$

oznaczające, że f jest złożeniem symetrii względem płaszczyzny $\dot{o}\xi\eta$ z przesunięciem o wektor $(a, b, 0)$, równoległy do tej płaszczyzny, czyli jest tzw. *symetrią płaszczyznową z poślizgiem*.

W przypadku (4), będącym kombinacją przypadków (2) i (3), wzory można sprowadzić do postaci

$$\xi' = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$\eta' = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,$$
$$\mu' = -\mu,$$

z której wynika, że f jest złożeniem obrotu o kąt φ dookoła osi μ i symetrii względem płaszczyzny $0\xi\eta$, prostopadłej do tej osi, czyli jest tzw. *obrotem z prostopadłym odbiciem*.

TWIERDZENIE 6. *Każda izometria właściwa trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej jest ruchem śrubowym, tzn. złożeniem obrotu wokół pewnej prostej z przesunięciem o wektor równoległy do tej prostej.*

Każda izometria niewłaściwa przestrzeni trójwymiarowej jest albo symetrią płaszczyznową z poślizgiem, tzn. złożeniem symetrii względem pewnej płaszczyzny z przesunięciem o wektor równoległy do tej płaszczyzny, albo obrotem z prostopadłym odbiciem, tzn. złożeniem obrotu wokół pewnej prostej z symetrią względem płaszczyzny prostopadłej do tej prostej (jeśli kąt tego obrotu wynosi π, otrzymujemy symetrię środkową). ■

Z twierdzenia 6 wynikają w szczególności: *twierdzenie Eulera* (1776 r.) o tym, że każde przemieszczenie ciała sztywnego, przy którym pewien punkt ciała pozostaje na miejscu, można zrealizować, obracając to ciało dookoła osi przechodzącej przez ten punkt, oraz *twierdzenie Chaslesa* (czyt. szala) (1830 r.) głoszące, że każde przemieszczenie ciała sztywnego można zrealizować, najpierw przesuwając ciało w pewnym kierunku, a następnie obracając dookoła osi o tym kierunku.

4. Geometria liniowa odpowiadająca danej grupie. Zgodnie z punktem widzenia powszechnie przyjętym od ponad 130 lat, a po raz pierwszy sprecyzowanym w „programie erlangeńskim" Feliksa Kleina (1872 r.), przez geometrię należy rozumieć zbiór niezmienników danej grupy przekształceń G. Niech Γ będzie dowolnym (niepustym) zbiorem, lub – jak będziemy też mówić – przestrzenią punktów, a G - podgrupą grupy wszystkich bijekcji $\Gamma \to \Gamma$. Przedmiotem geometrii odpowiadającej grupie G jest badanie tych własności *figur* (czyli podzbiorów przestrzeni Γ), które nie ulegają zmianie przy działaniu przekształceń należących do G.

Zbiór wszystkich figur dzieli się na rozłączne klasy figur G-przystających. Mówimy mianowicie, że figury Φ_1 i Φ_2 są *G-przystające* (i piszemy $\Phi_1 \overset{G}{\sim} \Phi_2$), jeśli istnieje takie przekształcenie $g \in G$, że $\Phi_2 = g(\Phi_1)$. Z aksjomatów grupy wynika bezpośrednio, że relacja G-przystawania figur jest relacją równoważności; istotnie relacja ta jest:

1) zwrotna (gdyż $e(\Phi) = \Phi$ dla dowolnej figury Φ, gdzie $e \in G$ jest jedynką grupy G, czyli przekształceniem tożsamościowym);
2) symetryczna (gdyż jeśli $\Phi_2 = g(\Phi_1)$, to $\Phi_1 = g^{-1}(\Phi_2)$);
3) przechodnia (gdyż jeśli $\Phi_2 = g(\Phi_1)$ i $\Phi_3 = h(\Phi_2)$, to $\Phi_3 = (hg)(\Phi_1)$).

