GAL* – kolokwium II

Proszę rozwiązania zadań pisać na odzielnych kartkach.

---

1. (12p.) Dana jest kwadryka $Q \subset \mathbb{R}^2$ opisana równaniem

$$52x^2 + 72xy + 280x + 73y^2 + 290y + 325 = 0$$

a) Znaleźć środek symetrii (jeśli istnieje) oraz kierunki i długości osi głównych kwadryki.
b) Czy istnieją współrzędne afiniczne, w których Q jest opisana równaniem

$$y_1^2 - y_2^2 = 1\ ?$$

Jeśli isnieją, to znaleźć te współrzędne.
c) Czy istnieje rzutowa zamiana zmiennych taka, że Q w nowych współrzędnych jest opisana równaniem $z_1^2 = 2z_2$? Jeśli isnieje, to znaleźć tę zamianę zmiennych.

---

2. (12p.) Operator $A \in End(\mathbb{C}^2)$ jest zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 4+2i & 5+4i \\ 4+3i & 2 \end{pmatrix}$$

Przedstawić A jako złożenie QP operatora samosprężonego dodatnio-określonego P i unitarnego Q.

---

3. (12p.) Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Przypuśćmy, że istnieją trzy endomorfizmy $A, B, C \in End(V)$ spełniające $A^2 = B^2 = C^2 = -Id$ oraz $AB = -BA = C$, $BC = -CB = A$, $CA = -AC = B$. Udowodnić, że $\dim(V)$ jest podzielny przez 4.

---

4. (12p.) Niech V będzie zbiorem macierzy operatorów samosprzężonych w $\mathbb{C}^n$

$$V = \{X \in M(n \times n; \mathbb{C}) \,|\, \overline{X}^T = X\}.$$

Dla $G = GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$ oraz $SU(n)$ rozważyć relację równoważności w V:

$$X \sim_G Y \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \;\; \exists A \in G \;:\; AX\overline{A}^T = Y.$$

Wskazać dokładnie po jednym reprezentancie z każdej klasy równoważności.

---

5. (8p.) Dana macierz $B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ (m wierszy, n kolumn). Definiujemy m-liniowy funkcjonał antysymetryczny na przestrzeni $\mathbb{K}^n$ wzorem

$$\phi(v_1, v_2, \ldots, v_m) = det(Bv_1, Bv_2, \ldots, Bv_m).$$

W tym zapisie Bv_i jest i-tą kolumną macierzy $m \times m$, której liczymy wyznacznik. Znaleźć współczynniki ϕ bazie $\Lambda^m(V^*)$ złożonej z funkcjonałów

$$e^I = A(e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_m}), \quad I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

gdzie A jest operatorem antysymetryzacji.

T. (14p.) Niech A będzie operatorem w skończenie wymiarowej przestrzeni zespolonej z iloczynem hermitowskim. Załóżmy, że $A^* = A^{-1}$.
a) Udowodnić, że A można zdiagonalizować w pewnej unitarnej bazie.
b) Sformułować i udowodnić analog twierdzenia a) dla przestrzeni rzeczywistych.