PRZESTRZENIE PUNKTOWE AFINICZNE I EUKLIDESOWE

Jako mieszkańcy trójwymiarowego świata fizycznego (oznaczanego w tej książce przez $\mathbb{R}^3_{\mathrm{fiz}}$) mamy do czynienia z punktami, prostymi i płaszczyznami, położonymi względem siebie w najróżniejszy sposób, ale niezwiązanymi z żadnym wyróżnionym punktem jako początkiem układu współrzędnych. Naturalne jest oczekiwanie, by również w ogólnej sytuacji rozpatrywać obiekty, które otrzymuje się z prostych i płaszczyzn przechodzących przez początek układu w wyniku przesunięć równoległych. Inaczej mówiąc, abstrahując na razie od metryki, chcielibyśmy rozszerzyć grupę automorfizmów przestrzeni liniowej o przesunięcia, czyniąc tę przestrzeń jednorodną w tym sensie, że wszystkie wektory (a właściwie już „punkty" nowej „przestrzeni afinicznej") staną się równoprawne. W tym rozdziale wprowadzimy wszystkie niezbędne definicje i udowodnimy najprostsze własności przestrzeni afinicznych.

§ 1. PRZESTRZENIE AFINICZNE

1. Definicja przestrzeni afinicznej. Jak już zauważyliśmy, w każdej przestrzeni liniowej początek układu współrzędnych, związany z wektorem zerowym, gra rolę szczególną: przy każdym automorfizmie przestrzeni wektor zerowy pozostaje na miejscu. Wszystkie wektory staną się równoprawne dopiero wtedy, gdy rozszerzymy pełną grupę liniową o przesunięcia równoległe przestrzeni. Aby sprecyzować te uwagi, wprowadzimy kilka definicji.

DEFINICJA 1. Niech $\mathbb{A}$ będzie niepustym zbiorem, którego elementy będziemy nazywać *punktami* i oznaczać przez $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}, \ldots$ [1] Niech ponadto V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathfrak{K}$. Mówimy, że zbiór $\mathbb{A}$ (a ściślej para $(\mathbb{A}, V)$) jest *przestrzenią afiniczną* stowarzyszoną z V, jeśli dane jest odwzorowanie $(\dot{p}, \mathbf{v}) \mapsto \dot{p} + \mathbf{v}$ iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{A} \times V$ w $\mathbb{A}$ o następujących własnościach:

---

[1] Często, zwłaszcza w mechanice i w teorii równań różniczkowych, symbolem $\dot{p}$ oznacza się pochodną dp/dt funkcji różniczkowalnej $p = p(t)$. U nas taka sytuacja nie wystąpi.

(i) $\dot{p}+\mathbf{0}=\dot{p}$ i $(\dot{p}+\mathbf{u})+\mathbf{v}=\dot{p}+(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ dla każdego punktu $\dot{p}\in\mathbb{A}$ i każdej pary wektorów $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ ($\mathbf{0}$ to wektor zerowy przestrzeni V);

(ii) dla każdej pary punktów $\dot{p},\dot{q}\in\mathbb{A}$ istnieje dokładnie jeden wektor $\mathbf{v}\in V$ taki, że $\dot{p}+\mathbf{v}=\dot{q}$ (ten „wektor od $\dot{p}$ do $\dot{q}$" oznacza się zwykle przez $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$ lub $\dot{q}-\dot{p}$).

Przez *wymiar* przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ rozumie się wymiar stowarzyszonej z nią przestrzeni liniowej. Jeśli $n=\dim_{\mathfrak{K}}V$, to niekiedy dla podkreślenia wymiaru piszemy $\mathbb{A}^n$ zamiast $\mathbb{A}$. W dwóch najważniejszych przypadkach: gdy $\mathfrak{K}=\mathbb{R}$ lub $\mathfrak{K}=\mathbb{C}$, mówimy o przestrzeni afinicznej *rzeczywistej* lub *zespolonej*.

Sens aksjomatu (ii) jest taki, że każdemu punktowi $\dot{p}\in\mathbb{A}$ odpowiada bijekcja $\mathbf{v}\mapsto\dot{p}+\mathbf{v}$ zbiorów V i $\mathbb{A}$. Z drugiej strony, każdy wektor $\mathbf{v}\in V$ wyznacza odwzorowanie

$$t_{\mathbf{v}}:\dot{p}\mapsto\dot{p}+\mathbf{v},\qquad \dot{p}\in\mathbb{A},$$

zbioru $\mathbb{A}$, zwane *przesunięciem równoległym* (lub *translacją*) o wektor $\mathbf{v}$. Z aksjomatów (i)–(ii) wynika, że

$$t_{\mathbf{u}}t_{\mathbf{v}}=t_{\mathbf{u}+\mathbf{v}},\qquad t_{\mathbf{v}}t_{-\mathbf{v}}=e$$

($e:=t_{\mathbf{0}}$ to przekształcenie tożsamościowe), czyli przesunięcia równoległe tworzą grupę, w której elementem odwrotnym do $t_{\mathbf{v}}$ jest $t_{-\mathbf{v}}$. W szczególności każde przesunięcie $t_{\mathbf{v}}$ jest bijekcją. Jeśli przyjmiemy

$$\alpha t_{\mathbf{u}}+\beta t_{\mathbf{v}}:=t_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}},$$

to zbiór wszystkich przesunięć stanie się przestrzenią liniową, wyznaczoną jednoznacznie przez przestrzeń afiniczną $\mathbb{A}$ i izomorficzną z V. Przestrzeń tę będziemy oznaczać przez $\mathbb{A}^{\#}$.

Uwaga. Zwracamy uwagę na fakt, że ten sam symbol $+$ stosujemy w wyrażeniach $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i $\dot{p}+\mathbf{v}$, które mają zupełnie inny sens, co jednak nie prowadzi do nieporozumień. Jeśli ponadto $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ i $\dot{s}$ są takimi punktami z $\mathbb{A}$, że $\dot{p}+\mathbf{v}=\dot{q}$ i $\dot{r}+\mathbf{v}=\dot{s}$, to $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$ i $\overrightarrow{\dot{r}\dot{s}}$ są dwoma oznaczeniami tego samego obiektu — wektora $\mathbf{v}$. Zapis $\dot{p}+\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=\dot{q}$ jest wygodny ze względów mnemotechnicznych (i tylko dlatego). Bezpośrednio z definicji wynikają proste reguły operowania na symbolach $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$:

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}+\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}}=\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}},\qquad \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=-\overrightarrow{\dot{q}\dot{p}},\qquad \overrightarrow{\dot{p}\dot{p}}=\mathbf{0}$$

dla dowolnych punktów $\dot{p},\dot{q},\dot{r}\in\mathbb{A}$. To samo można też zapisać inaczej:

$$(\dot{q}-\dot{p})+(\dot{r}-\dot{q})=\dot{r}-\dot{p},\qquad \dot{q}-\dot{p}=-(\dot{p}-\dot{q}),\qquad \dot{p}-\dot{p}=\mathbf{0}.$$