Przestrzenie Γ rozpatrywane w *geometriach liniowych* są przestrzeniami liniowymi lub przestrzeniami pochodzącymi od nich. Najbliższe nam przykłady to *geometria euklidesowa* ($\Gamma = \mathbb{E}$, $G = \mathrm{Iso}(\mathbb{E})$) *i geometria afiniczna* ($\Gamma = \mathbb{A}$, $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$). Już te dwie geometrie różnią się pod względem badanych własności figur. Elementarna geometria euklidesowa płaszczyzny zajmuje się prostymi, kątami, trójkątami, okręgami itd., a także liniowymi i kątowymi zależnościami między elementami tych figur. W geometrii afinicznej przestajemy się interesować wszystkim, co wiąże się z odległością punktów.

Zbadajmy kilka najprostszych własności figur w *geometrii euklidesowej* i *afinicznej*.

TWIERDZENIE 7. *Niech $(\mathbb{E}, V, \varrho)$ będzie przestrzenią euklidesową i $G = \mathrm{Iso}(\mathbb{E})$. Dwie podprzestrzenie afiniczne $\Pi, \Pi' \subset \mathbb{E}$ są G-przystające wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \Pi = \dim \Pi'$. W szczególności dowolne dwa punkty są G-przystające. To samo jest prawdą w przypadku przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, V)$ i grupy $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$.*

Dowód. Jeśli $\Pi = \dot{p} + U$, $\Pi' = \dot{p}' + U'$ i $f(\Pi) = \Pi'$, gdzie $f \in G$, to $Df(U) = U'$, gdzie Df jest częścią liniową przekształcenia f; ale f jest bijekcją, więc $\det Df \neq 0$, a stąd $\dim U = \dim U'$, czyli na mocy definicji $\dim \Pi = \dim \Pi'$.

Na odwrót, przyjmijmy, że $\dim \Pi = \dim \Pi' = m$. Wybierzmy w U i U' bazy ortonormalne (odpowiednio) $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ i $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m)$ i uzupełnijmy je do baz ortonormalnych $(\mathbf{e}_i)$ (odpowiednio $(\mathbf{e}'_i)$) całej przestrzeni V. Istnieje operator ortogonalny $\mathcal{F}$ taki, że $\mathcal{F}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$ dla każdego i. Wtedy izometria f taka, że $f(\dot{p}) = \dot{p}'$ i $Df = \mathcal{F}$, przeprowadza Π na Π'.

W przypadku afinicznym rozumowanie jest analogiczne — nie musimy się już jednak troszczyć o ortonormalność baz i ortogonalność operatora. ■

Odnotowane w twierdzeniu 7 przystawanie figur jednopunktowych można wyrazić inaczej, mówiąc, że działanie grupy G na przestrzeni $\mathbb{E}$ (odpowiednio $\mathbb{A}$) jest *przechodnie* — każdy punkt może przejść na dowolny inny. Przechodniość to jedna z najważniejszych własności grupy G i odpowiadającej jej geometrii — bez tej własności zbyt wiele figur byłoby „nieporównywalnych". Grupa $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ ma znacznie mocniejszą własność:

TWIERDZENIE 8. *W geometrii przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, V)$ dowolne dwa układy $m+1$ punktów $(\dot{p}_0, \ldots, \dot{p}_m)$ i $(\dot{p}'_0, \ldots, \dot{p}'_m)$ w położeniu ogólnym (a więc $1 \leqslant m \leqslant n = \dim \mathbb{A}$) są przystające.*

Dowód. Uzupełnijmy oba układy do układów $(\dot{p}_0, \ldots, \dot{p}_n)$ i $(\dot{p}'_0, \ldots, \dot{p}'_n)$ afinicznie niezależnych. Oznacza to, że wektory $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V, a wektory $\mathbf{e}'_i = \overrightarrow{\dot{p}'_0\dot{p}'_i}$ — drugą taką bazę. Istnieje nieosobliwy operator liniowy $\mathcal{F} : V \to V$ taki, że $\mathcal{F}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$ dla każdego i. Przyjmując

$f(\dot{p}_0 + \mathbf{x}) = \dot{p}'_0 + \mathcal{F}\mathbf{x}$, otrzymujemy nieosobliwe przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ takie, że $f(\dot{p}_i) = \dot{p}'_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. ∎

Twierdzenie 8 nie jest już oczywiście prawdziwe w geometrii euklidesowej nawet dla $m = 1$, ponieważ Iso($\mathbb{E}$)-przystawanie par punktów $\dot{p}, \dot{q}$ i $\dot{p}', \dot{q}'$ wymaga, by $\varrho(\dot{p}, \dot{q}) = \varrho(\dot{p}', \dot{q}')$. Warunek ten jest zresztą również dostateczny, jak widać z dowodu twierdzenia 7.

