

Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

## GAL z ★ 2017 – Kolokwium I (1)

### Zadanie 1. (10pt = 5 × 2pt )

Proste pytania, odpowiedzi na które należy krótko uzasadnić:

**A.** Dana jest skończona wymiarowa przestrzeń liniowa  $V$  nad  $\mathbb{R}$  i endomorfizm  $\varphi : V \rightarrow V$ , taki że  $\varphi^{17} = Id$ . Wiadomo, że jedynie  $0$  jest wektorem zachowywanym przez  $\varphi$ . Czy  $V$  może mieć wymiar 2017?

**B.** Dana jest przestrzeń liniowa  $V$  nad  $\mathbb{C}$ ,  $\dim V = 10$  i endomorfizm  $\varphi : V \rightarrow V$ . W pewnej bazie  $M(\varphi)$  ma wyrazy rzeczywiste. Wiadomo że wielomian minimalny jest równy  $(t - 1)^2(t^2 + 1)^3$ . Jakiego wymiaru mogą być podprzestrzenie własne? (Wypisać wszystkie możliwości.)

**C.** Dany jest endomorfizm  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{K}^3)$ ,  $\varphi(x, y, z) = (x + y, y, 0)$ .

Znaleźć wielomian  $f \in \mathbb{K}[t]$  taki, że  $f(\varphi)$  jest częścią półprostą  $\varphi$  z rozkładu Jordana-Chevalleya.

**D.** Ile jest izomorfizmów afinicznych przestrzeni  $\mathbb{Z}_2^5$ , które przeprowadzają daną prostą na siebie?

**E.** Czy złożenie dwóch symetrii w przestrzeni afinicznej może nie mieć punktu stałego?

## GAL z ★ 2017 – Kolokwium I (2)

Rozwiązania zadań proszę pisać na oddzielnych kartkach.

### Zadanie 2. (10pt)

Dana jest skończona wymiarowa przestrzeń liniowa  $V$  nad dowolnym ciałem i endomorfizm  $\varphi : V \rightarrow V$ . Niech  $\mu(t) = \prod_{i=1}^m (\lambda_i - t)^{n_i}$  będzie wielomianem minimalnym  $\varphi$ . (Zakładamy, że  $\lambda_i \neq \lambda_j$  dla  $i \neq j$ .) Jaki jest wielomian minimalny  $\varphi^2$ ?

### Zadanie 3. (10pt)

Niech  $f : E \rightarrow E$  będzie przekształceniem afinicznym. Dana jest podprzestrzeń wektorowa  $W \subset TE$  taka, że

$$TE = W \oplus \text{im}(Df - Id).$$

- Udowodnić, że istnieje taki punkt  $q \in E$ , że  $f(q) = q + w$  dla pewnego wektora  $w \in W$ .
- Czy zbiór punktów  $q$  mających powyższą własność jest podprzestrzenią afiniczną? Jaki jest jej wymiar?

### Zadanie 4. (10pt)

Dane jest przekształcenie afiniczne  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  spełniające:

$$f([2, 2, 3]) = [3, -2, -2],$$

$$f([1, 2, 4]) = [0, 0, 1],$$

$$f([1, 2, 3]) = [-1, 2, 0],$$

$$f([1, 3, 3]) = [0, 2, -1].$$

Podać wzór analityczny. Znaleźć punkty, proste i płaszczyzny niezmiennicze.

*Df* ma dwie całkowite wartości własne.

### Zadanie 5. (10pt)

Dane są  $f$  i  $g$ , dwa endomorfizmy skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej nad  $\mathbb{Q}$ , które spełniają

$$fg = gf$$

$$f^2 + 2f = Id,$$

$$g^3 = 3Id.$$

Wykazać, że  $\dim V$  jest podzielny przez 6.