Przykład 1. Niech V będzie dowolną przestrzenią liniową nad ciałem $\mathfrak{K}$, $U\subset V$ — podprzestrzenią liniową, a $\mathbf{v}_0\in V$ — ustalonym punktem. Jeśli $\mathbf{A}=\mathbf{v}_0+U$ jest warstwą przestrzeni V względem U (rozdz. 1, § 2, p. 6), to $\mathbf{A}$ jest przestrzenią afiniczną z przestrzenią przesunięć $\mathbb{A}^{\#}$ izomorficzną z U. Istotnie, każdemu wektorowi $\mathbf{u}'\in U$ odpowiada bijekcja $\mathbf{v}_0+\mathbf{u}\mapsto\mathbf{v}_0+\mathbf{u}+\mathbf{u}'$, która spełnia aksjomaty (i)–(ii) po prostu dlatego, że wektory przestrzeni V tworzą grupę względem dodawania. Mówimy, że $\mathbb{A}$ jest *afiniczną rozmaitością liniową* (lub krótko *rozmaitością liniową*) w przestrzeni V o *kierunku* U; podprzestrzeń U nazywamy też *podprzestrzenią kierunkową* rozmaitości liniowej $\mathbb{A}$.

Jeśli w szczególności $U = V$, to $\mathbb{A}$ pokrywa się z V jako zbiór; piszemy wówczas $\mathbb{A} = V_{\text{afin}}$, rozumiejąc przez punkt $\dot{p} \in V_{\text{afin}}$ po prostu pewien wektor $\mathbf{u} \in V$. Dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in V$ mamy wtedy $\dot{p} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V_{\text{afin}}$, i tak otrzymane odwzorowanie $V_{\text{afin}} \times V \to V_{\text{afin}}$ ma oczywiście własności (i)–(ii), przy czym $(V_{\text{afin}})^{\#} \cong V$. W ten sposób na jednym i tym samym zbiorze V określone są dwie struktury algebraiczne zupełnie innego rodzaju.

2. Izomorfizm. Naturalne jest przyjęcie, że dwie przestrzenie afiniczne $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, stowarzyszone z jedną i tą samą przestrzenią liniową V, są *izomorficzne*, jeśli istnieje bijekcja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ spełniająca warunek $f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + \mathbf{v}$ dla dowolnych $\mathbf{v} \in V$ i $\dot{p} \in \mathbb{A}$ (dla prostoty plus oznacza przesunięcie w $\mathbb{A}$ i w $\mathbb{A}'$). Wprowadźmy ogólną definicję:

DEFINICJA 2. Niech $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ będą przestrzeniami afinicznymi, stowarzyszonymi z przestrzeniami liniowymi (odpowiednio) V i V' nad tym samym ciałem $\mathfrak{K}$. Odwzorowanie $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ nazywamy *przekształceniem afinicznym*, jeśli istnieje takie przekształcenie liniowe $\mathcal{F} : V \to V'$, że dla dowolnych $\dot{p} \in \mathbb{A}$ i $\mathbf{v} \in V$ zachodzi równość

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + \mathcal{F}(\mathbf{v}). \tag{1}$$

Przekształcenie liniowe $\mathcal{F}$ nazywa się wówczas *częścią liniową* (lub *różniczką*) przekształcenia f i oznacza przez Df ([1]). Jeśli f jest bijekcją, to jej część liniowa Df również; mówimy wówczas o *izomorfizmie* między $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, a w przypadku $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$ o *automorfizmie* przestrzeni $\mathbb{A}$, realizowanym za pomocą *nieosobliwego przekształcenia afinicznego* f.

Zauważmy, że jeśli $\dot{p} + \mathbf{v} = \dot{q}$, to równość (1) można przepisać w postaci

$$\overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})} = Df(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}) \quad \text{lub} \quad f(\dot{q}) - f(\dot{p}) = Df(\dot{q} - \dot{p}). \tag{1'}$$

TWIERDZENIE 1. *Dowolne dwie przestrzenie afiniczne* $(\mathbb{A}, V)$ *i* $(\mathbb{A}', V')$ *tego samego skończonego wymiaru są izomorficzne.*

Dowód. Ponieważ $\dim V = \dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' = \dim V'$, więc istnieje liniowa bijekcja $\mathcal{F} : V \to V'$ (rozdz. 1, § 2, twierdzenie 5). Ustalmy punkty $\dot{o} \in \mathbb{A}$ i $\dot{o}' \in \mathbb{A}'$.

([1]) Zamiast Df stosowane są również inne oznaczenia, np. f_* (*przyp. tłum.*).

Skonstruujemy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, dla którego $f(\dot{o}) = \dot{o}'$ i $Df = \mathcal{F}$. Każdy punkt $\dot{p} \in \mathbb{A}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{v}$. Definiujemy

$$f(\dot{p}) = \dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v}). \tag{2}$$

Gdy $\dot{p}$ przebiega wszystkie punkty przestrzeni $\mathbb{A}$, wówczas $\mathbf{v}$ przebiega wszystkie wektory przestrzeni V (na mocy definicji przestrzeni afinicznej); ale wtedy, dzięki bijektywności $\mathcal{F}$, $\dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v})$ przebiega wszystkie punkty przestrzeni $\mathbb{A}'$. Tak więc f jest surjekcją. Z podobnych powodów odwzorowanie f jest różnowartościowe. Musimy jeszcze wykazać, że odwzorowanie to jest afiniczne. Istotnie, na mocy (2),

$$\begin{aligned} f(\dot{p} + \mathbf{u}) &= f((\dot{o} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}) = f(\dot{o} + (\mathbf{v} + \mathbf{u})) \\ &= \dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \dot{o}' + (\mathcal{F}(\mathbf{v}) + \mathcal{F}(\mathbf{u})) \\ &= (\dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v})) + \mathcal{F}(\mathbf{u}) = f(\dot{p}) + \mathcal{F}(\mathbf{u}). \ \blacksquare \end{aligned}$$

3. Współrzędne. Wprowadzamy naturalną definicję:

DEFINICJA 3. *Układem współrzędnych* w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, V)$ nazywamy parę $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ złożoną z punktu $\dot{o} \in \mathbb{A}$ i bazy $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w V. *Współrzędnymi* $x_1, \ldots, x_n$ punktu $\dot{p}$ w układzie $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ nazywamy współrzędne wektora $\overrightarrow{\dot{o}\dot{p}}$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$: $\overrightarrow{\dot{o}\dot{p}} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