Sens geometryczny automorfizmów afinicznych ujawnia również następujące rozumowanie. Niech $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ będzie dowolnym odwzorowaniem spełniającym, dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, warunek

$$\overrightarrow{\dot{r}\dot{s}} = \lambda\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} \Rightarrow \overrightarrow{f(\dot{r})f(\dot{s})} = \lambda\,\overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})} \tag{15}$$

(ciało $\mathbb{R}$ można tu zastąpić dowolnym innym). Geometrycznie oznacza to, że f przeprowadza punkty współliniowe na punkty współliniowe.

Jeśli dla danego wektora $\mathbf{x} = \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$ przyjmiemy $\mathcal{F}\mathbf{x} = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})}$, to z implikacji (15) (dla $\lambda = 1$) wynika, że określiliśmy w ten sposób odwzorowanie $\mathcal{F} : V \to V$, tzn. wartość $\mathcal{F}\mathbf{x}$ zależy jedynie od wektora $\mathbf{x}$, a nie od wyboru punktów $\dot{p}, \dot{q}$. Udowodnimy, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ jest liniowe. Warunek $\mathcal{F}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathcal{F}\mathbf{v}$ wynika z (15). Dowolne dwa wektory $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{u} = \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$ i $\mathbf{v} = \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}}$ dla pewnych punktów $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r} \in \mathbb{A}$. Wtedy $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{\dot{p}\dot{r}}$ oraz

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{r})} = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})} + \overrightarrow{f(\dot{q})f(\dot{r})} = \mathcal{F}\mathbf{u} + \mathcal{F}\mathbf{v}.$$

Tak więc $\mathcal{F}$ jest operatorem liniowym na V. Dla każdego punktu $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{x}$ mamy

$$f(\dot{q}) = f(\dot{p}) + \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})}, \qquad \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})} = \mathcal{F}(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}) = \mathcal{F}\mathbf{x},$$

czyli $f(\dot{p} + \mathbf{x}) = f(\dot{p}) + \mathcal{F}\mathbf{x}$, tj. f jest przekształceniem afinicznym.

Prawdą jest również stwierdzenie odwrotne. Istotnie, jeśli f jest przekształceniem afinicznym z częścią liniową $\mathcal{F}$ i $\overrightarrow{\dot{r}\dot{s}} = \lambda\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$, to $\mathcal{F}(\overrightarrow{\dot{r}\dot{s}}) = \lambda\mathcal{F}(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}})$. Ale $f(\dot{s}) = f(\dot{r}) + \mathcal{F}(\overrightarrow{\dot{r}\dot{s}})$, czyli $\mathcal{F}(\overrightarrow{\dot{r}\dot{s}}) = \overrightarrow{f(\dot{r})f(\dot{s})}$. Analogicznie $\mathcal{F}(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}) = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})}$, skąd już wynika (15). Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 9. *Własność* (15) *odwzorowania* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *charakteryzuje przekształcenia afiniczne.* ∎

Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny, gdy punkty $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ są współliniowe, przy czym $\dot{p} \neq \dot{q}$. Wtedy istnieje taka liczba λ, że

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}} = \lambda\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}. \tag{15'}$$

DEFINICJA 2. Liczbę λ występującą w równości (15′) nazywamy *stosunkiem prostym* (¹) punktów współliniowych $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ ($\dot{p} \neq \dot{q}$) i oznaczamy przez $[\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]$.

(¹) W innej terminologii: λ jest współrzędną punktu $\dot{r}$ w układzie współrzędnych $(\dot{p}; \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}})$ na prostej $H_{\dot{p},\dot{q}}$ (*przyp. tłum.*).

