GAL* – kolokwium I

Proszę rozwiązania zadań pisać na odzielnych kartkach.

1. Niech $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Udowodnić, że dla $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ jeśli $A = -A^T$ to istnieje $p \in \mathbb{K}$ takie, że $\det(A) = p^2$, tzn. wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest zawsze kwadratem.

2. Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

3. Dane sześć różnych punktów A, B, C, P, Q i R w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty P, Q i R leżą odpowiednio na prostych *af*(B, C), *af*(C, A) i *af*(A, B):
$P = pB + (1 - p)C$
$Q = qC + (1 - q)A$
$R = rA + (1 - r)B$.
Znaleźć warunek dla $p, q, r \in \mathbb{K}$ na to, by proste *af*(A, P), *af*(B, Q) i *af*(C, R) przecinały się w jednym punkcie. (Załóżmy, że żadne dwie proste występujące w zadaniu nie są równoległe.)

4. Niech ϕ będzie dwuliniową formą na przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^4$ zadaną w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje baza, w której forma ϕ ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Jeśli tak, to znaleźć taką bazę. Odpowiedź uzależnić od własności ciała $\mathbb{K}$.

5. (Teoretyczne) Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem (V niekoniecznie skonczońego wymiaru). Niech $f(x)$ będzie wielomianem rozkładającym się w ciele bazowym $\mathbb{K}$ na czynniki liniowe $f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{n_i}$. Przypuśćmy, że $f(\phi) = 0$. Udowodnić, że V jest sumą algebraiczną podprzestrzeni pierwiastkowych

$$V = V_{(\lambda_1)} + V_{(\lambda_2)} + \cdots + V_{(\lambda_k)}.$$