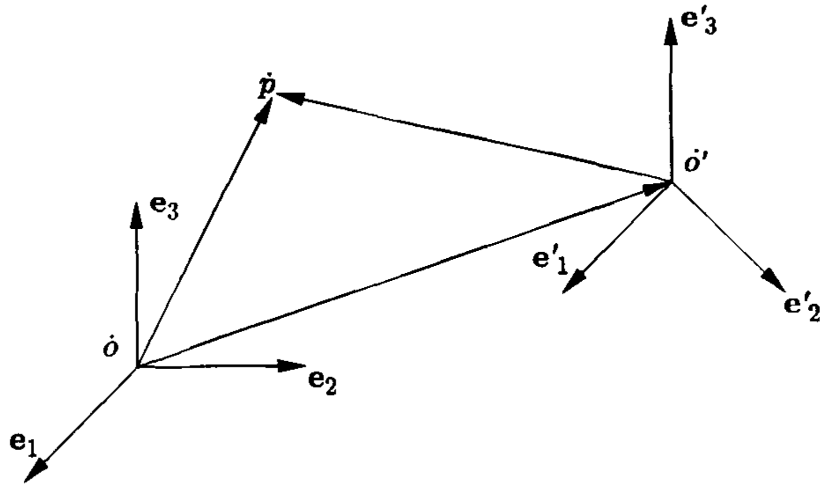
Z równości $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} = \overrightarrow{\dot{o}\dot{q}} - \overrightarrow{\dot{o}\dot{p}}$ wynika, że jeśli $x_1, \ldots, x_n$ są współrzędnymi punktu $\dot{p}$, a $y_1, \ldots, y_n$ – współrzędnymi punktu $\dot{q}$, to współrzędnymi wektora $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ będą $y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n$. Na odwrót, jeśli $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{a}$, to współrzędne $y_1, \ldots, y_n$ punktu $\dot{q}$ otrzymujemy, dodając do współrzędnych $x_1, \ldots, x_n$ punktu $\dot{p}$ współrzędne $a_1, \ldots, a_n$ wektora $\mathbf{a}$, czyli $y_i = x_i + a_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Uwaga. Możemy też uważać, że układ współrzędnych to układ $n + 1$ punktów $(\dot{p}_0; \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ w przestrzeni $\mathbb{A}$ o tej własności, że wektory $\overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_1}, \ldots, \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_n}$ stanowią bazę przestrzeni V.

Podsumujmy powyższe fakty:

TWIERDZENIE 2. *Niech $(\dot{p}_0; \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ będzie układem współrzędnych w przestrzeni $(\mathbb{A}, V)$ i niech $\mathbf{e}_i := \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Jeśli punkty $\dot{p}$, $\dot{q}$ mają w tym układzie współrzędne odpowiednio $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$, to wektor $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$ ma w bazie $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ współrzędne $y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n$. Dla każdego wektora $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$ punkt $\dot{p} + \mathbf{a}$ ma współrzędne $x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n$.* $\blacksquare$

Przypuśćmy , że chcemy teraz przejść od układu współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ do układu $(\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. Trzeba wtedy podać współrzędne $b_1, \ldots, b_n$ punktu $\dot{o}'$ w starym układzie (tj. współrzędne wektora $\overrightarrow{\dot{o}\dot{o}'}$) oraz macierz przejścia $A = (a_{ij})$



Rys. 5

od bazy $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ do $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ w przestrzeni V (rys. 5). Niech $x_1, \ldots, x_n$ i $x'_1, \ldots, x'_n$ będą starymi i nowymi współrzędnymi punktu $\dot p \in \mathbb{A}$. Z równości

$$\overrightarrow{\dot o\dot p} = \overrightarrow{\dot o\dot o'} - \overrightarrow{\dot p\dot o'} = \sum_i b_i \mathbf{e}_i + \sum_j x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_i b_i \mathbf{e}_i + \sum_j x'_j \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i$$

$$= \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} x'_j \Big) \mathbf{e}_i + \sum_i b_i \mathbf{e}_i$$

wynika, że

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Krótko:

$$X = AX' + B,$$

gdzie

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad X' = \begin{Vmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Ponieważ $\det A \neq 0$, więc

$$X' = A^{-1}X + B', \qquad B' = \begin{Vmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{Vmatrix} = -A^{-1}B.$$

4. Podprzestrzenie afiniczne. Wprowadzamy następującą definicję:

Definicja 4. Niech $\dot p$ będzie ustalonym punktem n-wymiarowej przestrzeni afinicznej $(\mathbb{A}, V)$, a U — podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Wówczas zbiór

$$\Pi = \dot p + U = \{\dot p + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$$

nazywamy *podprzestrzenią afiniczną* wymiaru $m = \dim U$. Mówimy, że Π przechodzi przez punkt $\dot{p}$ i ma *kierunek* podprzestrzeni liniowej U. Dla $m = 0$ podprzestrzeń Π jest oczywiście punktem; dla $m = 1$ nazywamy ją *prostą*, a dla $m = n - 1$ — *hiperpłaszczyzną* (odpowiada to dokładnie terminologii dla podprzestrzeni liniowych). Mówimy również, że U jest *podprzestrzenią kierunkową* dla podprzestrzeni afinicznej Π.

Zauważmy, że jeśli $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}$ i $\dot{r} = \dot{p} + \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, to

$$\dot{q} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \dot{p} + \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \dot{p} + \mathbf{v} = \dot{r}.$$

Wynika stąd, że $\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, a ponieważ $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in U$, więc wykazaliśmy, że

$$\dot{q}, \dot{r} \in \Pi \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} \in U. \tag{4}$$

Ponadto

$$\dot{s}, \dot{q}, \dot{r} \in \Pi \;\Rightarrow\; \dot{s} + \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} \in \Pi, \tag{5}$$

ponieważ skoro $\dot{s} = \dot{p} + \mathbf{w}$, gdzie $\mathbf{w} \in U$, oraz $\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} \in U$, to $\dot{s} + \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} = \dot{p} + (\mathbf{w} + \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}})$, gdzie $\mathbf{w} + \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} \in U$.

Na odwrót, każdy (niepusty) podzbiór $\Pi \subset \mathbb{A}$ o własnościach (4) i (5) jest oczywiście podprzestrzenią afiniczną w sensie powyższej definicji.

Podprzestrzeń kierunkowa $U \subset V$ jest jednoznacznie wyznaczona przez podprzestrzeń afiniczną Π jako zbiór wszystkich wektorów postaci $\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}}$, gdzie $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi$. Punkt $\dot{p}$, występujący w definicji podprzestrzeni afinicznej, można zamienić na dowolny inny punkt $\dot{q} \in \Pi$. Istotnie, $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}$ dla pewnego $\mathbf{u} \in U$, a stąd

$$\dot{q} + U = (\dot{p} + \mathbf{u}) + U = \dot{p} + (\mathbf{u} + U) = \dot{p} + U.$$

Z opisanych własności Π wynika bezpośrednio

TWIERDZENIE 3. *Każda podprzestrzeń afiniczna $\Pi = \dot{p} + U$ w przestrzeni afinicznej sama jest przestrzenią afiniczną, stowarzyszoną z przestrzenią liniową U.*

Dowód. Wystarczy zauważyć dwa fakty: (i) jeśli $\dot{q} \in \Pi$ i $\mathbf{u} \in U$, to $\dot{q} + \mathbf{u} \in \Pi$; (ii) jeśli $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi$, to wektor $\mathbf{w} = \overrightarrow{\dot{q}\dot{r}}$ spełniający warunek $\dot{r} = \dot{q} + \mathbf{w}$ należy do U, a ponieważ jest wyznaczony jednoznacznie w V, więc tym bardziej w U. ∎

Udowodnimy teraz kilka pożytecznych własności podprzestrzeni afinicznych. W dalszym ciągu tego rozdziału zakładamy, że ciało skalarów $\mathfrak{K}$, które na razie pozostawało w cieniu, ma charakterystykę $\neq 2$.