Z twierdzenia 9 wynika oczywisty

WNIOSEK. *Przekształcenie afiniczne zachowuje współliniowość punktów i stosunek prosty punktów współliniowych.* ■

Równość (15′), przepisana w postaci „addytywnej" $\dot{r} - \dot{p} = \lambda(\dot{q} - \dot{p})$, oznacza po prostu, że każdy punkt $\dot{r}$ na prostej $\Pi_{\dot{p},\dot{q}}$ można zapisać w postaci $\dot{r} = (1-\lambda)\dot{p} + \lambda\dot{q}$. W szczególności w rzeczywistej geometrii afinicznej ma sens pojęcie leżenia między: obraz punktu wewnętrznego odcinka $\dot{p}\dot{q}$, czyli takiego punktu $\dot{r}$, że $0 < \lambda < 1$, jest punktem wewnętrznym obrazu tego odcinka przy dowolnym automorfizmie afinicznym. Odnotujmy jeszcze, że choć długość odcinka to pojęcie geometrii euklidesowej, to (jak już zauważyliśmy) środek odcinka jest pojęciem afinicznym.

5. Przekształcenia afiniczne przestrzeni euklidesowej. Efekty działania przekształceń afinicznych są powszechnie widoczne w otaczającej nas rzeczywistości. Najprostszy przykład to rozciągnięcie gumowego przedmiotu. Przyjrzymy się jeszcze nieco dokładniej kilku faktom związanym z tymi przekształceniami.

W § 2 (p. 4) umówiliśmy się, że przez objętość v_n równoległościanu $P(\dot{o}\dot{p}_1, \ldots$ $\ldots, \dot{o}\dot{p}_n)$ o krawędziach $\dot{o}\dot{p}_1, \ldots, \dot{o}\dot{p}_n$ będziemy rozumieli liczbę $v_n = |\det(a_{ij})^n_{i,j=1}|$, gdzie (a_{ij}) jest macierzą przejścia od bazy ortonormalnej $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ przestrzeni euklidesowej V do bazy $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, gdzie $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{\dot{o}\dot{p}_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Z drugiej strony, jeśli g jest automorfizmem afinicznym z częścią liniową $\mathcal{G}$, to objętością równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathcal{G}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{G}\mathbf{e}_n$ (ściślej, na odcinkach utożsamionych z tymi wektorami) będzie $v'_n = |\det(b_{jk})|$, gdzie macierz (b_{jk}) znajdujemy następująco. Niech

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ji}\mathbf{f}_j.$$

Wtedy

$$\sum_j b_{jk}\mathbf{f}_j := \mathcal{G}\mathbf{e}_k = \sum_i a_{ik} \sum_j g_{ji}\mathbf{f}_j = \sum_j \Big(\sum_i g_{ji}a_{ik}\Big)\mathbf{f}_j,$$

tj. $b_{jk} = \sum_i g_{ji}a_{ik}$, czyli

$$B = GA.$$

Wobec tego

$$v'_n = |\det(b_{jk})| = |\det G| \cdot v_n = |\det g| \cdot v_n.$$

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 10. *Przy przekształceniu afinicznym n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej objętość równoległościanu zbudowanego na n wektorach mnoży się* *przez wartość bezwzględną wyznacznika części liniowej przekształcenia. Inaczej mówiąc, przekształcenie afiniczne zachowuje stosunek objętości równoległościanów.* ■

To samo odnosi się do objętości dowolnych innych figur w przestrzeni euklidesowej (takich, których objętość można określić).

Kolejne twierdzenie ma przejrzysty sens geometryczny.

TWIERDZENIE 11. *Niech $\dot{o}$ będzie ustalonym punktem n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{E}, V)$. Każdy automorfizm afiniczny przestrzeni $\mathbb{E}$ jest złożeniem:*

(a) *przesunięcia o pewien wektor;*

(b) *izometrii mającej punkt stały $\dot{o}$;*

(c) *przekształcenia afinicznego h będącego złożeniem n rozciągnięć (powinowactw) w kierunku wzajemnie prostopadłych osi, przecinających się w punkcie $\dot{o}$.*

