1. Niech $\varphi: \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ będzie przekształceniem liniowym zadanym przez macierz o współczynnikach rzeczywistych. Wiemy, że:

$$\dim \ker((\varphi - 2\,\mathrm{Id})^3) \geq 4$$
$$\dim \ker((\varphi - 2\,\mathrm{Id})^2) < 4$$
$$\dim \ker((\varphi - (1+i)\,\mathrm{Id})) \geq 2$$

Podać postać Jordana φ oraz znaleźć wielomian minimalny.

2. Niech $\varphi: E \to E$ będzie przekształceniem afinicznym. Przypuśćmy, że φ nie ma punktu stałego. Udowodnić, że 1 jest wartością własną przekształcenia stycznego.

3. a) Udowodnić, że jeśli $a+b \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, to formy kwadratowe zadane przez macierze $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & ab(a+b) \end{pmatrix}$ są równoważne.

b) Sklasyfikować formy kwadratowe od dwu zmiennych nad ciałem 5-cio elementowym $\mathbb{F}_5$.

4. Niech A będzie macierzą symetryczną (nad $\mathbb{R}$) dodatnio określoną. Udowodnić, że istnieje macierz górno-trójkątna B, taka, że $A = B^T \cdot B$.

5. Mówimy, że kwadryka afiniczna jest niezdegenerowana, jeśli po ujednorodnieniu jej równanie jest formą kwadratową niezdegenerowaną. Podać klasyfikację kwadryk afinicznych w $\mathbb{R}^4$ z dokładnością do izometrii. Które z nich są rzutowo równoważne?

6. Niech $h = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ będzie kwaternionem niezerowym. Niech $\varphi_h: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ będzie przekształceniem zadanym formułą $\varphi_h(x) = h x h^{-1}$. Jakie są wartości własne φ_h? Znaleźć wektory własne w $\mathbb{H}$.