Zgodnie z ogólną definicją, do każdej podprzestrzeni afinicznej Π wymiaru $r > 0$ należą co najmniej dwa różne punkty $\dot{p}, \dot{q}$. Jeśli $r = 1$, czyli Π jest prostą, to

$$\Pi = \{\dot{p} + \lambda\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} \mid \lambda \in \mathfrak{K}\}. \tag{6}$$

TWIERDZENIE 4. *Niepusty podzbiór $\Pi \subset \mathbb{A}$ jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy wraz z dowolnymi dwoma punktami zawiera prostą przechodzącą przez te punkty.*

Dowód. Załóżmy, że Π jest podprzestrzenią afiniczną: $\Pi = \dot{p} + U$, gdzie $\dot{p} \in \mathbb{A}$ i $U \subset V$. Jeśli $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \Pi$, to zgodnie z (6) wszystkie punkty prostej przechodzącej przez $\dot{q}_1$ i $\dot{q}_2$ mają postać

$$\dot{q}_1 + \lambda\overrightarrow{\dot{q}_1\dot{q}_2} = \dot{p} + \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}_1} + \lambda\overrightarrow{\dot{q}_1\dot{q}_2}, \qquad \lambda \in \mathfrak{K}.$$

Ponieważ $\dot{q}_1 = \dot{p} + \mathbf{u}_1$ i $\dot{q}_2 = \dot{p} + \mathbf{u}_2$ dla pewnych $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, więc $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}_1} = \mathbf{u}_1$ i $\overrightarrow{\dot{q}_1\dot{q}_2} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, a stąd

$$\dot{q}_1 + \lambda\overrightarrow{\dot{q}_1\dot{q}_2} = \dot{p} + \mathbf{u}_1 + \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \in \dot{p} + U = \Pi.$$

Na odwrót, załóżmy, że niepusty podzbiór $\Pi \subset \mathbb{A}$ spełnia podany warunek. Weźmy dowolny punkt $\dot{p} \in \Pi$ i niech $U = \{\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} \mid \dot{q} \in \Pi\}$. Należy wykazać, że U jest podprzestrzenią liniową w V. Zgodnie z założeniem, jeśli $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, tj. $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}_1}$ i $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{\dot{p}\dot{q}_2}$ dla pewnych $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \Pi$, to punkt $\dot{p} + \mathbf{u}_1 + \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$, leżący na prostej $\{\dot{q}_1 + \mu\overrightarrow{\dot{q}_1\dot{q}_2} \mid \mu \in \mathfrak{K}\}$, należy do Π dla dowolnego $\lambda \in \mathfrak{K}$. Inaczej mówiąc,

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_1 + \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \in U \;\; \forall\lambda \in \mathfrak{K}.$$

Ponadto $\mathbf{0} \in U$, gdyż $\dot{p} \in \Pi$. Biorąc $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, otrzymujemy implikację $\mathbf{u}_2 \in U \Rightarrow \lambda\mathbf{u}_2 \in U$. Przyjmując $\lambda = 1/2$ (istnieje w $\mathfrak{K}$), dochodzimy do wniosku, że z $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ wynika, iż $\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 \in U$, a stąd $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = 2(\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2) \in U$. Oznacza to, że U jest podprzestrzenią liniową w V. ■

WNIOSEK. *Jeśli Π' i Π'' są dwiema podprzestrzeniami afinicznymi w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$, to ich część wspólna $\Pi = \Pi' \cap \Pi''$ jest albo pusta, albo jest podprzestrzenią afiniczną. W tym ostatnim przypadku, jeśli U', U'' i U są podprzestrzeniami kierunkowymi dla (odpowiednio) Π', Π'' i Π, to $U = U' \cap U''$.*

Dowód. Jeśli zbiór Π jest jednopunktowy, to teza zachodzi (U jest podprzestrzenią zerową). Załóżmy teraz, że w Π są co najmniej dwa różne punkty $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$. Wtedy z twierdzenia 4 wynika, że prosta przechodząca przez $\dot{q}_1$ i $\dot{q}_2$ zawiera się zarówno w Π', jak i w Π'', a wobec tego również w $\Pi = \Pi' \cap \Pi'$. Oznacza to, znowu na mocy twierdzenia 4, że Π jest podprzestrzenią afiniczną.

Widać to też bezpośrednio: jeśli $\dot{p} \in \Pi' \cap \Pi''$, to $\Pi' = \dot{p} + U'$ i $\Pi'' = \dot{p} + U''$. Wobec tego jeśli $\dot{q} \in \Pi' \cap \Pi''$, to $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}' = \dot{p} + \mathbf{u}''$, gdzie $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'' \in U' \cap U''$. Widzimy więc, że Π składa się z punktów postaci $\dot{p} + \mathbf{u}$, gdzie $\mathbf{u} \in U' \cap U''$, czyli jest podprzestrzenią afiniczną o kierunku $U = U' \cap U''$. ■

DEFINICJA 5. Dowolne dwie podprzestrzenie afiniczne o tym samym kierunku U nazywamy *równoległymi*.

Dwie równoległe podprzestrzenie afiniczne $\dot{p} + U$ i $\dot{q} + U$ pokrywają się oczywiście dokładnie wtedy, gdy $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} \in U$. W ogólnym przypadku

$$\dot{q} + U = t_{\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}}(\dot{p} + U),$$

tj. podprzestrzenie są równoległe, gdy jedna jest obrazem drugiej w pewnej translacji.

Sprecyzujemy teraz uwagę poprzedzającą twierdzenie 2.

DEFINICJA 6. Mówimy, że punkty $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$ są *w położeniu ogólnym* (lub są *afinicznie niezależne*), jeśli nie leżą w żadnej płaszczyźnie afinicznej wymiaru m.

Afiniczna niezależność punktów $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ (możliwa tylko przy $m \leqslant n = \dim \mathbb{A}$) jest równoważna liniowej niezależności wektorów $\overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_1}, \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_2}, \ldots, \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_m}$ lub też wektorów

$$\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_0}, \ldots, \overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_{i-1}}, \overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_m}$$

dla każdego wskaźnika i, ponieważ $\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_j} = \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_j} - \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_i}$. Definiując U jako powłokę liniową $\langle \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_1}, \ldots, \overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}_m} \rangle$, dochodzimy do wniosku, że przez dowolne punkty $p_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ w położeniu ogólnym przechodzi (dokładnie jedna) m-wymiarowa podprzestrzeń afiniczna $\dot{p}_0 + U$.