Dowód. Niech $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ będzie dowolnym automorfizmem afinicznym. Na mocy twierdzenia 2 mamy rozkład $f = t_{\mathbf{a}}g$, gdzie $g(\dot{o}) = \dot{o}$. Jeśli $\mathcal{G}$ jest częścią liniową przekształcenia afinicznego g, to operator $\mathcal{G}$ ma rozkład biegunowy: $\mathcal{G} = \mathcal{D}\mathcal{H}$, gdzie operator $\mathcal{D}$ jest ortogonalny, a $\mathcal{H}$ — symetryczny dodatnio określony (rozdz. 3, § 3, twierdzenie 15). Wybierzmy w $\mathbb{E}$ prostokątny układ współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, w którym operator $\mathcal{H}$ ma kanoniczną postać

$$\mathcal{H}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

(rozdz. 3, § 3, twierdzenie 6). Wtedy

$$f = t_{\mathbf{a}}dh, \quad d(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{D}\mathbf{x}, \quad h(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{H}\mathbf{x}, \tag{16}$$

gdzie d jest izometrią przestrzeni $\mathbb{E}$, a h przekształceniem afinicznym, które można zapisać w postaci złożenia

$$h = h_1 \ldots h_n; \tag{17}$$

tutaj h_k jest przekształceniem afinicznym z punktem stałym $\dot{o}$ i częścią liniową $\mathcal{H}_k$, przy czym

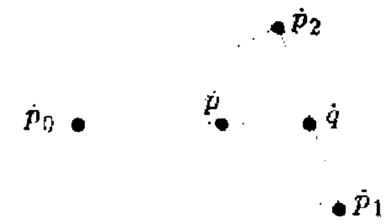
$$\mathcal{H}_k\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \quad \text{dla } i \neq k, \qquad \mathcal{H}_k\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k.$$

Wzory (16) i (17) dają szukany rozkład przekształcenia afinicznego f. ■

6. Zbiory wypukłe. Przypomnijmy określenie kombinacji barycentrycznych punktów (§ 1, p. 5):

$$\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda_1\dot{p}_1 + \ldots + \lambda_m\dot{p}_m, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1, \tag{18}$$

oraz współrzędnych barycentrycznych: zauważamy teraz, że jeśli $m = 1$ i $\dot{p}_0 \neq \dot{p}_1$, to punkty $\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda_1\dot{p}_1$, gdzie $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, przebiegają całą prostą $\Pi_{\dot{p}_0,\dot{p}_1}$. Jeśli dodatkowo przyjmiemy, że $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ dla $i = 0, 1$, otrzymamy odcinek $\dot{p}_0\dot{p}_1$.



Rys. 8

Jeśli $m = 2$ i $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dot{p}_2$ nie są współliniowe, to punkty $\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda_1\dot{p}_1 + \lambda_2\dot{p}_2$, gdzie $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ oraz $\lambda_i > 0$ dla $i = 0, 1, 2$, przebiegają otwarty trójkąt o wierzchołkach $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dot{p}_2$.

Istotnie, jeśli $\dot{p}$ jest punktem wewnętrznym tego trójkąta, to jest punktem wewnętrznym odcinka $\dot{p}_0\dot{q}$, gdzie $\dot{q}$ jest punktem wewnętrznym odcinka $\dot{p}_1\dot{p}_2$, czyli

$$\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda\dot{q}, \qquad \lambda_0 + \lambda = 1, \quad \lambda_0 > 0, \ \lambda > 0,$$

$$\dot{q} = \alpha_1\dot{p}_1 + \alpha_2\dot{p}_2, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0.$$

Stąd

$$\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda(\alpha_1\dot{p}_1 + \alpha_2\dot{p}_2) = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda_1\dot{p}_1 + \lambda_2\dot{p}_2,$$

gdzie $\lambda_1 = \lambda\alpha_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda\alpha_2 > 0$ i $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (bezpośrednie sprawdzenie; zob. też § 1, ćwiczenie 4).

Na odwrót, jeśli $\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda_1\dot{p}_1 + \lambda_2\dot{p}_2$, gdzie $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ i $\lambda_i > 0$ dla $i = 0, 1, 2$, to $\dot{p} = \lambda_0\dot{p}_0 + \lambda\dot{q}$, gdzie $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, $\lambda_0 + \lambda = 1$ oraz $\dot{q} = \alpha_1\dot{p}_1 + \alpha_2\dot{p}_2$, gdzie $\alpha_1 = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, $\alpha_2 = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$; wtedy również $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ i $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Oznacza to, że $\dot{q}$ jest punktem wewnętrznym odcinka $\dot{p}_1\dot{p}_2$, a $\dot{p}$ – punktem wewnętrznym trójkąta o wierzchołkach $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dot{p}_2$ (rys. 8).

