Zadania przygotowawcze do I kolokwium GAL II*

1. Niech A będzie macierzą o m wierszach i n kolumnach, $m \geq n$. Załóżmy, że A jest maksymalnego rzędu. Udowodnić, że $det(A^T A) \neq 0$.

2. Dany ciąg liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \dots k_n$, oraz ciąg parami różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Udowodnić, że znak wyznacznika macierzy

$$\begin{pmatrix} x_1^{k_1} & x_1^{k_2} & \dots & x_1^{k_n} \\ x_2^{k_1} & x_2^{k_2} & \dots & x_2^{k_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{k_1} & x_n^{k_2} & \dots & x_n^{k_n} \end{pmatrix}$$

nie zależy od ciągu k_i.

3. Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

4. Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz ϕ?

5. Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. (Wersja łatwiejsza $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem spełniającym $\phi^k = Id$ dla pewnego k niepodzielnego przez $char(\mathbb{K})$. Udowodnić, że w pewnej bazie macierz ϕ jest diagonalizowalna.

6. Czwórka różnych punktów A, B, C, D w przestrzeni afinicznej tworzy równoległobok, jeśli $af(A, B)$ jest równoległa do $af(C, D)$ oraz $af(A, D)$ jest równoległa do $af(B, C)$. Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Wykazać, że $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$.

7. Dane dwie podprzestrzenie afiniczne E i F wymiaru n w $\mathbb{K}^{2n+1}$. Załóżmy, że są one położone skośnie (tzn. $TE \cap TF = \{0\}$ i $E \cap F = \emptyset$). Ponadto dany punkt p nie należący do żadnej z tych podprzestrzeni.
a) Ile jest prostych afinicznych przechodzących przez p i przecinających E oraz F?
b) Czy każdą taką konfigurację (para przestrzeni i punkt) można przekształcić afinicznie na dowolną inną?

8. Dana antysymetryczna forma ϕ na V. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią, $\dim(W) = k$. Załóżmy, że ϕ zeruje się na W, tzn. dla każdych $\alpha, \beta \in W$ mamy $\phi(\alpha, \beta) = 0$. Udowodnić, że można znaleźć bazę Darboux przestrzeni V taką, że pierwszych k wektorów rozpina W.

9. Dane macierze:

$$A1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A5 = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? (*Mówimy, że A i B są kongruentne nad $\mathbb{Q}$ jeśli istnieje macierz odwracalna C o współczynnikach wymiernych taka, że $A = C^T BC$.*)

10. Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna 4×4, której znaki minorów są następujące?
a) $-$, $+$, 0 , $-$
b) $-$, $+$, 0 , $+$
Czy znamy sygnaturę tej macierzy?