Jeśli $\mathcal{M}$ jest dowolnym (niepustym) podzbiorem w $\mathbb{A}$, to powłoka liniowa U zbioru wektorów $\overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}}$ o ustalonym początku $\dot{p}_0 \in \mathcal{M}$ i końcach $\dot{p}$ również leżących w $\mathcal{M}$ nie zależy od wyboru $\dot{p}_0$. Podprzestrzeń afiniczna $\Pi := A(\mathcal{M}) := \dot{p}_0 + U$ jest częścią wspólną wszystkich podprzestrzeni afinicznych zawierających $\mathcal{M}$.

DEFINICJA 7. Podprzestrzeń afiniczną $A(\mathcal{M})$ nazywamy *powłoką afiniczną* zbioru $\mathcal{M}$.

W szczególności dla $\mathcal{M} = \{\Pi', \Pi''\}$ można mówić o powłoce afinicznej dwóch podprzestrzeni afinicznych $\Pi', \Pi'' \subset \mathcal{M}$. Powłoka ta jest wyznaczona przez podprzestrzenie Π' i Π'' jednoznacznie: $A(\Pi', \Pi'')$ to najmniejsza (w sensie zawierania) podprzestrzeń afiniczna zawierająca Π' i Π''.

Przykład 2. Niech $\Pi' = \{\dot{p}\}$ będzie podprzestrzenią zerowymiarową, złożoną jedynie z punktu $\dot{p}$ płaszczyzny $(\mathbb{A}, \mathbb{R}^2)$, a $\Pi'' = \{\dot{q} + \lambda\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — prostą na tej płaszczyźnie. Jeśli $\dot{p} \in \Pi''$, to oczywiście $A(\Pi', \Pi'') = \Pi''$; w przeciwnym razie $A(\Pi', \Pi'') = \mathbb{A}$.

5. Współrzędne barycentryczne. Uwaga w punkcie 3 implikuje, że w definicji 3 można zastąpić bazę $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ układem punktów $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n$ w położeniu ogólnym. Współrzędne dowolnego punktu $\dot{p} \in \mathbb{A}$ wyznacza się ze wzoru

$\dot{p} = \dot{p}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(\dot{p}_i - \dot{p}_0)$. Formalnie można tę równość przepisać w postaci

$$\dot{p} = \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\dot{p}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \dot{p}_i,$$

gdzie oczywiście poszczególne składniki z osobna nie mają sensu. Ściślej mówiąc, nadawanie interpretacji geometrycznej sumie $\dot{q}+\dot{r}$ lub wyrażeniu $\lambda\dot{q}$ dla dowolnych punktów $\dot{q}, \dot{r} \in \mathbb{A}$ i skalarów $\lambda \in \mathfrak{K}$ jest bezsensowne. Mimo to ma sens następująca

DEFINICJA 8. Niech $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ będą dowolnymi punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$, a $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathfrak{K}$ — skalarami spełniającymi warunek $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$. Wówczas sumę $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \dot{p}_i$ definiujemy jako punkt przestrzeni $\mathbb{A}$ określony za pomocą równości

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \dot{p}_i = \dot{p} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p}),$$

gdzie $\dot{p}$ jest ustalonym punktem z $\mathbb{A}$. Mówimy, że $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \dot{p}_i$ to *kombinacja barycentryczna* punktów $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ o współczynnikach $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Wykażemy, że definicja ta jest poprawna:

STWIERDZENIE 1. *Jeśli* $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$, *to punkt*

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \dot{p}_i := \dot{p} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p})$$

nie zależy od wyboru punktu $\dot{p}$.

Dowód. Jeśli zamiast $\dot{p}$ weźmiemy punkt $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in V$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}\dot{q} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{q}) &= \dot{p} + \mathbf{v} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p} - \mathbf{v}) \\ &= \dot{p} + \mathbf{v} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p}) - \Big(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\Big)\mathbf{v} = \dot{p} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p}),\end{aligned}$$

ponieważ $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$. ■

Można więc mówić np. o średniej arytmetycznej punktów, $\frac{1}{2}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{r} = \dot{q} + \frac{1}{2}(\dot{r} - \dot{q})$, ale już nie o „jednej trzeciej" $\frac{1}{3}\dot{q} + \frac{1}{3}\dot{r}$.

DEFINICJA 8′. Jeśli każdy punkt $\dot{p} \in \mathbb{A}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji barycentrycznej

$$\dot{p} = \sum_{i=0}^{n} x_i \dot{p}_i, \quad x_i \in \mathfrak{K}, \quad \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,$$

to układ punktów $(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ nazwiemy *barycentrycznym układem współrzędnych* w $\mathbb{A}$, a skalary $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *współrzędnymi barycentrycznymi* punktu $\dot{p}$.

Jeśli przepiszemy powyższy warunek w postaci $\dot{p} = \dot{p}_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i(\dot{p}_i - \dot{p}_0)$, to widać, że jednoznaczność kombinacji barycentrycznej jest równoważna temu, że $(\dot{p}_0; \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ jest układem współrzędnych w $\mathbb{A}$ o początku w $\dot{p}_0$ w sensie poprzedniej definicji, tj. układ wektorów $(\dot{p}_1 - \dot{p}_0, \ldots, \dot{p}_n - \dot{p}_0)$ jest bazą w V. Jeśli punkt $\dot{p}$ ma w układzie $(\dot{p}_0; \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ o początku w $\dot{p}_0$ współrzędne $x_1, \ldots, x_n$, to ten sam punkt ma w układzie $(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ współrzędne barycentryczne $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i, x_1, \ldots, x_n$.

Rozumując nieco inaczej, przyjmijmy, że $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jest dowolnym układem współrzędnych w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$; niech Π_m będzie (jednoznacznie wyznaczoną) m-wymiarową podprzestrzenią afiniczną przechodzącą przez punkty $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_m$ w położeniu ogólnym i niech $x_1^i, \ldots, x_n^i$, dla $i = 0, \ldots, m$, będą współrzędnymi tych punktów. Wówczas współrzędne $x_1, \ldots, x_n$ dowolnego punktu $\dot{p} \in \Pi_m$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x_j = x_j^0 + \lambda_1(x_j^1 - x_j^0) + \ldots + \lambda_m(x_j^m - x_j^0), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Równania te stanowią tzw. *opis parametryczny* podprzestrzeni Π_m. Wzór ten stanie się bardziej symetryczny, jeśli wprowadzimy dodatkowy parametr λ_0, związany z $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ równością $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$; wtedy (7) przybierze postać

$$x_j = \lambda_0 x_j^0 + \lambda_1 x_j^1 + \ldots + \lambda_m x_j^m, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{7'}$$

Kombinacje barycentryczne punktów zachowują się przy przekształceniach afinicznych tak samo jak kombinacje liniowe wektorów przy przekształceniach liniowych:

Stwierdzenie 2.