Podobne rozumowanie dla $m = 3$ prowadzi do czworościanu, a dla dowolnego $m \leqslant n$ do sympleksu m-wymiarowego:

DEFINICJA 3. Jeśli punkty $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ są w położeniu ogólnym, to *otwartym sympleksem m-wymiarowym* o wierzchołkach w tych punktach nazywamy zbiór wszystkich kombinacji barycentrycznych postaci (18) z dodatnimi współrzędnymi barycentrycznymi $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Kombinacje (18) o współczynnikach nieujemnych tworzą *domknięty sympleks m-wymiarowy* o wierzchołkach $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$.

TWIERDZENIE 12. *Obrazem dowolnego sympleksu m-wymiarowego przy automorfizmie afinicznym jest sympleks tego samego wymiaru. Wszystkie sympleksy m-wymiarowe są afinicznie przystające.*

Dowód. Twierdzenie jest niemal oczywiste. Niech $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ będzie nieosobliwym przekształceniem afinicznym. Stosując to przekształcenie do równości (18), w której $\lambda_i \geqslant 0$, otrzymujemy (§ 1, p. 5, stwierdzenie 2(i))

$$f(\dot{p}) = \lambda_0 f(\dot{p}_0) + \lambda_1 f(\dot{p}_1) + \ldots + \lambda_m f(\dot{p}_m).$$

co oznacza, że $f(\dot{p})$ jest punktem sympleksu o wierzchołkach $f(\dot{p}_0), f(\dot{p}_1), \ldots, f(\dot{p}_m)$. Drugie stwierdzenie to przeformułowanie twierdzenia 8. ■

DEFINICJA 4. Podzbiór M przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ nazywamy *wypukłym*, jeśl wraz z każdą parą swoich punktów $\dot{p}, \dot{q}$ zawiera odcinek $\dot{p}\dot{q}$.

Sympleks to ważny przykład zbioru wypukłego. Część wspólna dowolnej ro dziny zbiorów wypukłych jest oczywiście wypukła.

DEFINICJA 5. Część wspólną rodziny wszystkich zbiorów wypukłych zawiera jących dany podzbiór M przestrzeni afinicznej nazywamy *powłoką wypukłą* lul *uwypukleniem* zbioru M i oznaczamy przez $\operatorname{conv}(M)$ (ang. *convex*).

Równość $\operatorname{conv}(M) = M$ zachodzi oczywiście dokładnie wtedy, gdy zbiór M jest wypukły. W szczególności sympleks domknięty jest powłoką wypukłą zbiori swoich wierzchołków.

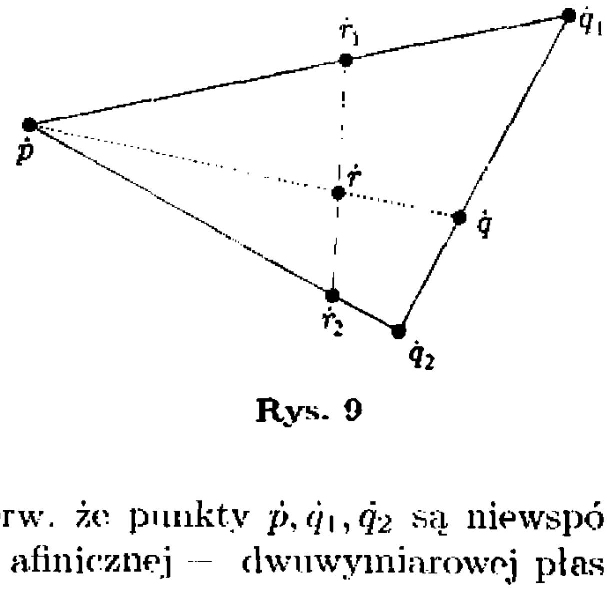
STWIERDZENIE 1. *Jeśli zbiór $M \subset \mathbb{A}$ jest wypukły i $\dot{p} \in \mathbb{A}$, to*

$$\operatorname{conv}(M \cup \{\dot{p}\}) = \bigcup_{\dot{q} \in M} \dot{p}\dot{q}.$$

Dowód. Z definicji każdy odcinek $\dot{p}\dot{q}$, gdzie $\dot{q} \in M$, zawiera się w każdym zbiorz wypukłym zawierającym M i $\dot{p}$, więc $\bigcup_{\dot{q}\in M} \dot{p}\dot{q} \subset \operatorname{conv}(M \cup \{\dot{p}\})$.

