GAL* – kolokwium I, dodatkowe

Proszę rozwiązania zadań pisać na odzielnych kartkach.

1. (8pt) Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $\phi(x, y) = (x + 2y, x + y)$.Znaleźć wzór na $\phi^n(1, 0)$.

2. (6pt) O przekształcenu $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$ wiemy:
– wielomian charakterystyczny jest równy $(x - 1)^3(x - 2)^4$,
– wymiar obrazu $(\phi - 2\,Id)^2$ jest większy od 3,
– wymiary przestrzeni własnych $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2$.
Jaką postać Jordana ma ϕ?

3. (8pt) Niech $char(\mathbb{K}) = 0$. Dane proste afiniczne w $\mathbb{K}^3$:

$$P_1 = [0, 0, 0] + lin\{(1, 1, 1)\}, \quad P_2 = [4, 2, 0] + lin\{(0, 0, 1)\},$$

$$L_1 = [-1, 0, 0] + lin\{(0, 0, 1)\}, \quad L_2 = [1, 0, 0] + lin\{(0, 1, 0)\}$$

oraz punkty $q = (5, 4, 5)$ i $r_s = [s, 0, 0]$ (zależny od parametru $s \in \mathbb{K}$). Dla jakiego s istnieje izomorfizm afiniczny przekształcający P_i na L_i ($i = 1, 2$) oraz q na r_s?

4. (6pt) Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a F_1 i F_2 podprzestrzeniami. Załóżmy, że $TE = TF_1 + TF_2$. Udowodnić, że $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Wyrazić wymiar $F_1 \cap F_2$ za pomocą $\dim(F_1)$, $\dim(F_2)$ i $\dim(E)$.

5. (8pt) Niech A będzie symetryczną niezdegenerowaną macierzą kwadratową o wyrazach wymiernych. Udowodnić, że macierze

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$. (Powyżej macierz I oznacza macierz jednowtkową rozmiaru A.)

TEORIA

A. (8pt) Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni niekoniecznie skończenie wymiarowej. Niech $V_{(\lambda)}$ oznacza przestrzeń pierwiasktkową. Udowodnić, że jeżeli $\lambda \neq \mu$ to $V_{(\lambda)} \cap V_{(\mu)} = \{0\}$. Ogólniej, dla pary rozłącznych zbiorów $A, B \subset \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{\lambda \in A} V_{(\lambda)}\right) \cap \left(\sum_{\mu \in B} V_{(\mu)}\right) = \{0\}.$$

B. (6pt) Sformułować twierdzenie o bezwładności dla form kwadratowych.