(i) *Niech $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ będzie przekształceniem afinicznym oraz $\dot{p}_0, \ldots, \dot{p}_m \in \mathbb{A}$. Wtedy*

$$\left(x_0, \ldots, x_m \in \mathfrak{R},\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1\right) \Rightarrow f\left(\sum_{i=0}^{m} x_i \dot{p}_i\right) = \sum_{i=0}^{m} x_i f(\dot{p}_i).$$

(ii) *Załóżmy, że układ punktów $(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ stanowi barycentryczny układ współrzędnych w $\mathbb{A}$. Wtedy dla dowolnych punktów $\dot{q}_0, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n \in \mathbb{A}'$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ takie, że*

$$f(\dot{p}_i) = \dot{q}_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dowód. (i) Jeśli ustalimy punkt $\dot{p} \in \mathbb{A}$, to na podstawie stwierdzenia 1 otrzymamy

$$f\Big(\sum_{i=0}^{m} x_i\dot{p}_i\Big) = f\Big(\dot{p} + \sum_{i=0}^{m} x_i(\dot{p}_i - \dot{p})\Big)$$
$$= f(\dot{p}) + Df\Big(\sum_{i=0}^{m} x_i(\dot{p}_i - \dot{p})\Big) = f(\dot{p}) + \sum_{i=0}^{m} x_i Df(\dot{p}_i - \dot{p})$$
$$= f(\dot{p}) + \sum_{i=0}^{m} x_i(f(\dot{p}_i) - f(\dot{p})) = \sum_{i=0}^{m} x_i f(\dot{p}_i),$$

co dowodzi (i).

(ii) Ponieważ każdy punkt z $\mathbb{A}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji barycentrycznej punktów $\dot{p}_i$, więc wzór

$$f\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\dot{p}_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} x_i\dot{q}_i$$

określa odwzorowanie $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$. Na mocy (i) jest to jedyne odwzorowanie, które spełnia żądany warunek; trzeba tylko sprawdzić, że jest ono afiniczne. Istotnie,

$$f\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\dot{p}_i\Big) - f\Big(\sum_{i=0}^{n} y_i\dot{p}_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} x_i\dot{q}_i - \sum_{i=0}^{n} y_i\dot{q}_i$$
$$= \dot{q}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(\dot{q}_i - \dot{q}_0) - \Big(\dot{q}_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i(\dot{q}_i - \dot{q}_0)\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(\dot{q}_i - \dot{q}_0).$$

Niech teraz $\mathcal{F} : V \to V'$ będzie przekształceniem liniowym przeprowadzającym wektory $\dot{p}_i - \dot{p}_0$ na $\dot{q}_i - \dot{q}_0$ dla $i = 1, \ldots, n$; przekształcenie takie istnieje, gdyż na mocy założenia $(\dot{p}_1 - \dot{p}_0, \ldots, \dot{p}_n - \dot{p}_0)$ jest bazą przestrzeni liniowej V. Wtedy prawa strona powyższej równości jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\mathcal{F}(\dot{p}_i - \dot{p}_0) = \mathcal{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(\dot{p}_i - \dot{p}_0)\Big)$$
$$= \mathcal{F}\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\dot{p}_i - \sum_{i=0}^{n} y_i\dot{p}_i\Big),$$

czyli $\mathcal{F} = Df$. ∎

Przykład 3. Na rzeczywistej dwuwymiarowej płaszczyźnie afinicznej $\mathbb{A}$ jako układ współrzędnych można wziąć wierzchołki dowolnego trójkąta. Wtedy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ są współrzędnymi barycentrycznymi wierzchołków trójkąta, a jego środek ciężkości ma współrzędne barycentryczne $(1/3,1/3,1/3)$.

6. Funkcje afiniczne i układy równań liniowych. Niech $(\mathbb{A}, V)$ będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathfrak{K}$. Jak wiemy, samo ciało $\mathfrak{K}$ można również traktować jako przestrzeń afiniczną. Zgodnie z definicją 2 funkcja $f : \mathbb{A} \to \mathfrak{K}$ jest afiniczna, jeśli

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + Df(\mathbf{v}) \qquad \forall \dot{p} \in \mathbb{A},\ \mathbf{v} \in V,$$

gdzie $Df \in V^*$ jest formą liniową na V, którą nadal nazywamy częścią liniową (lub różniczką) funkcji f. Stałe funkcje skalarne są funkcjami afinicznymi, których część liniowa jest równa zeru.

Jeśli wybierzemy układ współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ w $\mathbb{A}$ i oznaczymy przez $x_1, \ldots, x_n$ współrzędne punktu $\dot{p} \in \mathbb{A}$ w tym układzie, to wartości funkcji f można zapisać w postaci

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o} + \overrightarrow{\dot{o}\dot{p}}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0, \tag{8}$$

gdzie $\alpha_0 = f(\dot{o})$, $\alpha_i = Df(\mathbf{e}_i)$, $\overrightarrow{\dot{o}\dot{p}} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

Na odwrót, jeśli funkcja $f : \mathbb{A} \to \mathfrak{K}$ jest określona wzorem (8) dla pewnych $\alpha_i \in \mathfrak{K}$ oraz jeśli $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n$, to z twierdzenia 2 wynika, że

$$\begin{aligned} f(\dot{p} + \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i + v_i) + \alpha_0 \\ &= \Big(\sum_i \alpha_i x_i + \alpha_0\Big) + \sum_i \alpha_i v_i = f(\dot{p}) + Df(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

tj. f jest funkcją afiniczną.

Uwaga. Określając $(\lambda f + \mu g)(\dot{p}) = \lambda f(\dot{p}) + \mu g(\dot{p})$ dla $\lambda, \mu \in \mathfrak{K}$, stwierdzamy, że zbiór $\mathcal{S}$ wszystkich funkcji afinicznych $\mathbb{A} \to \mathfrak{K}$ ma strukturę przestrzeni liniowej: jeśli $f, g \in \mathcal{S}$, to

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(\dot{p} + \mathbf{v}) &= \lambda f(\dot{p} + \mathbf{v}) + \mu g(\dot{p} + \mathbf{v}) \\ &= \lambda\{f(\dot{p}) + Df(\mathbf{v})\} + \mu\{g(\dot{p}) + Dg(\mathbf{v})\} \\ &= (\lambda f + \mu g)(\dot{p}) + (\lambda Df + \mu Dg)(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

tj. $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}$ i $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$. Możemy więc teraz interpretować D jako przekształcenie liniowe $\mathcal{S} \to V^*$. Jego jądro $\operatorname{Ker} D$ jest prostą $\mathcal{S}^0$ w $\mathcal{S}$, złożoną z funkcji stałych.

