6. Przestrzenie ilorazowe. Dla danej podprzestrzeni liniowej $L \subset V$ istnieje na ogół wiele podprzestrzeni dopełniających $M \subset V$, dla których $V = L \oplus M$. Wszystkie te dopełnienia są jednak izomorficzne z pewną przestrzenią liniową, którą konstruuje się z V i L w sposób całkowicie niezmienniczy, niezależny od jakichkolwiek wyborów.

Spójrzmy na V i L jak na grupy abelowe. Zbiór

$$\mathbf{x} + L = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in L\}$$

nazywamy *warstwą* grupy V względem podgrupy L o *reprezentancie* $\mathbf{x}$. Jeśli $\mathbf{0} \neq \mathbf{z} \in (\mathbf{x} + L) \cap (\mathbf{x}' + L)$, to $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{z}$ dla pewnych $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in L$, a stąd $\mathbf{x} + L = \mathbf{x}' + L = \mathbf{z} + L$. Zatem dwie warstwy są albo identyczne, albo rozłączne. Dla ustalonego L przyjmijmy $\overline{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + L$. Każdy wektor $\mathbf{v} \in V$ należy do jakiejś warstwy i jeśli oznaczymy przez $\overline{V} = V/L$ zbiór wszystkich warstw grupy V względem podgrupy L, to w zbiorze $\overline{V}$ można wprowadzić strukturę grupy abelowej, definiując $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}'} = \overline{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}$. Przemienność i łączność tego działania sprawdza się bezpośrednio. Warstwa $\overline{\mathbf{0}} = L$ jest oczywiście elementem zerowym tej grupy: $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{x} + \mathbf{0}} = \overline{\mathbf{x}}$. Ponadto $-\overline{\mathbf{x}} = \overline{-\mathbf{x}}$.

Jeśli dla każdego $\lambda \in \mathfrak{K}$ przyjmiemy $\lambda\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}}$, tj. $\lambda(\mathbf{x} + L) = \lambda\mathbf{x} + L$, to łatwo się przekonać, że spełnione są wszystkie aksjomaty (PL_1)–(PL_8) z § 1. Na przykład

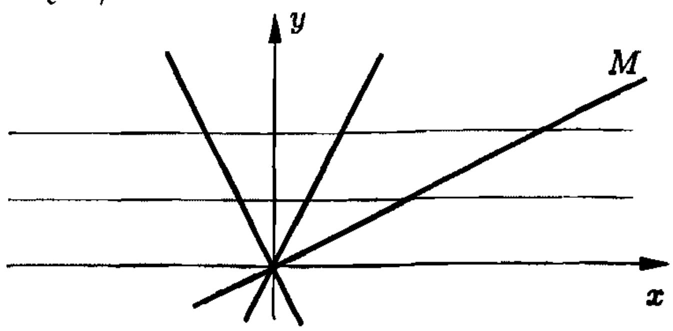
$$1 \cdot (\mathbf{x} + L) = 1 \cdot \mathbf{x} + L = \mathbf{x} + L,$$

$$\alpha(\beta(\mathbf{x} + L)) = \alpha(\beta\mathbf{x} + L) = \alpha\beta\mathbf{x} + L = (\alpha\beta)(\mathbf{x} + L).$$

W ten sposób w zbiorze $\overline{V} = V/L$ wprowadziliśmy naturalną strukturę przestrzeni liniowej, zwanej *przestrzenią ilorazową* przestrzeni V względem podprzestrzeni L. Zamiast o warstwach, moglibyśmy równie dobrze mówić o klasach równoważności względem relacji określonej wzorem

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}' \pmod{L} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L.$$

Przykład 6. Niech $V = \mathbb{R}^2$ będzie płaszczyzną kartezjańską, a L — osią x. Podprzestrzenią dopełniającą dla L jest dowolna prosta M przechodząca przez początek układu i różna od osi x (rys. 2). Prosta M przecina każdą prostą równoległą do osi x w dokładnie jednym punkcie, tak więc zbiór M parametryzuje rodzinę tych prostych równoległych. Ta rodzina właśnie jest przestrzenią ilorazową V/L.



