GAL z * 2014: Pierwsze kolokwium

Rowiązania każdego zadania proszę napisać na oddzielnej kartce.

1. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ taka, że $A^3 = A + I$ oraz że dla każdej takiej macierzy, $\det A > 0$.

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{K}$, $\dim V < \infty$. Dane przekształcenia liniowe $f, g : V \to V$ takie, że $fg = gf$. Ponadto V jest cykliczna ze wzgledu na f (to znaczy istnieje taki wektor $v \in V$, że zbiór $\{v, f(v), f^2(v), \ldots\}$ rozpina przestrzeń V). Wykaż, że $g = W(f)$ dla pewnego wielomianu W.

3) Dane są proste E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3 w $\mathbf{K}^3$ takie, że

$$T(E_1) + T(E_2) + T(E_3) = T(F_1) + T(F_2) + T(F_3) = T(\mathbf{K}^3)$$

oraz

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \emptyset\,.$$

Zbadaj, czy istnieje izomorfizm afiniczny $f : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ taki, że $f(E_i) = F_i$ dla $i = 1, 2, 3$.

4) Dane cztery proste w $\mathbf{K}^2$. Załóżmy, że żadne trzy z tych prostych nie przecinają się w jednym punkcie, oraz żadne trzy nie są równoległe. Udowodnić, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające te proste na układ

$$L_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 \,:\, x_1 = 0\}, \quad L_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 \,:\, x_1 = 1\},$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 \,:\, x_2 = 0\}, \quad L_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 \,:\, x_2 = 1\}.$$

5) Dane macierze $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Które pary tych macierzy są kongruentne nad ciałem: a) $\mathbf{Q}$, b) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, c) $\mathbf{R}$, d) $\mathbf{C}$?

6) TEORETYCZNE. Podać dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona (przy założeniu, że przekształcenie ma macierz górnotrójkątną w pewnej bazie, lecz nie stosując twierdzenia Jordana).