Wróćmy raz jeszcze do układu równań liniowych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{9}$$

który można teraz zapisać w postaci

$$f_1(\dot{p}) = 0, \ \ldots, \ f_m(\dot{p}) = 0, \tag{9'}$$

gdzie wszystkie funkcje f_i są afiniczne:

$$f_i(\dot{p}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i.$$

Załóżmy, że układ (9) jest niesprzeczny i $x_1^0, \ldots, x_n^0$ jest jednym z jego rozwiązań. Przyjmując, że $x_1^0, \ldots, x_n^0$ są współrzędnymi punktu $\dot{p}_0$ w pewnym układzie współrzędnych $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ (czyli $f_i(\dot{o}) = -b_i$), i nazywając po prostu sam punkt $\dot{p}_0$ *rozwiązaniem*, na podstawie powyższych faktów dochodzimy do wniosku, że każde inne rozwiązanie układu (9) lub (9′) jest postaci $\dot{p} = \dot{p}_0 + \mathbf{x}$ dla pewnego wektora $\mathbf{x} \in V$ spełniającego układ liniowy

$$Df_1(\mathbf{x}) = 0, \; \ldots, \; Df_m(\mathbf{x}) = 0, \tag{10}$$

w którym Df_i jest częścią liniową funkcji f_i: $Df_i(\mathbf{x}) = \sum_j a_{ij}x_j$. Jak wiemy (rozdz. 1, § 3, p. 5), rozwiązania układu (10) tworzą podprzestrzeń liniową $U \subset V$ wymiaru $n - r$, gdzie r jest rzędem układu form liniowych $Df_1, \ldots, Df_m$ w V^*. Wynika stąd, że zbiór rozwiązań układu (9) stanowi podprzestrzeń afiniczną $\Pi = \dot{p}_0 + U$ wymiaru $n - r$.

Na odwrót, każdą podprzestrzeń afiniczną $\Pi = \dot{p}_0 + U \subset \mathbb{A}$ można określić za pomocą układu równań liniowych. Istotnie, jak wiemy z rozdziału 1 (§ 3, twierdzenie 4), podprzestrzeń liniowa $U \subset V$ wymiaru $n - r$ jest przestrzenią rozwiązań pewnego układu postaci (10) i rzędu r. Ponadto, z definicji, punkt $\dot{p}$ należy do Π dokładnie wtedy, gdy $\overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}} \in U$. Jeśli $x_1, \ldots, x_n$ są współrzędnymi punktu $\dot{p}$ w wybranym układzie współrzędnych, a $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — współrzędnymi punktu $\dot{p}_0$, to $\overrightarrow{\dot{p}_0\dot{p}} = \sum_j (x_j - x_j^0)\mathbf{e}_j$, a układ (10) przyjmuje postać

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

czyli

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

gdzie $b_i = \sum_j a_{ij}x_j^0$. Rząd tego układu jest równy r.

Udowodniliśmy w ten sposób

TWIERDZENIE 6. *Niech $\mathbb{A}$ będzie przestrzenią afiniczną wymiaru n. Zbiór punktów z $\mathbb{A}$, których współrzędne w ustalonym układzie współrzędnych spełniają niesprzeczny układ równań liniowych rzędu r, jest $(n-r)$-wymiarową podprzestrzenią afiniczną $\Pi \subset \mathbb{A}$. Każda podprzestrzeń afiniczna w $\mathbb{A}$ może być otrzymana w ten sposób.* ∎

W szczególności hiperpłaszczyznę można określić za pomocą jednego równania

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b.$$

W układzie (9) możemy pozostawić tylko $r \leqslant m$ równań liniowo niezależnych (czyli wybrać r liniowo niezależnych funkcji afinicznych f_i). W ten sposób na każdą podprzestrzeń afiniczną wymiaru $n-r$ możemy patrzeć jak na część wspólną r hiperpłaszczyzn. Dla sprzecznego układu równań liniowych przekrój odpowiadających mu hiperpłaszczyzn jest pusty.

7. Wzajemne położenie podprzestrzeni afinicznych. Niech $(\mathbb{A}, V)$ będzie przestrzenią afiniczną wymiaru n. Uogólniając pojęcie równoległości podprzestrzeni afinicznych tego samego wymiaru (definicja 5), wprowadzamy następującą definicję:

DEFINICJA 9. Niech $\Pi' = \dot{p} + U'$ i $\Pi'' = \dot{q} + U''$, gdzie U' i U'' są podprzestrzeniami liniowymi w V. Mówimy, że podprzestrzenie afiniczne Π' i Π'' są *równoległe*, jeśli $U' \subset U''$ lub $U'' \subset U'$.

Dla $\dim U' = \dim U''$ otrzymujemy poprzednie pojęcie równoległości. Jeśli $\Pi' \subset \Pi''$ lub $\Pi'' \subset \Pi'$, to warunek równoległości jest spełniony automatycznie.

Odnotujmy następujące oczywiste twierdzenie (dotyczące przypadku równych wymiarów):

TWIERDZENIE 7. *Dla każdej podprzestrzeni afinicznej $\Pi \subset \mathbb{A}$ i dowolnego punktu $\dot{q} \in \mathbb{A}$ istnieje (dokładnie jedna) podprzestrzeń afiniczna $\Pi' \subset \mathbb{A}$ wymiaru* $\dim \Pi' = \dim \Pi$ *przechodząca przez punkt $\dot{q}$ i równoległa do Π. Jeśli $\dot{q} \in \Pi$, to $\Pi' = \Pi$. Jeśli $\dot{q} \notin \Pi$, to podprzestrzenie Π i Π' są rozłączne.* ■

W szczególności równoległość dwóch hiperpłaszczyzn Π i Π', określonych w tym samym układzie współrzędnych wzorami

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad a'_1x'_1 + \ldots + a'_nx'_n = b',$$

oznacza po prostu proporcjonalność współczynników przy zmiennych: $a'_i = \lambda a_i$ dla $i = 1, \ldots, n$; równość $\Pi = \Pi'$ wymaga oczywiście spełnienia jeszcze warunku $b' = \lambda b$ z tym samym $\lambda \in \mathfrak{K}$.

DEFINICJA 10. Podprzestrzenie afiniczne rozłączne i nierównoległe nazywamy *skośnymi*.

Powyższy jakościowy obraz wzajemnego położenia podprzestrzeni afinicznych uzupełnimy informacjami o charakterze ilościowym. Po pierwsze, jeśli podprzestrzenie $\Pi' = \dot{p}+U'$ i $\Pi'' = \dot{q}+U''$ przecinają się, a $\dot{o}$ jest ich punktem wspólnym, to — jak wiemy — ich powłoka afiniczna ma postać

$$\Pi := A(\Pi', \Pi'') = \dot{o} + W, \qquad W = U' + U''.$$

W takim razie jednak (rozdz. 1, § 2, twierdzenie 6)

$$m := \dim \Pi = \dim W = k + l - i,$$

gdzie

$$k = \dim U', \qquad l = \dim U'', \qquad i = \dim(U' \cap U''). \tag{11}$$

Jeśli część wspólna $\Pi' \cap \Pi''$ jest pusta, to rozpatrzmy prostą wektorową $V_1 = \{\lambda\overrightarrow{pq} \mid \lambda \in \mathfrak{R}\}$ i podprzestrzeń liniową

$$W^\circ := U' + U'' + V_1 \subseteq V.$$

Ponieważ $\overrightarrow{pq} \notin U' + U''$ (ćwiczenie 4.1.1), więc

$$m := \dim W^\circ = \dim(U' + U'') + \dim V_1 = k + l - i + 1.$$

Podprzestrzeń afiniczna $\Pi^\circ := \dot{p} + W^\circ$ zawiera oczywiście $\Pi' = \dot{p} + U'$ i $\Pi'' = \dot{q} + U'' = \dot{p} + \overrightarrow{pq} + U'' \subset \dot{p} + U'' + V_1$. Z drugiej strony, każda podprzestrzeń afiniczna zawierająca Π' i Π'' zawiera prostą o kierunku wektora $\overrightarrow{pq}$, czyli o kierunku V_1, a więc zawiera też Π°. Inaczej mówiąc, w przypadku $\Pi' \cap \Pi'' = \emptyset$ zachodzi równość $\Pi^\circ = A(\Pi', \Pi'')$. Ostatecznie więc