Rys. 2

TWIERDZENIE 10. *Niech $V = L \oplus M$ będzie sumą prostą podprzestrzeni $L, M \subset V$. Wtedy odwzorowanie $f : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + L$ ($\mathbf{u} \in M$) jest izomorfizmem pomiędzy M i V/L.*

Dowód. Istotnie, odwzorowanie f jest liniowe, ponieważ

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + L = \alpha(\mathbf{u} + L) + \beta(\mathbf{v} + L) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}).$$

Niech $\mathbf{v} + L$ będzie dowolnym elementem z V/L. Na mocy założenia $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ dla pewnych $\mathbf{x} \in L$ i $\mathbf{y} \in M$, więc $\mathbf{v} + L = \mathbf{x} + \mathbf{y} + L = (\mathbf{x} + L) + (\mathbf{y} + L) = L + (\mathbf{y} + L) = \mathbf{y} + L = f(\mathbf{y})$. Oznacza to surjektywność odwzorowania f. Jeśli ponadto $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f$, to $\mathbf{u} + L = L$, a stąd $\mathbf{u} \in L$. Ale jednocześnie $\mathbf{u} \in M$ oraz $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$. Zatem $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, czyli $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$. Wobec tego f jest bijekcją. ■

WNIOSEK. *Jeśli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa i L jest dowolną podprzestrzenią w V, to*

$$\dim V/L = \dim V - \dim L.$$

Inaczej mówiąc, $\dim V/L = \operatorname{codim}_V L$ [1].

Dowód. Na mocy twierdzenia 9 istnieje podprzestrzeń $M \subset V$ taka, że $V = L \oplus M$, w szczególności $\dim M = \dim V - \dim L$. Ale zgodnie z twierdzeniem 10 podprzestrzeń M jest izomorficzna z przestrzenią ilorazową V/L. ■

ĆWICZENIA

1. Ile podprzestrzeni k-wymiarowych ($1 \leqslant k \leqslant n$) ma n-wymiarowa przestrzeń liniowa V nad ciałem $\mathbb{F}_q$ o q elementach?

([1]) Warunek ten można wykorzystać do *zdefiniowania* kowymiaru w przypadku, gdy przestrzeń V jest nieskończenie wymiarowa (*przyp. tłum.*).

2. Ustalić, jaki wymiar mają następujące przestrzenie liniowe rzeczywistych macierzy kwadratowych stopnia n:

(a) przestrzeń macierzy symetrycznych;
(b) przestrzeń macierzy antysymetrycznych;
(c) przestrzeń macierzy o zerowym śladzie.

3. Jaki wymiar ma przestrzeń liniowa wszystkich wielomianów $f(t)$ jednej zmiennej stopni $\leqslant n$, spełniających warunek $f(1) = 0$? Znaleźć bazę tej przestrzeni.

4. Udowodnić, że suma algebraiczna $U = U_1 + \ldots + U_m$ podprzestrzeni liniowych jest prosta dokładnie wtedy, gdy

$$(U_1 + \ldots + U_{i-1}) \cap U_i = \{\mathbf{0}\}, \qquad i = 2, \ldots, m.$$

5. W przestrzeni P_n znaleźć macierz przejścia od bazy $(1, t, \ldots, t^{n-1})$ do bazy $(1, t-\alpha, \ldots, (t-\alpha)^{n-1})$ $(\alpha \in \mathfrak{K})$.

6. Niech θ będzie zespolonym pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{Q}[t]$ nieprzywiedlnego nad $\mathbb{Q}$. Znaleźć wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}[\theta] = \langle 1, \theta, \ldots, \theta^k, \ldots \rangle_{\mathbb{Q}}$ nad $\mathbb{Q}$.

7. Udowodnić, że dla sum prostych nie zachodzi prawo skracania, tj. z równości sum $U \oplus W_1 = U \oplus W_2$ nie wynika na ogół, że $W_1 = W_2$.

8. Ustalić, czy przestrzeń ilorazowa $\mathfrak{K}[t]/L$ jest skończenie wymiarowa, jeśli L jest:

(a) podprzestrzenią P_n wielomianów stopni $\leqslant n-1$;
(b) podprzestrzenią wielomianów podzielnych przez t^n;
(c) podprzestrzenią wielomianów zmiennej t^2.

9. Udowodnić następujący odpowiednik wzoru Grassmanna:

$$\operatorname{codim}(U + W) + \operatorname{codim}(U \cap W) = \operatorname{codim} U + \operatorname{codim} W$$

(U i W są podprzestrzeniami skończonego kowymiaru w przestrzeni liniowej V, niekoniecznie skończenie wymiarowej ([1])).

10. Przy oznaczeniach przykładu 8 z § 1 powstaje pytanie: jakie są wymiary przestrzeni $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q})$ i $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$? Rozpatrzmy trywialne macierze półmagiczne

$$0, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

([1]) Zob. poprzedni przypis (*przyp. tłum.*).