Zawieranie odwrotne wynika z wypukłości zbioru $\bigcup_{\dot{q}\in M} \dot{p}\dot{q}$, którą teraz wy każemy.

Niech $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in M$. Weźmy dowolne punkty $\dot{r}_1 \in \dot{p}\dot{q}_1$ i $\dot{r}_2 \in \dot{p}\dot{q}_2$. Mamy udo wodnić, że jeśli $\dot{r} \in \dot{r}_1\dot{r}_2$, to istnieje punkt $\dot{q} \in M$ taki, że $\dot{r} \in \dot{p}\dot{q}$.



Rys. 9

Przyjmijmy najpierw, że punkty $\dot{p}, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ są niewspółliniowe. Wtedy należ one do swojej powłoki afinicznej — dwuwymiarowej płaszczyzny afinicznej Π · $A(\dot{p}, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$, w której mamy prawo stosować zwykłą elementarną geometri W szczególności prosta $\Pi_{\dot{p},\dot{r}}$ przecina odcinek $\dot{q}_1\dot{q}_2$ w pewnym punkcie $\dot{q}$, któ należy do M na mocy wypukłości tego zbioru (rys. 9). Mamy wówczas $\dot{r} \in \dot{p}\dot{q}$, co mieliśmy wykazać. Jeśli punkty $\dot{p}$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ leżą na jednej prostej, to jako $\dot{q}$ można wziąć po prostu jeden z punktów $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$. ∎

TWIERDZENIE 13. *Niech $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją afiniczną, a S — sympleksem domkniętym $\operatorname{conv}(\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m\})$ w przestrzeni $\mathbb{A}$. Wtedy funkcja f przyjmuje swoją największą wartość na S w jednym z wierzchołków:*

$$\max_{\dot{p} \in S} f(\dot{p}) = \max_i f(\dot{p}_i).$$

Dowód. Dla $m = 0$ teza jest oczywista. Dalej rozumujemy przez indukcję względem m. Załóżmy, że największa wartość funkcji f na zbiorze wypukłym $M = \operatorname{conv}(\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_{m-1}\})$ jest równa $\max_{i<m} f(\dot{p}_i)$. Na mocy stwierdzenia 1 każdy punkt $\dot{s} \in S$ należy do pewnego odcinka $\dot{p}_m\dot{q}$, gdzie $\dot{q} \in M$, czyli

$$\dot{s} = (1 - \lambda)\dot{p}_m + \lambda\dot{q}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Ponieważ funkcja f jest afiniczna, więc

$$f(\dot{s}) = (1 - \lambda)f(\dot{p}_m) + \lambda f(\dot{q}) \leqslant \max(f(\dot{p}_m), f(\dot{q})) \leqslant \max_{i \leqslant m} f(\dot{p}_i). \quad ∎$$

Nieskomplikowane twierdzenie 13 zalicza się do programowania liniowego, dziedziny ważnej z punktu widzenia zastosowań.

ĆWICZENIA

1. Wykazać, że grupa $A_1(\mathbb{F}_p)$ automorfizmów prostej afinicznej nad ciałem o p elementach (gdzie p jest liczbą pierwszą) ma rząd $p(p-1)$. Z jaką grupą jest izomorficzna grupa $A_1(\mathbb{F}_3)$?
2. Podać opis geometryczny izometrii właściwej f płaszczyzny euklidesowej, jeśli
$$Df = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad f(\dot{o}) = (1, 1).$$
3. Przedstawić klasyfikację izometrii właściwych czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej (afinicznej).

§ 4. PRZESTRZENIE Z METRYKĄ NIEOKREŚLONĄ

1. Metryka nieokreślona. Przyjęliśmy rozumieć przez przestrzeń z iloczynem skalarnym przestrzeń liniową V wraz z ustaloną niezdegenerowaną formą $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ (symetryczną dwuliniową w przypadku rzeczywistym, hermitowską w przypadku zespolonym) o tej własności, że odpowiadająca jej forma kwadratowa

$$q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$