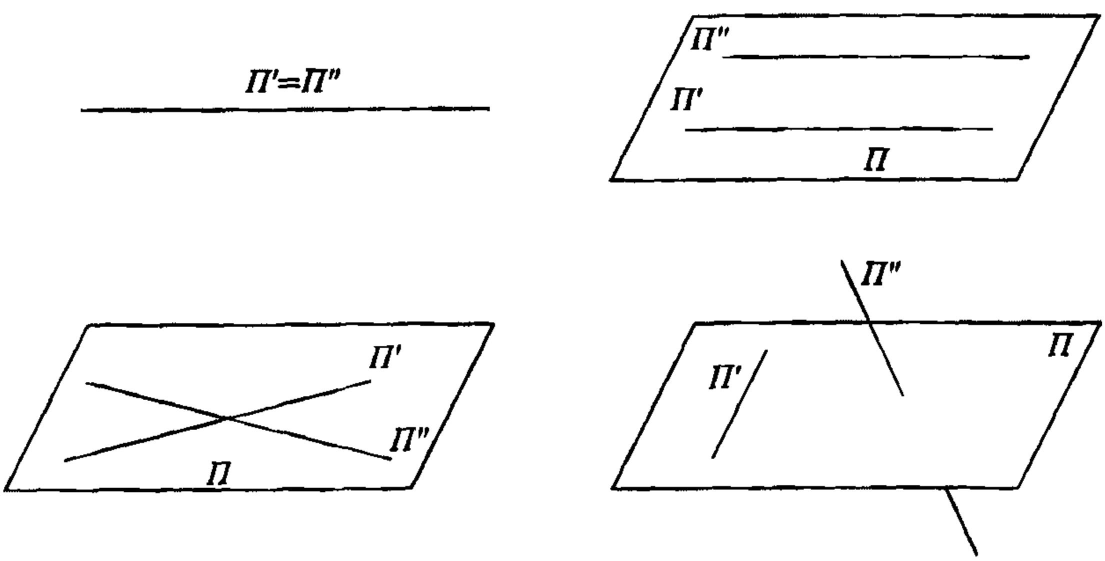
$$m = \dim A(\Pi', \Pi'') = \begin{cases} k + l - i, & \text{jeśli } \Pi' \cap \Pi'' \neq \emptyset, \\ k + l - i + 1, & \text{jeśli } \Pi' \cap \Pi'' = \emptyset. \end{cases} \tag{12}$$

Czwórka

$$(i, k, l, m), \qquad 0 \leqslant i \leqslant k, l \leqslant m \leqslant n, \tag{13}$$

liczb całkowitych określonych wzorami (11) i (12) charakteryzuje całkowicie wzajemne położenie podprzestrzeni afinicznych Π' i Π''.

Przykład 4. Niech $(\mathbb{A}, \mathbb{R}^3)$ będzie trójwymiarową rzeczywistą przestrzenią afiniczną, a Π' i Π'' — dwiema prostymi w $\mathbb{A}$, czyli $n = 3$, $k = l = 1$. Możliwe przypadki wzajemnego położenia prostych w $\mathbb{A}^3$ są oczywiste (rys. 6).



Rys. 6

Sugerujemy Czytelnikowi, by spróbował sobie wyobrazić skośne podprzestrzenie afiniczne wymiaru 1 i 2 w czterowymiarowej przestrzeni afinicznej.

ĆWICZENIA

1. Sprawdzić, że podprzestrzenie afiniczne $\Pi' = \dot{p}+U'$ i $\Pi'' = \dot{q}+U''$ przecinają się (czyli mają punkt wspólny) dokładnie wtedy, gdy $\overrightarrow{pq} \in U' + U''$ (por. wniosek z twierdzenia 4).

2. Niech $A(\Pi_1, \ldots, \Pi_m)$ oznacza powłokę afiniczną prostych $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ w n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}$. Dla jakiego najmniejszego m zachodzi równość $A(\Pi_1, \ldots, \Pi_m) = \mathbb{A}$?

3. Niech $(\dot{p}_0; \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ będzie układem współrzędnych w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej, a $(\dot{p}'_0, \dot{p}'_1, \ldots, \dot{p}'_n)$ — układem $n+1$ punktów przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}'$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, dla którego $f(\dot{p}_i) = \dot{p}'_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.

4. Wykazać, że kombinacja barycentryczna skończonej liczby kombinacji barycentrycznych punktów $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n$ jest kombinacją barycentryczną tych punktów.

5. Niech $\mathbb{A}$ będzie n-wymiarową przestrzenią afiniczną. Udowodnić, że odwzorowanie $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$, które zachowuje barycentryczne kombinacje punktów, jest afiniczne (odwrócenie stwierdzenia 2(i)).

6. Wykorzystując własności przekształceń afinicznych, udowodnić znane twierdzenie o tym, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

§ 2. PRZESTRZENIE (AFINICZNE) EUKLIDESOWE

1. Metryka euklidesowa. Aby się możliwie zbliżyć do realiów fizycznej przestrzeni trójwymiarowej, wprowadzimy następującą definicję:

DEFINICJA 1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Przestrzeń afiniczną $(\mathbb{E}, V)$ nazywamy *euklidesową*, jeśli przestrzeń liniowa V jest euklidesowa, tzn. wyposażona w dodatnio określony iloczyn skalarny $(* \mid *)$.

Odtąd „przestrzeń euklidesowa" będzie oznaczać euklidesową przestrzeń afiniczną; nie będzie to prowadzić do nieporozumień. W przestrzeni euklidesowej można określić odległość punktów $\dot{p}$ i $\dot{q}$ wzorem

$$\varrho(\dot{p}, \dot{q}) := \|\overrightarrow{pq}\| = \sqrt{(\overrightarrow{pq} \mid \overrightarrow{pq})}. \tag{1}$$

Odległość ta ma znane nam już własności odległości w przestrzeniach metrycznych (rozdz. 3, § 2, p. 5):

(i) $\varrho(\dot{p}, \dot{q}) = \varrho(\dot{q}, \dot{p})$;
(ii) $\varrho(\dot{p}, \dot{q}) = 0 \Leftrightarrow \dot{p} = \dot{q}$;
(iii) $\varrho(\dot{p}, \dot{q}) + \varrho(\dot{q}, \dot{r}) \geqslant \varrho(\dot{p}, \dot{r})$ (nierówność trójkąta).